N° 264.

NA

POPIS PUBLICZNY

UCZNIÓW

SZKOŁY WYDZIAŁOWÉY

PRZY ULICY NOWY ŚWIAT

maiący się odbywać w domu W. Jasińskiego pod Nr 1286.
w dniach 30 i 31. Lipca

PRZEŚWIETNĄ PUBLICZNOŚĆ

Imieniem Instytutu

ZAPRASZA

Bartłomiey Prokopowicz Z. Rektora.

w WARSZAWIE
1830.

PORZĄDEK POPISU.

Klassa I^{sza} i II^{ga} dnia 30 Lipca.

Od godziny 8	do	$8\frac{1}{2}$	Nauka Religii i Moralna X. Potrasewicz.
$8\frac{1}{2}$	—	9	Język Niemiecki P. Swiderski.
9	—	$9\frac{1}{2}$	Język Francuzki P. Swiderski.
$9\frac{1}{2}$	—	10	Język Polski P. Zaiączkowski.
10	—	$10\frac{1}{2}$	Język Łaciński P. Przybyłowski.
$10\frac{1}{2}$	—	11	Jeometrya i Arytmetyka P. Siekaczyński.
11	—	$11\frac{1}{2}$	Historya Powszechna i Polska W. Rektor.
$11\frac{1}{2}$	—	12	Jeografia PP. Michalski i Brzeski.
12	—	$12\frac{1}{2}$	Historya Naturalna i Fizyka PP. Kobecki i Wysocki

Klassa III^{cia} i IV^{ta} dnia 31. Lipca.

8	do	$8\frac{1}{2}$	Religia X. Potrasiewicz.
$8\frac{1}{2}$	—	9	Język Niemiecki P. Swiderski.
9	—	$9\frac{1}{2}$	Język Francuzki P. Swiderski.
$9\frac{1}{2}$	—	10	Język Łaciński PP. Kobecki i Brzeski.
10	—	$10\frac{1}{2}$	Język Grecki P. Brzeski.
$10\frac{1}{2}$	—	11	Język Polski P. Zaiączkowski.
11	—	$11\frac{1}{2}$	Jeometrya P. Bayer.
$11\frac{1}{2}$	—	12	Arytmetyka i Algiebra P. Bayer.
12	—	$12\frac{1}{2}$	Hist. Powszechna i Polska W. Rektor i P. Wysocki.
$12\frac{1}{2}$	—	1	Jeografia PP. Michalski i Brzeski.
1	—	$1\frac{1}{2}$	Historya Naturalna, Fizyka i Chemia PP. Kobecki i Wysocki.

Czytanie promocyj i pochwał, rozdanie nagród it. d.

Nullum munus Reipublicae afferre majus, meliusque possumus, quam si doceamus, atque erudiamus juventutem.

Cic. cap. III de Divin.

Wzrastaiąca w ludność Stolica, przepełnione Uczniami wyższego Rzędu Jnstytuta, wskazywały potrzebę ich pomnożenia.— Wysoka Magistratura nad oświéceniem Narodu czuwaiąca, z woli Naywspanialszego Monarchy, rozciągaiąc troskliwą w tym zamiarze opiekę, i dogadzaiąc życzeniom Obywateli w oddaleniu od Szkół Woiewódzkich zamieszkałych, otworzyła w Miesiącu Październiku roku upłynionego Szkołę Wydziałową przy Ulicy Nowy Swiat, a pragnąc ią widzieć kwitnącą, wszelkich użyła środków nieodzownie do iéy wzrostu potrzebnych. Tym celem wydała naprzód polecenie do Szanownych Rektorów, aby młodzież, w swych Jnstytutach zapisaną, a w bliskości Nowego Swiata zamieszkałą starali się do téy nowéy Szkoły odesłać; polecenie takowe wzięło po części zamierzony skutek, 30 bowiem Uczniów z Liceum, 20. ze Szkoły Wydziałowéy przy Ulicy Królewskiéy, i po kilku z innych odległeyszych Szkół przybyło do nowo założonéy. Poznała tę dogodność i dobrodzieystwo, światła Publiczność, kiedy 45 synów dotąd w domu edukowanych do téy nowo założonéy Szkoły zapisała: tak więc Jnstytut w mowie będący w pierwszém półroczu 108, w drugiem 115 Uczniów liczył. Lubo zaś wiele młodzieży widzieć się daie w okolicach Nowego Swiata zamieszkałéy, a do odległych Szkół uczęszczaiącéy, spodziewać się iednak należy, że i téy Rodzice poznawszy lepiéy swóy pożytek, nie będą się wahali powierzyć swe drogie zakłady Jnstytutowi, który sobie za nayświętszy obowiązek poczytuie, odpowiadać godnie zaufaniu Rządu i Szanownéy Publiczności.

Aby zaś zacni Rodzice, lub Opiekunowie dokładnieysze powzieli wyobrażenie o téy Szkole Wydziałowéy równie iak o innych, poważamy się przytoczyć z wewnętrznego iéy urządzenia § 1. „ Celem iest Szkoły Wydziałowéy dać poznać młodzieży „ treść wszystkich tych nauk i umieiętności, które wykształcaią „ obyczaie, i oświecaią rozum potrzebnemi i użytecznemi wia„ domościami, zaostrzaią szczegolniéy przemysł i wskazuią mu „ obfite źródło tak prywatnéy znaiomości, iak bogactw kraiowych, „ podaią niezawodne praktyczne sposoby nabycia i pomnożenia „ oboyga. — Cechą więc, zasługą, i zaletą będzie dobrze urządzo„ néy Szkoły Wydziałowéy, kiedy Uczeń każdy który wszystkie „ iéy Klassy chwalebnie ukończy, mieć będzie gruntowne zasady „ wszystkich wiadomości, umieiętności, i talentów, za pomocą „ których rolnictwo, rękodzieła, handel i piękne kunszta do tak „ wysokiego iak widzimy doskonałości stopnia w kraiach obcych „ doszły: a nie przestaiący na edukacyi w téy Szkole ukończo„ néy, zdatnym prócz tego będzie, do łatwego i prędkiego obię„ cia dokładnieyszey teoryi nauk i umieiętności w wyższych Klas„ sach Szkół Woiewódzkich."

Z dopiero przytoczonego artykułu pokazuie się dowodnie, że młodzież chwalebnie bieg nauk w tych Szkołach odbywaiąca, ułatwiony ma wstęp do Klassy 5téy Szkoły Woiewódzkiéy, a nawet podług późnieyszych urządzeń, do Jnstytutu politechnicznego, iak liczne tego przykłady na Uczniach z podobnych Jnstytutów wychodzących stwierdzaią.

Dla tego też Wysoka Magistratura nad wychowaniem czuwaiąca, przekonana o korzyści tego rodzaiu Jnstytutów, zaraz przy otwarciu Szkoły Wydziałowéy przy Nowym Świecie w pismach publicznych, a mianowicie w Kuryerze Warszawskim dnia 4. Października roku przeszłego zapewniła urzędownie szanowną Publiczność, kiedy rzekła: „ W téy Szkole należycie usposobionymi „ Nauczycielami osadzonéy, wszystkie te nauki i w téy saméy roz„ ciągłości wykładane będą, iakie dla Szkół Wydziałowych i czte„ rech Klass pierwszych Szkół Wojewódzkich ogólnym planem

„ Nauk są przepisane. — Uczeń więc po odbyciu z zaletą nauk
„ w téy Szkole dawanych, bez trudności będzie mógł przeyśdź
„ do 5téy Klassy Szkół Woiewódzkich.

Z tego powodu życzyćby należało, aby Szanowna Publiczność bez uprzedzenia za tym lub owym Jnstytutem, zaszczycała swém zaufaniem te szczególniéy Szkoły, które ieszcze liczbą Uczniów nie są przepełnione. Doświadczenie bowiem naucza nas, że przy równéy troskliwości i biegłości Nauczycieli, w tym Jnstytucie odnosi młodzież więcéy korzyści, który mniéy Uczniów liczy, a przeciwnie w zbyt przepełnionych Klassach, nigdy Nauczyciel tyle dokazać nie zdoła.—Z resztą ta sama kwalifikacya Nauczycieli w Szkołach Wydziałowych, co Woiewódzkich, ta sama troskliwość Rządu, i ten sam plan Nauk, mogąż iakiekolwiek uprzedzenie radzić w wyborze Jnstytutów? prawda, że zastosowanie nie których trafnie użytych środków, może nieiaką wyższość iednemu Jnstytutowi nad drugi zjednać, może się wiele przyłożyć do lepszego prowadzenia młodzieży, do wzbudzenia w niéy większéy pilności, i szlachetnéy emulacyi; ale to wszystko, od większéy gorliwości i poświęcenia się zależy. W tym celu Szkoła Wydziałowa przy Nowym Świecie dopełniaiąc z sumienną gorliwością powinności prawem przepisanych, przyięła na siebie dobrowolnie różne obowiązki, dobro powierzonéy iéy Szkoły na celu maiące, takiemi są na przykład książeczki Cenzurami domowemi zwane, w których iak w zwierciedle co dwa tygodnie widział Uczeń, iego Rodzice, lub zastępcy obok postępu z Nauk, wymienione wszelkie piękne przymioty, lub hańbiące przywary. Książeczki te ułatwiaiąc stosunki z Rodzicami, nastręczały bezpośrednio sposobność zaradzenia złemu w samym iego zarodzie.

Przyięty dobrowolnie zaraz przy otwarciu Szkoły dozor nie tylko w zabudowaniu szkolném, ale za Szkołą dzielnie wpływał na obyczaie młodzieży i usilną pilność. Zwiedzali Członkowie Jnstytutu wspólnie z Naczelnikiem Szkoły mieszkania Uczniów, zasięgaiąc szczegółowych wiadomości o ich prowadzeniu się i pilności, ile razy tego wskazywała potrzeba.

Zbawienne także skutki okazały zaprowadzone księgi złota i czarna czyli pochwały i nagany. Młodzież drogą ambicyi kierowana, wiedząc o téy szczególniéyszéy nagrodzie, co kwartał w obliczu wszystkich Uczniów i Nauczycieli ogłaszanéy ciągle i silnie ubiegała się o te zaszczyty: przeciwnie księga nagan przykre wrażaiąc uczucia, strzymała ią od złego. — Nadto co miesiąc celuiący Uczniowie w obyczaiach i naukach przy uroczystości stosownéy w gronie swych towarzyszów pochwalani, i biletami honoru obdarzani; niepilni zaś lub innym wadom ulegli napominani byli.

Częste konferencye z gronem Nauczycieli odbywane, na których wszelkie potrzeżenia dobro młodzieży na celu maiące rotzrząsano i zaradcze środki obmyślano, dużo się także do lepszego młodzieży prowadzenia przyłożyły.

Ważną równie przysługę uczyniły sessye z Nauczycielami domowymi czyli Korrepetytorami Uczniów co miesiąc składane, i życzyćby należało, aby ciż Korrepetytorowie przeięci ważnością swych obowiązków szli w pomoc Nauczycielom publicznym porozumiewaiąc się z niemi, udzielaiąc wszelkich szczegołów względem prowadzenia poruczonéy sobie młodzieży. Mamy wielu Nauczycielów prywatnych czyli Korrepetytorów przy téy nowo założonéy Szkole, którym wzorowéy gorliwości odmówić nie można, życzyć nam tylko pozostaie aby inni wiedząc o powyższém ustanowieniu, chętnie się do niego stosowali, w czém sami wiele ulgi w tak mozolnym zawodzie doznaią.

Ciągła z resztą baczność nad Religiynomoralném postępowaniem młodzieży, nad wyższém coraz ukształceniem umysłu i serca trafnie kierowana, wiele się przyczyniła do tego, że Uczniowie z początku za niepilnych i nieobyczaynych uważani, otrzęśli się z tych wad, i piękne o sobie uczynili nadzieie.

W dalszym ciągu programmatu umieszczamy rozprawę naukową P. *Juliana Bayer* Nauczyciela Matematyki. —

Daruie wszakże Światła Publiczność, że korzystaiąc z stosownéy pory, ośmielamy się złożyć dziękczynienie Jmieniem Jnstytutu Uczniom, którzy zbiory Naukowe darami swymi za zezwoleniem Rodziców pomnożyć raczyli i tak: Uczniowie Klassy III. Balicki Wiktor, Gajewski Jozef, ofiarowali po kilka książek i kilka sztuk pieniążków dawnych srebrnych i miedzianych. Slewiński Ludwik kilkadziesiąt sztuk pieniędzy dawnych papierowych. Eborowicz Antoni, Chrzanowski Stanisław i Leraud Gabryel kilkanaście sztuk muszli. Z IVtéy Klassy Corazzi Aurelian ofiarował kilka sztuk rysunków i Tablicę kolorów. Baranowski Sebastyan kilka sztuk muszli małych. Bodayby podobne ofiary zachęcić zdołały i szanownych Rodziców do składania mniéy im potrzebnych dziełek, mapp i Rysunków lub narzędzi matematycznych, fizycznych na użytek szkoły, bez czego (lubo Rząd troskliwy kilka sztuk znacznieyszych narzędzi i kilkadziesiąt dzieł zakupił) trudno iest nowemu Jnstytutowi zaradzić sobie skutecznie.

O niektórych własnościach liczb, a szczególniéy o prawach ich podzielności, z zastosowaniem tychże do rozkładania liczb na czynniki całkowite pierwsze lub złożone, naznaczenia wszystkich czynników całkowitych czyli dzielników dokładnych tak pierwszych iako i złożonych, wynaydywania naywiększego spólnego dzielnika dwóch, trzech i t: d: lub ilukolwiek liczb, tudzież naymniéyszéy ich wielokrotności, skracania ułamków, i sprowadzenia ich do spólnego naymniéyszego mianownika.

La proprieté, dont jouissent certains nombres d'être exactement divisibles par d'autres, et la recherche des diviseurs d'un nombre forment une des theories les plus importantes de l' Arithmétique.

(*M. Bourdon Elemens d' Arithm: 4e Ed. stron* 177).

WSTĘP

Do Teoryi elementarnéy podzielności liczb zamykaiący w sobie potrzebne opisania i własności liczb szczególniéy co do ich spólnych dzielników, i spólnych wielokrotności.

1. Cokolwiek liczba iedna lub liczb kilka, a czasem nawet i wszystkie zawieraią w sobie coś szczególnego, to wszystko nazy-

wamy ich *własnościami*: i tak *np*. liczba 45 posiada tę własność, że powstaie z dodania liczb 22 i 23; lub z odięcia liczby 6 od liczby 51; lub z rozmnożenia liczb 5 przez liczbę 9; lub z podzielenia liczby 135 przez liczbę 3: te atoli własności bardzo szczególne służą saméy tylko liczbie 45, lecz ieżeli uważać będziemy, że liczba 45 iest dokładnie, t: i: bez pozostałéy iakieyś reszty podzielna przez liczbę 5, to własność ta nie służy saméy tylko liczbie 45, ale posiadaią ią także liczby 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, i t: d: ztąd własność ostatnia więcéy od poprzedzaiących ogólna iest spólna wielu liczbom: są nawet własności liczb bardzo ogólne, wszystkim spólne liczbom, iakiemi są *np*: że *każda liczba iest przez iedność lub siebie samą zupełnie podzielna*: — *że każda liczba rozmnożona przez zero daie na iloczyn zero*: — które to ostatnie dwie własności z saméy Definicyi mnożenia i dzielenia wprost wypływaiące, my tutay za wiadome przypuszczamy.

2. Wyłożenie niektórych własności liczb iest rzeczą pisma tego, do któréy nim przystąpimy, zastanówmy się, iakim sposobem możemy każdą liczbę całkowitą (bo o ostatnich tu tylko mowa będzie) ogólnie wyrazić. W tym célu przypomniymy sobie z Arytmetyki z Nauki o Liczeniu, że każda liczba iest zbiorem czyli summą tylu iedności rzędu pierwszego, drugiego, trzeciego i t: d: ile iedności zamyka w sobie cyfra na pierwszém, drugiém, trzecim i t: d: mieyscu położona; tak że liczba *np*. 6973 iest zbiorem, 3 iedności rzędu pierwszego, 7 iedności rzędu drugiego, 9 iedności rzędu trzeciego, i 6 iedności rzędu czwartego, czyli że liczba

$$6973 = 3\times1 + 7\times10 + 9\times1000 + 6\times10000.$$

Tutay czynniki 1, 10, 100, 1000, pozostaną te same i dla każdéy innéy liczby, która według różnych ważności cyfr z których liczba ta się składa, może bydź rozmaita: ieżeli przeto w ogólności nazwiemy przez a ważność cyfry na mieyscu iedności stoiącéy, przez b ważność cyfry na mieyscu dziesiątków położonéy, przez c ważność cyfry mieysce set zapełniaiącéy, i t: d: to oczywista, że każda liczba całkowita N zamknięta iest według powyższego w wzorze ogólnym następuiącym:

$$N = a. + b.\,10 + c.\,100 + d.\,1000 + \ldots\ldots$$

czyli

$$N = a.\,10^0 + b.\,10 + c.\,10^2 + d.\,10^3 + \ldots\ldots + w.\,10^{m-1} \quad (A)$$

gdy liczba ta z m cyfr się składa.

3. OPISANIA. Jeżeli liczba A mieści się w liczbie B dokładnie tyle razy, ile iedności zamyka w sobie liczba całkowita m; czyli ieżeli liczba A dzieli dokładnie liczbę B, na ten czas mówimy, że liczba A iest *dokładnym dzielnikiem* liczby B, czyli że liczba B iest *podzielną* przez liczbę A; lub że liczba B iest *wielokrotną* liczby A, liczba zaś A iest *częścią wielokrotną* liczby B *np*: liczba 45 iest podzielną przez 5, bo $\frac{45}{5} = 9 =$ *liczbie całkowitéy*; ta sama liczba 45 iest wielokrotną względem liczby 5, liczba zaś 5 iest dokładnym dzielnikiem lub częścią wielokrotną liczby 45. — W ogólności między *liczbą wielokrotną* a iéy *częścią wielokrotną* zachodzi ten związek

$$\frac{B}{A} = m = \textit{liczbie całkowitéy}$$

a ztąd i $B = mA$ gdzie m iest liczbą całkowitą, a gdy

i $\frac{B}{m} = A$ przeto z równań tych widzimy i to; *że iloczyn dwóch liczb całkowitych iest podzielny przez każdego z swych czynników (a).*

Jeżeli zaś liczba A nie dzieli dokładnie liczby B, na ten czas uskuteczniaiąc dzielenie doydziemy do reszty $R < A$, tak że cechuiąc iloraz przez i będzie

$$\frac{B}{A} = i + \frac{R}{A}$$

czyli $B = iA + R \ldots.\ (1).$

Gdy teraz zamiast ilorazu i weźniemy liczbę o iedność większą t: i: $i + 1$, na ten czas liczba $(i + 1).A$ iest większą od B, bo z założenia liczba R iest mnieyszą od A: ieżeli *zatém liczbę tę, o którą liczba* $(i + 1).A$ iest większą od B nazwiemy przez R_1, to podobnie iak wyżéy będzie

(a) Prawda ta ma mieysce i dla iakichkolwiek liczb, ale pod tym względem uważana nie należy do naszego pisma, bo my zatrudniamy się tylko liczbami całkowitemi.

$$B = (i + 1).\ A - R_1 \ldots (2).$$

Odciągnąwszy wyrażenie (1) od ostatniego; i przeniosłszy R, R_1, na stronę pierwszą otrzymamy

$$R + R_1 = A \ldots (3):$$

liczbę tę R_1 nazywać będziemy *Dopełnieniem reszty* R, czyli krocięy *resztą dopełniczą*, bo ona właściwie dopełnia resztę tę do Dzielnika A; i w każdym przypadku znaydziemy R_1, skoro tylko R i A są dane, bo z równania (3) wynika

$$R_1 = A - R\ (4).$$

4. Z opisania dopiero co podanego liczby będącéy dokładnym dzielnikiem pewnéy liczby danéy, wynika, że *dokładny dzielnik pewnéy liczby nie może bydź większy od téyże liczby*, bo liczba mnieysza podzielona przez liczbę większą daię iloraz mnieyszy od iedności, a tém samém ułamkowy, a nie całkowity.

5. Liczby, które nie maią żadnego innego dokładnego dzielnika, prócz iedności lub siebie samych, zowią się *Liczbami pierwszemi bezwzględnemi*, lub króciéy *Liczbami pierwszemi*; wszystkie zaś inne liczby zowią się *Liczbami złożonemi*: i tak liczby 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... są liczbami pierwszemi, liczby zaś 4, 6, 8, 9, 10, 12.... są liczbami złożonemi, ponieważ liczbę 2 nie dzieli żadna liczba dokładnie prócz 1 i 2; toż samo liczbę 3 dzieli tylko 1 i 3;.. i t: d: liczbę zaś 4 nietylko 1 i 4 dokładnie dzieli, ale dzieli ią także zupełnie i liczba 2; liczbę 6; procz 1 i 6 dzielą ieszcze liczby 2 i 3; i t: d:

6. Jeżeli kilka liczb A, B, C, D, ... i t: d: są podzielne przez iednę i też samą liczbę M, na ten czas liczba ta M zowie się *spólnym dzielnikiem* liczb A, B, C, D, ... i tak *np:* liczba 7. iest spólnym dzielnikiem liczb 28, 42, 56.

Jeżeli liczby M, N, P, ... są spólnymi dzidnikami liczb A, B, C, D, ... i nadto $M > N > P > \ldots\ldots$ czyli ieżeli liczba M iest z wszystkich dzielników spólnych naywiększym, to na ten czas liczba M zowie się *naywiększym spólnym dzielnikiem* liczb A, B, C, D,..... i tak n: p: liczby 2, 3, 4, 6, 12, są spólnymi dzielnikami liczb 144, 156, 216, ale gdy nie ma iuż żadnéy liczby większéy nad 12, którąby każdą z liczb tych 144, 156, 216, dokładnie dzieliła, przeto 12 iest ich naywiększym spólnym dzielnikiem.

Uwaga. Ponieważ iedność dzieli dokładnie każdą liczbę, przeto *liczba* 1 *iest spólnym dzielnikiem wszystkich liczb.*

7. Jeżeli dwie lub kilka liczb całkowitych nie mają żadnego innego spólnego dzielnika prócz iedności, na ten czas liczby te zowią się *pierwszémi między sobą*; i tak liczby 7, 15, 35, 36, są liczbami pierwszemi między sobą, bo nie masz żadnéy liczby prócz iedności, którąby każdą z liczb tych razem uważanych dokładnie dzieliła. —

Uwaga. Jeżeli między liczbami danemi znayduie się liczba pierwsza bezwzględna nie będąca pozostałych liczb dokładnym dzielnikiem, na ten czas liczby te razem uważane są pierwszemi między sobą: np: 9, 11, 28, 35, są liczbami pierwszemi między sobą, bo między niemi znayduie się liczba pierwsza 11 niedzieląca dokładnie liczb 9, 28. 35, — *Jeżeli zaś liczba ta pierwsza bezwzględna dzieli pozostałe liczby dokładnie, na ten czas liczby te razem uważane nie są pierwszémi między sobą*, bo liczba ta pierwsza bezwzględna dzieląc dokładnie i siebie samą iest spólnym dzielnikiem liczb danych: i tak np: liczby 11, 55, 77, 121, 363, nie są pierwszemi między sobą, bo liczba pierwsza 11. dzieli pozostałe liczby 55, 77, 121, 363, a tem samem iest spólnym dzielnikiem liczb danych.

Dwie liczby pierwsze bezwzględne są pierwszemi między sobą: a ztąd też

Jeżeli między liczbami danemi znayduią się dwie liczby pierwsze bezwzględne, na ten czas liczby te dane są pierwszemi między sobą.

Wszystko to wypływa wprost z poprzedzaiących Definicyi.

8. Jeżeli liczba V iest podzielną przez liczby A, B, C, D,... na ten czas liczba V zowie się *spólną wielokrotnością* albo inaczéy *spólną dzielną* liczb A, B, C, D, ... np: liczba 24. iest

spólną wielokrotnością liczb 2, 3, 6, bo liczba ta iest przez każdą z liczb 2, 3, 6, dokładnie podzielną:

Jeżeli zaś każda z liczb V, V_1, V_2, V_3, ... iest podzielną przez liczby A, B, C, D, ... a liczba V iest naymnieyszą z wszystkich liczb całkowitych, które są dokładnie przez liczby A, B, C, D, ... podzielne, to na ten czas liczba V zowie się *naymniéyszą spólną wielokrotnością* albo *naymniéyszą spólną dzielną* liczb A, B, C, D, ... i tak np: liczby 60, 120, 180, 240, 300, 360, są spólnemi wielokrotnościami liczb 6, 10, 12, 15, ale ponieważ nie ma żadnéy liczby całkowitéy mnieyszéy od 60, którąby przez liczby dane 6, 10, 12, 15, dokładnie była podzielną, przeto 60 iest ich naymniéyszą spólną wielokrótnością.

TWIERDZENIA PRZYBRANE.

9. TWIERDZENIE 1. *Iloczyn summy ilukolwiek liczb całkowitych* A, B, C, D, *czyli liczby* A+B+C+D+...... *przez liczbę całkowitą* m *równa się summie iloczynów, które wynikaią z pomnożenia z osobna każdéy z liczb* A, B, C, D, ... *przez liczbę* m, *to iest*

$$[A+B+C+D+......]\,m = Am+Bm+Cm+Dm+......$$

bo według Definicyi mnożenia iloczyn zamyka w sobie tyle razy mnożną ile mnożnik ma w sobie iedności, przeto

$$\begin{aligned}[A+B+C+D+......]\,m = {} & (A+B+C+D+......) \\ + {} & (A+B+C+D+......) \\ + {} & (A+B+C+D+......) \\ + {} & .... \text{ i tak } m \text{ razy,}\end{aligned}$$

czyli zbieraiąc osobno A, osobno B, osobno C, ... i t: d: będzie

$$[A+B+C+D+...]\,m = Am+Bm+Cm+Dm+... \quad (1)$$ C: b: d: ok:

10. Nazwawszy liczbę m przez A, a liczby A, B, C, D, ... przez m, n, o, p, q, ... otrzymamy podobnie

$$[m+n+o+p+q....]\,A = mA+nA+oA+pA+qA+.... \quad (2).$$

11. WNIOSKI. Wn. 1. Ponieważ podług równania (1)

$$[A+B]\,m = Am+Bm,$$

więc kładąc A+B=C, a ztąd B=C—A, będzie

$Cm=Am+(C-A).\ m$ czyli $(C-A)m=Cm-Am$.:.... (3)
to iest: *Iloczyn rożnicy dwóch liczb całkowitych C i A przez liczbę trzecią m równa się różnicy dwóch iloczynów, z których ieden iest iloczynem liczby od któréy drugą odeymować mamy t: i: C, przez liczbę tę samą m, a drugi ieśt iloczynem liczby którą odeymować mamy* t: i: *A przez tę samą liczbę trzecią m.*
Jeżeli w równaniu (3) założemy $A=a+b+c+d+\dots\dots\dots$ $C=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots\dots$ otrzymamy równanie

$$\left.\begin{matrix}[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots-a-b-c-d-\dots].\ m=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots)m\\ -(a+b+c+d+\dots)m\end{matrix}\right\}(4)$$

12. Wn: 2. Jeżeli w rownaniu (2) położemy $m=n=o=$ i liczbę tychże nazwiemy przez k otrzymamy

$$(\underbrace{m+m+m+m+\dots+m}_{k}).\ A=\underbrace{m.A+m.A+\dots+m.A}_{k}$$

czyli $(k.\ m.)\ A=K.\ (m\ A).$
t: i: *Iloczyn iest tenże sam czyli liczbę daną A rozmnożemy przez liczbę* m, *a ztąd dopiéro wynikaiący iloczyn rozmnożemy przez liczbę* k, *czyli też wprost liczbę* A *rozmnożemy przez iloczyn dwóch liczb k i m.*

13. Wn: 3. Jeżeli w równ: (1) położemy $A=B=C=D=$ ...... i liczbę tychże ilości A, B, C, ... założemy $=K$, na tenczas otrzymamy.

$$[\underbrace{A+A+A+\dots\dots+A}_{k}].\ m=\underbrace{Am+Am+Am+\dots\dots+Am}_{k}$$

czyli $(k.\ A.)\ m=(Azm\ k.$
t: i: *iloczyn zostaie tenże sam, czyli my liczbę A rozmnożemy przez liczbę k, a ztąd dopiero wynikaiący iloczyn przez liczbę m, czyli też rozmnożemy naprzód liczbę A przez liczbę m, a ztąd dopiero wynikaiący iloczyn przez liczbę k.*

14. W równaniu ostatniém czyniąc $A=1$ będzie

$$k\ m=m\ k$$

to iest: *iloczyn dwóch liczb zostaie tenże sam, w iakimkolwiek porządku liczby te przez siebie mnożemy*: prawda ta ważna stosuie się i do iakiéykolwiek liczby czynników, i tak gdybyśmy mieli dane trzy czynniki k, m, n, natenczas, że

$$kmn = mkn = mnk = nkm = nmk = knm.$$

bo drugi iloczyn równa się pierwszemu według prawdy dopiero co udowodnionéy dla dwóch czynników m i k; iloczyn trzeci mnk równa się drugiemu mkn według n: 13, czwarty trzeciemu podług prawdy udowodnionéy dla dwóch czynników, piąty czwartemu według n: 13. i t: d: a ztąd wszystkie te iloczyny są równe między sobą. Podobnie, maiąc prawdę tę, iuż udowodnioną dla trzech czynników, dowodzimy ią dla czterech. ... i t: d: czynników; krótko mowiąc dla uogólnienia téy prawdy dość iest wskazać, że gdy prawda ta służy dla (a) czynników, na ten czas ma ona mieysce i dla (a+1) czynników, bo ztąd wniesiemy, że ieżeli ta prawda ma mieysce dla dwóch czynników, ma też mieysce i dla trzech, a maiąc mieysce dla trzech ma także mieysce i dla czterech...i t: d: czynników.

Na okazanie tego niech tymi (a+1) czynnikami będą czynniki k, m, n, ... q, r, s, ponieważ prawda ta ma mieysce dla (a) czynników, przeto możemy czynniki k, m, n, ... q, r, co do mieysca swego zmieniać, i to tyle razy ile razy się to da, a ztąd otrzymane iloczyny będą te same; ieżeli więc iloczyny te równe między sobą rozmnożemy przez iednę i te samą liczbę s, na ten czas i ztąd powstające iloczyny będą także równe, a tym sposobem otrzymamy wszystkie iloczyny z (a+1) czynników, których ostatnim czynnikiem, iest liczba s. ieżeli teraz uważać będziemy, że według n; 13.

$$(kmn\ldots\ldots q)\, rs = kmn\ldots\ldots qsr$$

i zamieniać będziemy (a) czynników k, m, n...... q, s, na ten czas otrzymamy iloczyny z (a) czynników równe, które znowu rozmnożone przez iedną i tę samą liczbę r. dadzą nam wszystkie z (a+1) czynników iloczyny równe czynnik r za ostatni maiące: gdy znowu

$$kmn\ldots\ldots qrs = kmn\ldots\ldots rsq = kmn\ldots\ldots rsq,$$

przeto co do ostatniego wyrażenia podobnie iak wyżéy rozumuiąc, otrzymamy iloczyny z (a+1) czynników równe, liczbę q za ostatni czynnik maiące i t: d: a ztąd biorąc za czynnik ostatni coraz dalszy od końca czynnik iloczynu $kmn\ldots\ldots qrs$ z (a+1) czynników, i zmnieniaiąc mieysce a czynników otrzymamy wszystkie iloczyny z $(a+1)$ czynników różne co do mieysca swych czynników, lecz co do ważności równe: Co było właśnie do okazania:

15. TWIERDZENIE 2. *Jloraz Summy ilukolwiek liczb całkowitych* A, B, C, D, E, ... *przez liczbę całkowitą d równa się summie ilorazów, które otrzymuiemy dzieląc osobno każdą z liczb* A, B, C, D, ... *przez liczbę d*; t: i:

$$\frac{A+B+C+D+\ldots\ldots}{d}=\frac{A}{d}+\frac{B}{d}+\frac{C}{d}+\frac{D}{d}+\ldots\ldots:$$

bo ieżeli $\frac{A}{d}=Q$ $\frac{B}{d}=Q_1$ $\frac{C}{d}=Q_2$ $\frac{D}{d}=Q_3\ldots\ldots$

będzie $A=dQ$ $B=dQ_1$ $C=dQ_2$ $D=dQ_3\ldots\ldots:$

dodaiąc strony odpowiadaiące tych równań będzie

$$A+B+C+D+\ldots\ldots=dQ+dQ_1+dQ_2+dQ_3+\ldots\ldots$$

czyli wyłączaiąc po drugiéy stronie spólny czynnik d za nawias

$$A+B+C+D+\ldots\ldots=d\,[Q+Q_1+Q_2+Q_3+\ldots\ldots],$$

a ztąd dzieląc obydwie strony przez d otrzymamy

$$\frac{A+B+C+D+\ldots\ldots}{d}=Q+Q_1+Q_2+Q_3+\ldots\ldots$$

czyli podstawiaiąc ważności na $Q, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots$

$$\frac{A+B+C+D+\ldots}{d}=\frac{A}{d}+\frac{B}{d}+\frac{C}{d}+\frac{D}{d}+\ldots\text{(1)} \quad \text{c:b:d: ok:}$$

Uwaga. Tutay trzeba uważać, że liczby $Q, Q_1, Q_2, \ldots\ldots$ są w ten czas tylko liczbami całkowitemi, gdy każda z liczb A, B, C, D, ... iest osobno podzielna przez d; w innym zaś przypadku liczby te są ułamkowémi, lub mieszanémi, a w ogólności liczbami kształtu $i+\frac{r}{d}$ gdzie $r<d$.

16. WNIOSKI. Wn: 1. Ponieważ według n: 15.

$$\frac{A+B}{d}=\frac{A'}{d}+\frac{B}{d}$$

przeto kładąc $A+B=C$, a zatem $B=C-A$ otrzymamy,

$$\frac{C}{d}=\frac{A}{d}+\frac{C-A}{d}$$

czyli
$$\frac{C-A}{d}=\frac{C}{d}-\frac{A}{d}$$

t: i: *iloraz rożnicy dwóch liczb* C *i* A *przez liczbę trzecią d równa się rożnicy dwóch ilorazów, z których ieden wynika z podzielenia liczby* C *od któréy mamy odeymować przez tę liczbę trzecią d, a drugi z podzielenia liczby* A, *którą odciągać mamy przez tę samę liczbę d.*

Gdy $C=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots$

a $A=a+b+c+d+\ldots\ldots$

na ten czas mamy

$$\frac{[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ a-b-c-d-\ldots]}{d}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots}{d}\\ -\dfrac{a+b+c+d+\ldots}{d}\end{array}\right\}$$

17. Wn: 2. Jeżeli w rownaniu (1) n: 15 położemy $A=B=C=D=\ldots\ldots$ a liczbę tych ilości nazwiemy przez k, na ten czas otrzymamy

$$\frac{A+A+A+\ldots\ldots+A_k}{d}=\frac{A}{d}+\frac{A}{d}+\frac{A}{d}+\ldots\ldots+\frac{A_k}{d}$$

czyli
$$\frac{kA}{d}=k\,\frac{A}{d}$$

t: i: *iloraz iest tenże sam czyli my liczbę daną* A, *rozmnożemy przez liczbę k, a ztąd wynikaiący iloczyn podzielemy* *przez liczbę d, czyli też podzielemy wprost liczbę A przez liczbę d, a ztąd wynikaiący iloraz rozmnożemy przez liczbę k. (b)*

18. TWIERDZENIA WZGLĘDEM SPÓLNYCH DZIELNIKÓW i SPÓLNYCH WIELOKROTNOŚCI, CZYNNIKÓW PEWNEY LICZBY; JEY DOKŁADNYCH DZIELNIKÓW i t: d:

Ponieważ każda liczba złożona nie tylko przez iedność i przez siebie samą iest podzielna, ale dzielić ią także musi i inna liczba całkowita pośrednia między iednością i nią samą, bo inaczéy nie byłaby złożoną, ale tylko liczbą pierwszą, przeto łatwo spostrzeć uważaiąc równania pierwsze w n: 3, że zawsze można dobrać dwie liczby takie któreby przez siebie rozmnożone wydały liczbę daną; z któremi to liczbami ieżeli z nich znowu iedna, lub obydwie są złożonemi, podobnie daléy postępuiąc doszlibyśmy do tego, że dla każdéy liczby złożonéy można wynaleść liczb kilka, a naymniéy iuż dwie różne od iedności i od niéy saméy, których iloczyn równa się liczbie danéy: zadanie trudniące się naznaczeniem tychże liczb, które zowią się *czynnikami* liczby danéy, zowie się *rozłożeniem liczby danéy na czynniki*; a wszczególności gdy w zadaniu tém warunek ten ieszcze założemy, ażeby czynniki były liczbami pierwszemi bezwzględnęmi, zadanie to zowie się *rozłożeniem liczby danéy na Jéy czynniki pierwsze*, które że dla każdéy liczby złożonéy ma mieysce przekonamy się udowodniwszy następuiącą prawdę.

(*b*) Wszystkie te prawdy tutay od nro 9 do 12 dla liczb całkowitych udowodnione maią także mieysce i dla liczb iakichkolwiek, ale pod tym względem uważane nie należą do naszego pisma.

19. TWIERDZENIE I. *Każda liczba złożona* (dana, a zatém skończona) *da się rozłożyć na same czynniki pierwsze większe od iedności.*

Niech będzie liczba A złożona, rozłożoną na czynniki iakie kolwiek M, N, P, ... czyli niech będzie

$$A = MNP \ldots\ldots$$

na ten czas, ieżeli czynniki te są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, to twierdzenie założone iest iuż udowodnioném: ieżeli, zaś czynniki M, N, P, ... i t: d: nie są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, a przynaymniéy nie wszystkie z nich, to na ten czas możemy pozostałe czynniki złożone daléy na czynniki rozłożyć, tak że

$$M = m\,m'\,m'' \ldots\ldots$$
$$N = n\,n'\,n'' \ldots\ldots$$
$$P = p\,p'\,p'' \ldots\ldots$$
i t: d:

a ztąd oczywista że

$$A = mm'm'' \ldots\ldots nn'n'' \ldots\ldots pp'.p'' \ldots\ldots$$

które to ilości $m, m,' m,'' \ldots\ldots n, n,' n,'' \ldots\ldots p, p,' p,'' \ldots\ldots$ ieżeli są liczbami pierwszemi dowodzą nam założonego twierdzenia, ieżeli zaś nie to trzeba znowu daléy czynniki złożone rozebrać, a to dotąd dopóty nie przyidziemy do samych czynników pierwszych, co koniecznie nastąpić musi, bo inaczéy liczba A z założenia skończona miałaby nieskończenie wiele czynników większych od iedności, a tém samém byłaby nieskończenie wielką (c), co się sprzeciwia założeniu; *każda zatém liczba złożona* i t: d:.... c: b: d: ok:

(c) Rozumiemy przez liczbę nieskończenie wielką liczbę taką, któréy wartość iest większa od wszelkiéy liczby naznaczonéy, a tém samém większa od każdéy liczby danéy.

Uwaga. Ponieważ ieden i tenże sam czynnik może dwa, trzy i t. d. razy wchodzić w skład liczby złożoney, ztąd każda *liczba złożona* na *czynniki pierwsze* rozebrana iest tego kształtu

$$A = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta} \ldots$$

gdzie a, b, c, d.... są *liczbami pierwszemi bezwzględnemi*, a $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ ... *są liczbami iakiemikolwiek całkowitémi.* —

20. TWIERDZENIE 2 *Jeżeli liczba m iest spólnym dzielnikiem dwóch liczb* A, *i* B, *na ten czas liczba ta m dzieli dokładnie tak summę* A + B *iako i różnicę* A — B:

bo według *n*: 15. mamy $\frac{A}{m} + \frac{B}{m} = \frac{A+B}{m}$:

a według *n*: 16. $\frac{A}{m} - \frac{A}{m} = \frac{A-B}{m}$:

ponieważ w wyrażeniach tych liczby A: *m* i B: *m* są z założenia liczbami całkowitemi, przeto też i (A + B): *m* tudzież (A — B): *m* muszą bydź także liczbami całkowitemi inaczéy bowiem byłaby liczba całkowita równa liczbie rzeczywiście ułamkowéy, co bydź nie może, ztąd przeto tak A + B iako i A — B według *n*: 3 iest dokładnie podzielném przez liczbę *m*. c: b: d: ok.

21. WNIOSEK. Dla téyże saméy przyczyny, *ieżeli liczba m iest spólnym dzielnikiem ilukolwiek bądź liczb* A, B, C, D, *na ten czas liczba ta m iest także dokładnym dzielnikiem i summy liczb tych, to iest liczby* A + B + C + D + ...

bo gdy według *n*: 15.

$$\frac{A}{m} + \frac{B}{m} + \frac{C}{m} + \frac{D}{m} + \ldots = \frac{A + B + C + D + \ldots\ldots}{m}$$

a liczby A: *m*, B: *m*, C: *m*, D: *m*, ... są z założenia całkowite będzie też i liczba (A + B + C + D + ...): *m* liczbą całkowitą, a tém samém podzielną przez liczb *m*; c: b: d: ok:

22. TWIERDZENIE 3. *Jeżeli summa dwóch liczb* A *i* B *to iest liczba* A + B, *i iedna z nich* np: *liczba* B *iest podzielna przez liczbę m, na ten czas i druga liczba* t: i: *liczba* A *iest także podzielną przez tę samą liczbę m*: bo skoro w wyrażeniu

$$\frac{A}{m} + \frac{B}{m} = \frac{A+B}{m}$$

liczby $(A + B) : m$ i $B : m$ są liczbami całkowitemi z założenia, to i liczba $A : m$ musi bydź liczbą całkowitą, bo gdyby liczba ta nie była całkowitą ale ułamkową, na ten czas liczba $(A + B) : m$ byłaby liczbą ułamkową iako summa liczby całkowitéy i liczby łamanéy, a że liczba ta $(A + B) : m$ nie może bydź ułamkową, ponieważ z założenia iest całkowitą, przeto też i liczba $A : m$ nie może bydź ułamkową, ale bydź koniecznie musi liczbą całkowitą c: b: d: ok:

23. Podobnie rozumuiąc co do wzoru

$$\frac{C - A}{m} = \frac{C}{m} - \frac{A}{m}$$

przekonamy się, że; *ieżeli z trzech liczb* C, A, *i* C — A, *z których dwie* C *i* A *są do odeymowania dane, a trzecia* C — A *iest wypadkiem z odięcia tychże, dwie które kolwiek z osobna uważane są dokładnie podzielne przez liczbę całkowitą m, na ten czas i pozostała trzecia iest także przez liczbę tę m podzielną.*

24. TWIERDZENIE 4. *Jeżeli liczba m będąc spólnym dzielnikiem ilukolwiek liczb* A, B C, D, ... *nie dzieli dokładnie liczby* M, *na ten czas liczba ta m nie dzieli także dokładnie i summy* A + B + C + D + ... + M: albowiem według n: 16 mamy

$$\frac{A + B + C + D + \ldots + M}{m} = \frac{A}{m} + \frac{B}{m} + \frac{C}{m} + \ldots + \frac{M}{m}$$

a że z założenia liczby $A : m$, $B : m$, $C : m$, są liczbami całkowitemi, a liczba $M: m$ iest ułamkową, przeto strona druga iest liczbą ułamkową, a tém samém i pierwsza musi bydź także ułamkową; a ztąd według n: 3 summa $A + B + C + D + \ldots + M$ nie iest podzielną przez liczbę m: c: b: d: ok:

25. Podobnie rozumuiąc przekonamy się: że *ieżeli ieden z trzech wyrazów w działaniu odeymowania zachodzących iest podzielny przez liczbę m, ale wyraz drugi nie iest podzielny przez tę samą liczbę m, na ten czas liczba ta nie dzieli także dokładnie i pozostały trzeci wyraz.*—

26. TWIERDZENIE 4. *Jeżeli liczba* A *iest podzielna przez liczbę m, na ten czas też i każda wielokrotność liczby* A, *t: i: liczba n* A, *gdzie n iest liczbą całkowitą, iest także podzielną przez liczbę m*:
bo ieżeli $A: m = q =$ *liczbie całkow*: będzie też na mocy tego pewnika, że dwie ilości równe rozmnożone przez iedną i tę samą liczbę trzecią daią iloczyny równe

$$n.\frac{A}{m} = nq,$$

czyli na mocy tego, że według n: 17

$$n\frac{A}{m} = \frac{nA}{m}$$

i $$\frac{nA}{m} = nq = \text{liczbie całkowitéy co b: do ok:}$$

27. TWIERDZENIE 6. *Jeżeli liczba m iest spólnym dzielnikiem Dzielnéy* A *i Dzielnika* B, *na ten czas liczba ta m iest także dokładnym dzielnikiem i reszty* R, *do któréy dochodzimy dzieląc liczbę* A *przez liczbę* B:
ponieważ według n: 3. $A = Bi + R$

przeto dzieląc całe to równanie przez m będzie

$$\frac{A}{m}=\frac{Bi}{m}+\frac{R}{m}$$

w wyrażeniu tém $A : m$, iest liczbą całkowitą z założenia, $Bi : m$ iest także liczbą całkowitą, bo gdy B z założenia iest podzielném przez m, przeto według *n*: 26 i wielokrotność Bi iest podzielną przez m, 'a z tąd $Bi : m =$ liczbie całkowitéy; a gdy $A : m$ i $Bi : m$ są liczbami całkowitemi musi też według n: 22 i $R : m$ bydź liczbą całkowitą, czyli musi reszta R bydź podzielną przez liczbę m, c: b: d: ok:

28. WNIOSEK. Z twierdzenia tego wynika, że *ieżeli dwie liczby* A *i* B *maią spólnego dzielnika, to ten nie może bydź większy od reszty* R, *z podzielenia* A *przez* B *w założeniu że* $A > B$, *wynikaiącéy*: bo spólny dzielnik liczb A i B według twierdzenia dzielić dokładnie powinien i resztę R, a ztąd nie może bydź większy od niéy, bo według n: 4 liczba większa nie może bydź dokładnym dzielnikiem liczby mniéyszéy.

Podobnie rozumuiąc iak w n: 27 przekonamy się: że *ieżeli liczba m dzieli dokładnie dwie którekolwiek z tych trzech ilości, Dzielnéy, Dzielnika, i reszty, na ten czas liczba ta m iest dokładnym dzielnikięm i pozostałéy trzeciéy — a ztąd także ieżeli reszta R dzieli dokładnie dzielnika* B, *na ten czas dzieląc także i siebie samą, dzielić koniecznie musi i Dzielną* A.

30. TWIERDZENIE 7. *Jeżeli liczba m dzieli dokładnie iloczyn dwóch liczb* A *i* B *czyli liczbę* $A \times B$, *a iest liczbą pierwszę względem* A, *na ten czas liczba ta m dzielić dokładnie musi czynnika drugiego t: i: liczbę* B. Przypuśćmy bowiem że $A > m$, na ten czas gdy A nie iest podzielném przez m, mamy według *n*: 3

$$A = mi + R \quad \text{gdzie } R < m:$$

mnożąc całe to wyrażenie przez B, a dzieląc przez m otrzymamy

$$\frac{A \times B}{m} = Bi + \frac{R.B}{m}$$

z równania tego wynika, że, gdy $AB:m$ z założenia iest liczbą całkowitą, i $Bi + (RB):m$ musi bydź liczbą całkowitą; a że Bi iest iuż liczbą całkowitą, więc i liczba $(RB):m$ musi bydź także liczbą całkowitą, czyli RB musi bydź podzielném przez liczbę m; bo inaczéy byłaby liczba całkowita równa liczbie ułamkowéy, co bydź nie może. Jeżeli teraz m podzielémy przez R, na ten czas, gdy m nie iest podzielném przez R, otrzymamy w ogólności

$$m = Ri + R_2 \quad \text{gdzie } R_2 < R$$

a mnożąc całe to wyrażenie przez B, i dzieląc przez m otrzymamy

$$\frac{mB}{m} = \frac{RBi_1}{m} + \frac{R_2 B}{m}$$

ponieważ w równaniu tém liczby $mB:m = B$, $i(RBi_1):m = [(RB)i_1]:m$ według n: 26, są liczbami całkowitemi, przeto też i $R_2B:m$ musi bydź liczbą całkowitą, czyli R_2B musi bydź podzielném przez m.

Jeżeli do iloczynu R_2B zastosuiemy to samo rozumowanie, któregośmy użyli do iloczynu RB, na tenczas przekonamy się, że podzielność iloczynu AB przez liczbę m prowadzi nas do podzielności iloczynów $RB, R_2B, R_3B, R_4B, \ldots$; a gdy $R_1 > R_2 > R_3 > R_4 \ldots$, a $R_1, R_2, R_3, \ldots$ są liczbami całkowitemi, przeto koniecznie doydziemy do pewnego $R_n = 1$, a ztąd wniesiemy, że i $1 \times B$ czyli samo B iest podzielném przez m c: b: d: oka:

To samo dowodzenie ma także mieysce, gdy $A > m$, z tą tylko różnicą, iż na ten czas zaczynamy od podzielenia liczby m przez liczbę A, czyli od równania $m = Ai + R$ i dzielémy daléy A przez R, R_1 przez $R_2 \ldots$ i t: d: iak wyżéy. —

Uwaga. W tém twierdzeniu trzeba pamiętać, ażeby liczby A i *m*, były liczbami pierwszemi między sobą, bo gdyby warunek ten nie był zachowany, twierdzenie to byłoby fałszywém; albowiem mogą bydź dwie liczby takie, których iloczyn iest podzielny przez liczbę trzecią, chociaż żaden z czynników nie iest podzielny przez liczbę tę trzecią *np:* liczby 6 i 15 rozmnożone przez siebie daią na iloczyn liczbę 90 podzielną przez liczbę 10, chociaż żaden z czynników 6 i 15 nie iest podzielny przez liczbę 10. —

31. TWIERDZENIE 8. *Jeżeli liczba pierwsza bezwzględna m dzieli dokładnie iloczyn dwóch liczb* A *i* B, *czyli liczbę* AB, *na ten czas liczba ta m dzieli koniecznie iednego z czynników* A *i* B: bo ieżeli liczba pierwsza bezwzględna *m* nie dzieli liczby np: B, na ten czas dwie te liczby według *n:* 7 są liczbami pierwszemi między sobą; a ztąd liczba *m* dzieląc z założenia iloczyn AB, i będąc pierwszą względem czynnika B, dzielić koniecznie musi według n: 30 czynnika A: c: b: d: ok:

32. WNIOSKI: Wn: 1 *Jeżeli liczba pierwsza bezwzględna m iest dokładnym dzielnikiem liczby* A^2, *a w ogólności liczby* A^n, *gdzie n iest liczbą całkowitą, na ten czas liczba ta m dzieli także dokładnie i liczbę* A: ponieważ $A^2 = A \times A$, a A^2 z założenia iest podzielném przez *m*, przeto według *n:* 31 liczba A musi bydź także podzielną przez *m*: ponieważ $A^3 = A^2 \times A$, a A^3 z założenia iest podzielném przez *m*, przeto albo A albo A^2 według *n:* 31 musi bydź także podzielném przez *m*, a że podzielność liczby A^2 przez liczbę *m*, zależy od podzielności liczby A przez tę liczbę *m*, przeto gdy A^3 iest podzielném przez *m*, i A musi bydź podzielném przez *m:* rozumowanie to stosuiąc do A^4, A^5, ... przekonamy się że *jeżeli liczba* .... i t: d:, c: b: d: ok.

33. Wn: 2.— *Jeżeli liczba całkowita iakakolwiek* M *iest pierwszą względem każdego z czynników* A *i* B, *na ten czas liczba ta iest także pierwszą względem iloczynu* AB: albowiem, gdyby była iaka liczba pierwsza bezwzględna m większa od iedności któraby dzieliła tak M iako i A B, na ten czas liczba ta m musiałaby według n: 31 dokładnie dzielić albo liczbę A, albo liczbę B; a ztąd dzielićby musiała liczby M i A, lub liczby M i B co bydź nie może, bo liczby te są z założenia pierwszemi między sobą, a zatém i to bydź nie może, ażeby liczba M dzieliła iłoczyn A B: c: b: d. ok:

Ztąd także wynika: 1 *Jeżeli każda z liczb a, b, c, d, ... iest pierwszą względem liczb* A, B, C, D, *na ten czas i iloczyny abcd.... i* A, B, C, D. . . . *są pierwszemi między sobą:* 2re *Jeżeli dwie liczby a, b, są pierwszemi między sobą, na ten czas i potęgi z tych liczb są pierwszemi między sobą,*

34. Wn: 3. *Jeżeli liczba* A *iest iloczynem czynników a, b, c, d.... na ten czas liczba* A *zamyka konieczniе te same tylko czynniki pierwsze, które wchodzą w skład liczb a, b, c, d, . . .* : bo gdyby liczba A zamykała inny iaki czynnik pierwszy *np*: m, na ten czas liczba ta A $= abcd$ . . . byłaby wielokrotną liczby m, a tém samém musiałaby bydź podzielną przez tę liczbę m, to iest musiałoby bydź

$$\frac{A}{m} = \frac{abcd....}{m} =$$ liczbie całkowitéy, co bydź nie może, bo liczba m nie dzieląc żadnego z czynników $a, b, c, d, \ldots$ nie może podzielić i iloczynu $abcd \ldots$, a zatém i to bydź nie może, ażeby A było podzielném przez m, czyli ażeby liczba m była czynnikiem liczby A: cośmy powiedzieli o liczbie m, to samo rozumie się i o każdéy innéy liczbie pierwszéy rożnéy od czynników pierwszych liczb a, $b, c, d, \ldots$, ztąd każda liczba, któréy czynnikami są liczby $a, b, c, d, \ldots$ nie może zamykać w sobie innych czynników pierwszych nad te, które wchodzą w skład tychże czynników $a, b, c, d, \ldots$

4*

35. Wn. 4. *Liczba* A, *w którą wchodzi czynnik pierwszy* a *wyniesiony do potęgi* α *nie może bydź podzielną przez tę samą liczbę pierwszą wyniesioną do potęgi* m *wyższéy od* α, bo gdyby liczba $A = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots\ldots$ była podzielną przez a^m w założeniu że $m > \alpha$, na ten czas kładąc: $m = \alpha + x$ byłoby

$$\frac{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots}{a^m} = \frac{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}}{a^{\alpha+x}} = \frac{b^{\beta}c^{\gamma}\ldots\ldots}{a^x} =$$ liczbie całkowitéy, co według n: 34 bydź nie może, a ztąd i to bydź nie może, ażeby liczba A, w którą wchodzi czynnik pierwszy a wyniesiony do potęgi α była podzielną przez tę samą liczbę pierwszą wyniesioną do potęgi m wyższéy od α c: b: d: ok:

36. Z dwóch poprzedzaiących wniosków i Twierdzenia 1go wynika, że *każda liczba złożona* A *nie może bydź rozłożoną na czynniki pierwsze, iak tylko iednym i tymże samym sposobem.*

37. TWIERDZENIE 9. *Jeżeli liczba* A *iest podzielna przez liczbę złożoną* B, *na ten czas każdy czynnik pierwszy liczby* B *dzieli także dokładnie i liczbę* A: bo ieżeli $B = m \times C$, gdzie m iest liczbą pierwszą, na ten czas liczba ta B według n: 3. iest podzielną przez m i przez C; a gdy A iest podzielnem z założenia przez B, a tém samém iest wielokrotnem względem B, przeto też liczba A według n: 26 iest podzielną przez liczbę m; c: b: do ok:

38. TWIERDZENIE 10. *Jeżeli liczba* A *iest podzielna przez każdą z liczb pierwszych między sobą* $a, b, c, d, \ldots\ldots$ *na ten czas iest też podzielną* i *przez ich iloczyny* $ab, ac, ad, \ldots$ $bc, bd, \ldots abc, abd, acd \ldots$ bo gdy liczba a dzieli dokładnie liczbę A, przeto $A = aq$, gdzie q iest liczbą całkowitą; a że i liczba b dzieli także liczbę $A = aq$, ale nie dzieli liczby a, więc

według n: 30 dzielić musi czynnika q, a ztąd $q=bq'$, gdzie q' iest zatém $A=aq=abq'$ czyli $A: ab=q'$=liczbie całkowitéy, czyli liczba A iest podzielna przez iloczyn ab: podobne rozumowanie stosuiąc do liczb c, d;.... przekonamy się, że *ieżeli liczba A iest*.... i t: d: c b: d: ok:

39. WNIOSEK. Jeżeli założemy, że liczby a, b, c, d,..... są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, a tém samém pierwszemi między sobą, na ten czas z twierdzenia tego wypływa wprost i następuiące: *Jeżeli liczba A iest podzielna przez liczby pierwsze bezwzględne* a, b, c, d, ... *na ten czas iest też podzielna i przez różne iloczyny z tychże; a ieżeli w skład liczby A wchodzą liczby te pierwsze podniesione odpowiednie do potęg* α, β, γ, δ, ... *tak że* $A=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$.... *na ten czas liczba ta iest także podzielna przez* a, a^2, a^3, a^4, ... a^α, *to samo co do* b, *co do* c,.... *i t: d:; iest tak że podzielną przez* ab, ab^2, ab^3, ... a^2b, a^3b, ... *i t: d:* bo gdy a, b, c, d,.... są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, a tem samem pierwszemi między sobą, będą też i według n: 33 potęgi z nich i różne ich iloczyny pierwszemi między sobą, a ztąd też będzie i liczba A według 38. przez te potęgi różne liczby a od a do a^α, liczby b od b do b^β,...... i przez różne te wszystkie iloczyny ab, a^2b, ... ac, a^2c, ... bc b^2c b^3c.... i t: d: podzielna.

40. TWIERDZENIE 11. *Jeżeli liczba A między swymi czynnikami pierwszemi zamyka w sobie wszystkie czynniki pierwsze, które wchodzą w skład liczby B, i nadto nie w niższych odpowiednie potęgach od tych w iakich czynniki te pierwsze wchodzą wskład liczby B, na ten czas liczba A iest dokładnie podzielną przez liczbę B*: boieżeli $A=a^m b^n c^p d^q e$, a $B=a^r c^s d^t e$, gdzie a, b. c, d, e, są liczbami pierwszemi,

a $m>r$, $p>s$, $q>t$, ... na ten czas kładąc

$$m=r+x,\ p=s+y,\ q=t+z, \ldots\ldots$$

mamy $A=a^m b^n c^p d^q e = a^{r+x} b^{s+y} c^{s+t} d^{b+z} e$

$$=(a^r c^s d^t e)\ a^x b^n c^y d^z = B\, a^x b^n c^y d^z :$$

a ztąd $\frac{A}{B} = a^x b^n c^y d^z =$ liczbie całkowitéy c: b: d: ok:

Uwaga Twierdzenie to ma ieszcze mieysce gdy

$$m=p \quad p=s \quad q=t$$

bo na ten czas ilości x, y, z, są równe zero, a liczba A podzielona przez B wydaie na iloraz liczbę całkowitę b^n, a tem samém liczba ta A iest podzielną przez B.

41. WNIOSKI. Wn: 1. *Jeżeli tylko ieden z czynników pierwszych liczby* B *nie znayduie się między czynnikami pierwszymi liczby* A, *na ten czas i liczba* B *nie iest dokładnym dzielnikiem liczby* A: bo daymy na to że $A=a^m b^n c^p d^q$ a $B=a^r c^s d^t e$, gdzie a, b, c, d, e.... są liczbami pierwszemi, w ten czas liczba e dzieli dokładnie liczbę B; ieżeliby więc liczba B dzieliła dokładnie liczbę A, na ten czas według n: 37 musiałaby liczba A była podzielną przez liczbę e, co bydź nie może, bo liczba A nie zamyka w sobie czynnika pierwszego e, a ztąd też i to bydź nie może, ażeby liczba B dzieliła dokładnie liczbę A, co było właśnie do okazania.

42. Wn: 2. *Jeżeli liczba* A *zamyka w sobie te same czynniki pierwsze co i liczba* B, *ale ieden przynaymniéy z nich iest do niższéy potęgi podniesiony w liczbie* A, *aniżeli w liczbie* B: *na ten czas liczba ta* A *nie może bydź podzielną przez liczbę* B, bo daymy na to że $A=a^m b^n c^p d^q e$ a $B=a^r c^s d^t$ gdzie ilości a, b, c, d, e, są liczbami pierwszemi, i nadto $s>p$, na ten czas liczba c^s

iest według n: 39 dokładnym dzielnikiem liczby B, która gdyby była dokładnym dzielnikiem liczby A, wtedy i liczba A musiałaby bydź dokładnie podzielną przez c^s, co według n: 35 bydź nie może, bo liczba $s>p$ z założenia, a zatém i to bydź nie może, ażeby liczba B dzieliła dokładnie liczbę A.

43. TWIERDZENIE 12. *Jeżeli liczby* A, B, C, D, ... i t: d: *nie są dokładnie podzielne przez pewną liczbę m, ale wykonywaiąc dzielenia prowadzą do reszt* R, R_1, R_2, ... *takich, że summa ich iest podzielna przez m, na ten czas liczba ta m dzieli także dokładnie i summę liczb* A, B, C, D, ... bo ponieważ liczby A, B, C, D, ... sąz założenia pierwszemi względem liczby m przeto wykonywaiąc naznaczone tutay dzielenia otrzymamy

$$\frac{A}{m}=i+\frac{R}{m},\ \frac{B}{m}=i_1+\frac{R_1}{m},\ \frac{C}{m}=i_2+\frac{R_2}{m},\ \frac{D}{m}=i_3+\frac{R_3}{m}\ .....$$

a ztąd $\frac{A}{m}+\frac{B}{m}+\frac{C}{m}+\frac{D}{m}+...=i+i_1+i_2+i_3+...+\frac{R+R_1+R_2+R_3+}{m}$

czyli według n: 15

$$\frac{A+B+C+D+.....}{m}=i+i_1+i_2+i_3+...+\frac{R+R_1+R_2+R_3+...}{m}$$

w którém ostatniém wyrażeniu widzimy, że podzielność summy liczb A, B, C, D, ... i t: d: przez liczbę m zależy od podzielności summy reszt R, R_1, R_2, R_3, ... c: b: do ok:

Uwaga. W przypuszczeniu, że niektóre z liczb R, R_1 ... są równe zero, z twierdzenia tego wynika wprost i następuiące: *Jeżeli z liczb* A, B, C, D, ... *niektóre są podzielne przez liczbę m, a inne znowu nie są podzielne przez tę liczbę m, na ten czas Summa wszystkich liczb tych* A, B, C, D, ... *iest podzielną przez liczbę m, ieżeli summa reszt* R, R_1, ... *do których nas liczby niepodzielne przez liczbę m prowadzą iest przez tę liczbę m podzielna.*

44. TWIERDZENIE 13. *Jeżeli dwie liczby* A *i* B *niepodzielne przez liczbę m prowadzą do iednéy i téy saméy reszty* R, *na ten czas różnica dwóch tych liczb iest podzielna przez liczbę m*: bo wykonywaiąc dzielenie, otrzymamy

$$\frac{A}{m} = i + \frac{R}{m}$$

$$\frac{B}{m} = i_1 + \frac{R}{m}$$

a ztąd
$$\frac{A}{m} - \frac{B}{m} = i - i_1$$

czyli według n: 15 $\frac{A-B}{m} = i - i_1 =$ *liczb: całkowitéy* iako różnica dwóch liczb całkowitych, czyli według n: 3 różnica A — B iest podzielną przez liczbę m; c: b: d: ok:

45. TWIERDZENIE 14. *Jeżeli dwie liczby* A *i* B *niepodzielne przez liczbę m prowadzą do reszty* R *i* R_1 *takich, że ich iloczyn to iest liczba* RR_1 *iest podzielna przez m na ten czas i iloczyn dwóch liczb danych* t: i: *liczba* AB *iest podzielna przez liczbę m*: albowiem gdy A *i* B są pierwszemi z założenia względem liczby m przeto wykonywaiąc naznaczone tutay dzielnia, otrzymamy

$$\frac{A}{m} = i + \frac{R}{m} \quad \text{czyli} \quad A = im + R$$

$$\frac{A}{m} = i_1 + \frac{R_1}{m} \quad , \quad B = i_1 m + R_1$$

a ztąd

$$AB = ii_1\, m \times m + i_1 mR + imR_1 + RR_1$$

czyli
$$AB = m\,[ii_1 m + i_1 R + iR_1] + RR_1$$

a zatém

$$\frac{AB}{m} = ii_1 m + i_1 R + iR_1 + \frac{RR_1}{m}:$$

w ostatniem wyrażeniu widzimy, że podzielność iloczynu AB przez liczbę m zawisła od podzielności iloczynu reszty RR_{1}, przez tę liczbę m c: b: d: ok:

46. TWIERDZENIE 15. *Jeżeli liczba* A *iest podzielną przez liczbę* B, *a liczba* B *iest znowu podzielną przez liczbę* C, *na ten czas i liczba* C *dzieli dokładnie liczbę* A: bo gdy z założenia $(A:B)=m$, $(B:C)=n$, czyli $A=Bm$, $B=Cn$ gdzie m i n są liczbami całkowitemi, przeto też $A=Bm=Cnm$ a ztąd

$\frac{A}{C}=nm=$ *liczbie całkowitéy*, bo m i n są całkowitemi, czyli że liczba A iest podzielna przez liczbę C; c: b: do ok:

47. WNIOSKI. Wn: I. Jeżeli $m.n=n.m.$ według n: 14, położemy równe p, a ztąd $A=p.C$, na ten czas ponieważ liczba ta p, iest podzielna tak przez m iako i przez n, widzimy: *że liczba* p *która wskazuie ile razy liczba* A *zamyka w sobie dokładnie liczbę* C, *iest podzielną tak przez liczbę* m *oznaczaiącą wielokrotność liczby* A *względem* B, *iako też i przez liczbę* n *oznaczaiącą wielokrotność liczby* B *względem* C. —

48. Wn: 2. — *Jeżeli* A *będąc spólnym dzielnikiem liczb* C, D, E,... *iest podzielną przez liczbę* B, *na ten czas*: 1° *liczba ta* B *iest także spólnym dzielnikiem liczb* C, D, E... — 2° *ilorazy* (C:B) (D:B) (E:B),... (które są liczbami całkowitemi) *są podzielne przez iloraz także całkowity* (A:B) i nakoniec 3° *ieżeli liczba* A *nie równa się liczbie* B, *ale iest od niéy większą czyli* $(A:B)>1$, *na ten czas liczby* (C:B), (D:B), (E:B),... *nie są liczbami pierwszemi między sobą*: bo gdy z założenia

$\frac{C}{A} = m$, $\frac{D}{A} = n$, $\frac{E}{A} = p$ ...... tudzież $\frac{A}{B} = k$ czyli

$C = Am$, $D = An$, $E = Ap$ ...... a $A = Bk$

przeto też

$C = Bkm$, $D = Bkn$, $E = Bkp$ .... a ztąd

$\frac{C}{B} = km$, $\frac{D}{B} = kn$, $\frac{E}{B} = kp$ ..... = *liczbom całkowitym* czyli że liczba B iest 1° *spólnym dzielnikiem liczb* C, D, E.....
2re *że ilorazy* (C:B), (B:D), (E:B), *maiąc czynnika spólnego* $k = (A:B)$ *są tém samem przez tegoż czynnika podzielne,* a po 3^{cio} gdy k nie iest równym iedności, ale większem od iedności, na ten czas *ilorazy* C:B, D:B, E:B, maiąc dzielnika spólnego $k = A:B$ *nie są liczbami pierwszemi między sobą.*

49. Wn: 3. *Jeżeli liczba* A *iest wielokrotną względem liczby* B, *a liczba* B *iest spólną wielokrotnością liczb* C, D, E,... *na ten czas i liczba* A *iest spólną wielokrotnością liczb* C, D, E,.... bo ieżeli $A = mB$, a $B = nC = pD = qE$ ..... gdzie m, n, p, q, są liczbami całkowitemi, na ten czas

$$A = mnC = mpD = mqE = \ldots \quad \text{czyli}$$

$$\frac{A}{C} = mn, \quad \frac{A}{D} = mp, \quad \frac{A}{E} = mq \ldots\ldots = \text{liczbi całko: czyli}$$

że A iest podzielném przez C, D, E,.... a tém samém iest wielokrotnem względem liczb C, D, E,.....c: b: do ok:
Z ostatnich równań widzimy także, *że ilorazy te* (A:C), (A:D), (A:E)..... *w założeniu, że* $(A:B) = m > 1$ *nie są liczbami pierwszemi między sobą.*

50. TWIERDZENIE 16. *Jeżeli liczbą* A *iest spolną wielokrotnością liczb* B i C, *a liczba, która wskazuie, ile razy liczba*

B mieści się w liczbie A, iest wielokrotną względem liczby oznaczaiącéy wielokrotność liczby A względem C, na ten czas liczba C, iest także wielokrotną względem liczby B: bo ieżeli

$$A = m\,B = n\,C, \quad \text{a } m = np. \quad \text{czyli } m : n = p.$$

przeto $C = \frac{A}{n} = \frac{mB}{n} = \frac{n.\,pB}{n} = pB$, czyli liczba C iest wielokrótną względem liczby B, c: b: do ok:

51. TWIERDZENIE 17. *Jeżeli liczba* A *iest spólną wielokrotnością liczb* B, C, D, E,... *a liczby* m, n, p, q,.... *oznaczaiące, wielokrotności liczb tych względem liczby* A *nie są pierwszemi między sobą, na ten czas znayduie się koniecznie ieszcze inna liczba* M, *która będąc spólną wielokrotnością liczb* B, C, D, E,.. *dzieli dokładnie liczbę* A, *a tém samém iest od niéy mnieyszą:* czyli *liczba ta* M *iest mnieyszą wielokrotnością liczb* B, C, D, E,.... *aniżeli nią iest liczba*, A: bo ieżeli $A = mB = nC = pD = qE \ldots\ldots$ a liczby m, n, p, q, nie są pierwszemi między sobą, na ten czas musi bydź pewna liczba $k > 1$, która dokładnie dzieli liczby $m, n, p, q, \ldots\ldots$ ieżeli przeto

$$\frac{m}{k} = m' \quad \frac{n}{k} = n' \quad \frac{p}{k} = p' \quad \frac{q}{k} = q' \ldots\ldots = \text{liczbom całkowitym:}$$

czyli $m = m'k,\ n = n'k,\ p = p'k,\ q = q'k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

na ten czas $\quad A = km'B = kn'C = kp'D = kq'E \ldots\ldots$

$$\text{czyli} \quad \frac{A}{k} = m'B = n'C = p'D = q'E = \ldots\ldots \ (\alpha)$$

a gdy $m'B$, $n'C$, $p'D$, $q'E$,... są liczbami całkowitemi iako iloczyny liczb całkowitych, przeto też $(A : k)$ iest także liczbą całkowitą, którą ieżeli nazwiemy M mamy

$$\frac{A}{k} = M \text{ czyli } A = kM \text{ a ztąd } \frac{A}{M} = k: \ldots\ldots \ (\beta)$$

z wyrażenia (α) wynika, że liczba M iest wielokrotnością liczb B, C, D, E,..... a z wyrażenia (β) widzimy, że liczba ta M, dzieląc dokładnie liczbę A, wydaie liczbę k większą od iedności, a tém samém iest mnieyszą od A c: b: d: ok.

52. WNIOSEK. *Jeżeli liczba* A *iest naymnieyszą wielokrotnością liczb* B, C, D, E,... *na ten czas ilorazy* (A: B), (A: C), (A: D), A; E), ... *muszą bydź koniecznie pierwszemi między sobą* =

53. TWIERDZENIE 18. *Jeżeli dwie liczby* A i B *są wielokrotnemi względem liczby* C, *i nadto iloraz* (A: C) iest *wielokrotnem względem ilorazu* (B: C), *na ten czas liczba* B *dzieli dokładnie liczbę* A: bo ieżeli $A = mC$, $B = nC$, czyli $(A:C) = m$, $(BC) = n$, na ten czas, gdy m z założenia iest wielokrotném względem n, to iest ze $m = pn$, gdzie p iest całkowitém, będzie też $A = p.nC = p(nC) = pB$, czyli $(A:B) = p$ = liczb całkow. c: b: d: ok:

54. TWIERDZENIE 19. *Jeżeli liczba* M *iest spólnym dzielnikiem liczb* A, B, C, D E..., *ale ilorazy, które otrzymuiemy dzieląc* A *przez* M, B *przez* M, C *przez* M, D *przez* M, *i t. d. nie są liczbami pierwszemi między sobą, na ten czas znayduie się koniecznie inny ieszcze spólny dzielnik* N *liczb* A, B, C, D, E,.... *ktory iest liczbą wielokrotną względem liczby* M, *a tem samém większy od dzielnika* M: bo ieżeli

$$\frac{A}{M} = a, \quad \frac{B}{M} = b, \quad \frac{C}{M} = c, \quad \frac{D}{M} = d, \quad \frac{E}{M} = e, \;\ldots\ldots \quad \text{czyli}$$

$A = aM$, $B = bM$, $C = cM$, $D = dM$, $E = eM$ .... a liczby a, b, c, d, e, nie są z założenia pierwszemi między sobą, na ten czas znayduie się zawsze pewna liczba k, która iest spólnym dzielnikiem liczb a, b, c, d, e,... ieżeli przeto

$\frac{a}{k} = a'$, $\frac{b}{k} = b'$, $\frac{c}{k} = c'$, $\frac{d}{k} = d'$, $\frac{e}{k} = e'$, ... czyli
$a = a'k$, $b = b'k$, $c = c'k$, $d = d'k$, $e = e'k$, ... na ten czas
$A = aM = a'kM$ $B = bM = b'kM$ $C = c\,M = c'kM$ .....

a ztąd $\frac{A}{kM} = a'$, $\frac{B}{k.M} = b'$ $\frac{C}{k.M} = c'$ .....

to iest, że nie tylko liczba M iest spólnym dzielnikiem liczb A, B, C, D, ... ale iest także ich spólnym dzielnikiem liczba $kM = N$ wielokrotna względem M, a tém samém większa od M. co b: do ok:

55. WNIOSEK *Jeżeli liczba* N *iest naywiększym spólnym dzielnikiem liczb* A, B, C, D, E . . . *na ten czas ilorazy* (A: N), (B:N) C:N) D:N), (E: N) . . . . *są pierwszemi między sobą*; a podług tego że (N:M) $= k = l$: całk: *każdy spólny dzielnik ilukolwiek liczb dzieli dokładnie naywiększego spólnego dzielnika tychże liczb.*

56. TWIERDZENIE 20. *Każda spólna wielokrotność dwóch lub ilukolwiek liczb iest dokładnie podzielną przez naymnieyszą wielokrotność tychże liczb*: bo ieżeli liczba M iest naymnieyszą wielokrotnością ilukolwiek liczb danych, a liczba N iakąkolwiek inną wielokrotnością tychże liczb, na ten czas liczba N z założenia większa od M iest podzielną przez liczbę M; bo gdyby liczba N nie była podzielna przez liczbę M, na ten czas wykonawszy dzielenie liczby N przez M doszlibyśmy do reszty $R < M$

tak że $$\frac{N}{M} = i + \frac{R}{M}$$

czyli $N = Mi + R$ czyli $N - Mi = R$:
a z tąd gdy w wyrażeniu tém z założenia i liczba N i liczba M a tém samém i iéy wielokrotność Mi są podzielne przez liczby dane, przeto też według n: 20 i liczba $R < M$ musiałaby bydź podzielna przez liczby dane, co bydź nie może, bo M iest z założenia nay-

mnieyszą wielokrotnością liczb danych, a tém samém i to bydź nie może, ażeby liczba M nie dzieliła dokładnie liczby N, *każda przeto spólna*... i t: d.

57. WNIOSEK: *Jeżeli liczba* N *iest iakąkolwiek byle nie naymnieyszą wielokrotnością liczb danych* A, B, C, D,... *na ten ilorazy* (N:A), (N: B) (N: C) (N: D)... *nie są liczbami pierwszemi między sobą*: bo ieżeli

$$\frac{N}{A}=a,\ \frac{N}{B}=b,\ \frac{N}{C}=c,\ \frac{N}{D}=d\ldots\ldots \text{ a według n: 55 } \frac{N}{M}=m$$

gdzie M iest naymnieyszą wielokrotnością liczb danych A, B, C,... a m iest liczbą całkowitą , czyli ieżeli

$$N=aA,\ N=bB,\ N=cC,\ N=dD\ldots\text{ i } N=mM$$

przeto też

$$m.M=a.A,\ m.M=b.B,\ m.M=c.C,\ m.M=d.D\ldots\text{ a ztąd}$$

$$\frac{M}{A}=\frac{a}{m},\ \frac{M}{B}=\frac{b}{m},\ \frac{M}{C}=\frac{c}{m},\ \frac{M}{D}=\frac{d}{m}\ \ldots\ldots:$$

a że w równaniach tych strony pierwsze są liczbami całkowitemi , bo liczba M iako wspólna wielokrotność liczb A, B, C, D, ... iest podzielną przez te liczby , przeto też i drugie strony muszą bydź liczbami całkowitemi, czyli musi liczba $m > 1$ bydź dokładnym dzielnikiem liczb $a, b, c, d,\ldots$ czyli ilorazów (N:A), (N:B), (N:C),..., a tém samém ilorazy te, iako maiące spólnego dzielnika większego od iedności, nie są pierwszemi między sobą:—

Jeżeli zaś założemy, że ilorazy te są pierwszemi między sobą, na ten czas trzeba przypuścić m równém iedności, a ztąd, na mocy równania $N:M=m=$ *iedności*, $M=N$. t: i: *ieżeli liczba* M *iest naymnieyszą wielokrotnością liczb* A, B, C, D... *na ten czas ilorazy* (M:A), (M:B), (M:C), ... *są liczbami pierwszemi między sobą.*

TEORYA PODZIELNOŚCI LICZB

CZYLI

O prawach podzielności liczb.

Szczególniéy iest rzeczą bardzo ważną i korzystną w rachunku, aby naprzód można poznać, czyli liczba dana iest podzielną przez którą z liczb całkowitych, lub nie — W Arytmetyce podać wprawdzie możemy dla każdéy liczby właściwy charakter, po którym poznaiemy, czyli liczba dana iest podzielna przez tę liczbę lub nie, to iest, możemy w prawdzie podać w Arytmetyce warunki, którym liczba dana zadość powinna uczynić, ażeby była podzielna przez pewną liczbę całkowitą, ale warunki te, które nazywać będziemy *prawem podzielności* liczby ostatniéy są po naywiększéy części tak długie, iż w wykonywaniu rachunków korzystnie używanmi bydź nie mogą: w ten czas to one tylko przynoszą nam korzyść w rachunku, gdy z przystosowania ich do liczby daleko mnieyszéy od liczby danéy, którą łatwo i prędko z danéy wyprowadzić potrafimy, wnieść możemy o podzielności liczby danéy przez liczbę tę, którśéymy prawo podzielności stosowali.

Dla otrzymania liczb tych mnieyszych, które gdy prawu podzielności pewnéy liczby zadość czynią, zapewniaią nas o podzielności całéy liczby danéy, wyobrażamy sobie rozłożoną każdą liczbę na dwie części, z którychby iedna była podzielną przez tę liczbę, a druga iakakolwiek: ieżeli dopiero część ta druga iest także przez tę liczbę podzielną, na ten czas i liczba dana iest przez nią podzielna; w przeciwnym razie liczba dana nie iest przez liczbę tę podzielną. —

Gdy zaś prawo podzielności nie iest nam dane, ale dopiero dla pewnéy liczby prawo to wynaleść chcemy, na ten czas trzeba przypuścić liczbę iakąkolwiek, tę rozłożyć na dwie części, z którychby iedna była podzielna przez tę liczbę dla któréy prawa podzielności szukamy, a druga iakakolwiek: w téy to dopiero części drugiéy w założeniu tém, że liczba ta iakakolwiek iest podzielną przez liczbę, dla któréy prawa podzielności szukamy, czytamy warunki, iakim liczba zadość czynić powinna, aby była przez pewną liczbę całkowitą podzielna; a wysłowienie tych warunków stanowi prawo podzielności dla liczby ostatniéy.

Takich to naznaczeniem praw podzielności zatrudnimy się w tych kilku stronnicach, a

1° *Szukać będziemy warunków, którym liczba zadość czynić powinna, aby była podzielna przez iakąkolwiek całkowitą potęgę z 2 lub 5, to iest przez* 2^n *lub* 5^n, *albo przez iloczyn* $2^n . 5^n = 10^n$. —

2re *podamy sposób ogólny wynaydywania praw podzielności dla każdéy z liczb pierwszych.* —

3cie *Zastosuiemy sposób poprzedzaiący do niektórych liczb złożonych*, i

4te *wyprowadzimy prawa podzielności liczb złożonych z wiadomych praw podzielności liczb pierwszych, które w skład tychże liczb złożonych w pierwszéy tylko potędze wchodzą.*

I.

Prawa podzielności dla

$$2^n \text{ lub } 5^n \text{ lub } 2^n \times 5^n = 10^n$$

Każda liczba całkowita N z *m* cyfr złożona według n: 2 zamknięta iest w wzorze następuiącym

$N = a + b.\ 10 + c.\ 10^2 + d.\ 10^3 + \ldots\ldots + w\, 10^{m-1}$ czyli

$N = w\, 10^{m-1} + u.\ 10^{m-2} + \ldots + d.\ 10^3 + c.\ 10^2 + b.\ 10 + a$:

w założeniu, że n iest *mnieyszém* od m możemy rozłożyć liczbę tę N na dwie części, które nawiasami oddzielamy

$$N = [w.\ 10^{m-1} + u.\ 10^{m-2} \ldots\ldots + q.\ 10^n\ ]$$
$$+ (p.\ 10^{n-1} \ldots\ldots + d.\ 10^3 + c.\ 10^2 + b.\ 10 + a.)$$

czyli wyłączaiąc w części pierwszéy spolnego czynnika 10^n za nawias

$$N = [w.\ 10^{m-n-1} + u.\ 10^{m-n-2} + \ldots\ldots + q].\ 10^n$$
$$+ p.\ 10^{n-1} + \ldots\ldots + d.\ 10^3 + c.\ 10^2 + b.\ 10 + a:$$

ieżeli teraz czynnika części pierwszéy w nawiasie zamkniętego nazwiemy przez M, na ten czas otrzymamy w ogólności

$$N = M.\ 10^m + (p.\ 10^{n-2} + \ldots + d.\ 10^3 + c.\ 10^2 + b.\ 10 + a) \ldots (\alpha)$$

W wyrażeniu tém widzimy, że gdy $10^n = 2^n\ 5^n$ iest podzielném tak przez 2^n, iako też i przez 5^n, tudzież $2^n\ 5^n = 10^n$, przeto M. 10^n iest przez te liczby podzielném, a z tąd prawo podzielności dla tychże liczb czytać tylko powinniśmy w drugiéy części, to iest

$$p.\ 10^{n-1} + \ldots\ldots + d.\ 10^3 + c.\ 10^2 + b.\ 10 + a$$

która iest liczbą z n pierwszych cyfr liczby danéy, biorąc ie od strony prawéy ku lewéy, złożoną: gdy zaś podzielność liczby N przez 2^n lub 5^n lub $2^n \times 5^n = 10^n$, skoro iuż $M \times 10^n$ iest przez te liczby podzielném, wymaga tylko ieszcze według n: 22 podzielności liczby

$$p.\ 10^{n-1} + \ldots\ldots + d.\ 10^3 + c.\ 10^2 + b.\ 10 + a$$

przez liczby 2^n lub 5^n lub $2^n\ 5^n = 10^n$; przeto prawo podzielności

dla 2^n iest: *ażeby w liczbie danéy liczba z pierwszych n cyfr, licząc ie od strony prawéy ku lewéy, złożona, czyli króciéy mówiąc pierwsze n cyfr były podzielne przez* 2^n:

dla 5^n iest: *ażeby w liczbie danéy pierwsze n cyfr były podzielne przez* 5^n:

dla 10^n iest: *ażeby w liczbie danéy pierwsze n cyfr były podzielne przez* 10^n; a że 10^n równa się iedności z n zerami, przeto warunkowi powyższemu w ten czas tylko zadość uczynić można, gdy na końcu iakieykolwiek liczby n zer się znayduie, a z tąd *prawo podzielności dla* 10^n *iest, ażeby n pierwszych cyfr od strony prawéy ku lewéy były zerami, czyli żeby liczba n zerami była zakończona.*

Stosuymy teraz te ogólne prawa do szczególnych ważności na n a.

1° gdy $n = 1$ wzor (α) będzie $N = M.\ 10 + a$

a $2^n = 2 \quad 5^n = 5 \quad 10^n = 10$

ztąd *każda liczba któréy* ostatnia *cyfra iest podzielna przez* 2, *iest także podzielna przez* 2, a że z iedno cyfrowych liczb są tylko liczby 2, 4, 6, 8, albo 0 podzielne przez 2, przeto *każda liczba zakończona na liczby* 2, 4, 6, 8, 0 *iest podzielna przez* 2.

Każda liczba, któréy ostatnia cyfra iest podzielna przez 5, *iest podzielna przez* 5, a że z iednocyfrowych liczb tylko 0 i 5, są podzielne przez 5, przeto *każda liczba zakończona na* 0 *lub* 5 *iest podzielna przez* 5. —

Każda liczba zakończona na zero iest podzielna przez 10.—

2re gdy $n = 2$, na ten czas wzor (α) daie

$$N = M.\ 10^2 + b.\ 10 + a$$

a $2^n = 2^2 = 4, \quad 5^n = 5^2 = 25, \quad 10^n = 10^2 = 100,$

ztąd *każda liczba, któréy dwie ostatnie cyfry są podzielne przez* 4, *iest podzielna przez* 4.

Każda liczba, któréy dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 25, — liczbami temi ostatniemi mogą bydź tylko 00, 25. 50, 75.

Każda liczba zakończona na dwa zera iest podzielna przez 100.

3cie gdy $n=3$ na ten czas wzor (α) daie

$$N = M.\,10^2 + c.\,10^3 + b.\,10 + a$$

$$a\ 2^n = 2^3 = 8,\ 5^n = 5 = 25,\ 10^n = 10^3 = 1000$$

ztąd *każda liczba, któréy trzy ostatnie cyfry są podzielne przez 8, iest podzielna przez 8.*

Każda liczba, któréy trzy ostatnie cyfry są podzielne przez 125 iest podzielna przez 125 — Ostatniemi temi liczbami bydź tylko mogą 000, 125, 250, 350, 375, 509, 625, 750, 875, —

Każda liczba zakończona trzema zerami iest podzielna przez 1000.

4te : gdy $n=4$ na ten czas wzor (α) daie

$$N = M.\,10^4 + d.\,10^3 + c.\,10^2 + b.\,10 + a$$

$$a\ 2^n = 2^4 = 16,\ 5^n = 5^4 = 625,\ 10^n = 10^4 = 10000$$

ztąd *każda liczba któréy cztery ostatnie cyfry są podzielne przez 16, iest podzielna przez* 16.

Każda liczba któréy cztery ostatnie cyfry są podzielne przez 625, iest podzielna przez 625.

Każda liczba czterema zerami zakończona iest podzielna przez 10000. i: t: d: —

Wyprowadzić można prawa podzielności dla $2^5 = 32$, $5^5 = 3125$, $10^5 = 100000$, kładąc $n=5$; podobnie gdy $n=6$ doydziemy do praw podzielności liczb $2^6 = 64$, $5^6 = 15625$, $10^6 = 1000000$ i t. d. dla potęg wyższych liczb 2 i 5, ale te w wykonaniu rachunków nie są używane.

Zamkniymy nakoniec rzecz tę wyłożeniem niektórych własności liczb parzystych i nieparzystych. *Liczbami parzystemi* zowiemy wszystkie te liczby, które są podzielne przez 2, wszystkie zaś inne zowią się *liczbami nieparzystemi*: i tak liczby 2, 4, 6, 8, 10, ... a w ogólności 2.A, gdzie A może bydź liczbą parzystą lub nie, są liczby parzystemi — liczby zaś 1, 3, 5, 7, ... a w ogólności na mocy tego, że zawsze liczba nieparzysta leży w szeregu liczb naturalnych między dwoma parzystemi, $2A+1$, gdzie A iest liczbą iakąkolwiek całk:, są nieparzystemi. — Z samych definicyi liczb parzystych i nieparzystych wynikaią następuiące własności liczb, które ogólnie bardzo łatwo się dowodzą:

1. *Summa ilukolwiek liczb parzystych iest także liczbą parzystą*: bo dodaiąc ilekolwiek liczb parzystych 2A, 2B, 2C, ... i t. d. otrzymuiemy na wypadek summę $2A+2B+2C+\ldots\ldots = 2[A+BC+\ldots\ldots]$ równą liczbie podzielnéy przez 2, a tém samém równą liczbie parzystéy; c: b: d: ok:

2. *Summa dwóch liczb nieparzystych iest liczbą parzystą*: bo gdy każda liczba nieparzysta iest tego składu $2A+1$, więc summa dwóch liczb nieparzystych $2A+1$ i $2B+1$, to iest $2A+1+2B+1=2A+2B+2=2[A+B+1]=$ liczbie podzielnéy przez 2, czyli liczbie parzystéy c: b: d: ok:

podobnym sposobem przekonamy się że

3. *Summa ilukolwiek liczb nieparzystych iest liczbą parzystą, ieżeli liczba ich iest parzystą.*

4. *Summa dwóch liczb, z których iedna iest parzystą, a druga nieparzystą iest liczbą nieparzystą.*

5. *Summa ilukolwiek liczb nieparzystych iest liczbą nieparzystą, ieżeli liczba ich iest nieparzystą.*

6. *Summa ilukolwiek liczb parzystych i nieparzystych iest liczbą parzystą, ieżeli liczba liczb nieparzystych iest parzystą — w przeciwnym razie summa ta iest liczbą nieparzystą.*

8. *Różnica dwóch liczby nieparzystych iest liczbą parzystą.*

9. *Różnica dwóch liczb, z których iedna iest liczbą parzystą, a druga nieparzystą, iest liczbą nieparzystą.*

10. *Każda wielokrotność liczby parzystey iest liczbą parzystą*: bo czyli my liczbę parzystą 2A weźniemy parzystą liczbę razy *np*. 2B razy, czyli nieparzystą liczbę razy *np*. $2B+1$, na ten czas tak w iednym iako i w drugim przypadku wielokrotności $2A.2B=[2AB]$, $2A\times(2B+1)=2(2AB+A)$ są liczbami podzielnemi przez 2, a zatém parzystemi c: b: do ok:

Ztąd wynika że

11. *Iloczyn dwóch liczb parzystych iest liczbą parzystą*: tudzież

12. *Iloczyn dwóch liczb, z których iedna iest liczbą parzystą, a druga nieparzystą, iest liczbą parzystą.*

13. *Iloczyn dwóch liczb nieparzystych iest liczbą nieparzystą*: bo $(2A+1)\times(2B+1),=2[2AB+A+B]+1$ równe liczbie nieparzystéy c: b: do ok:

14. *Jeżeli Dzielna i Dzielnik są liczbami parzystemi, na ten czas reszta z dzielenia wynikaiąca iest liczbą parzystą, a iloraz może bydź iakikolwiek, parzysty lub nieparzysty*: bo nazwawszy Dzielną przez A, dzielnika przez B, iloraz przez i, a resztę przez R, mamy według n° 3.

$$\frac{A}{B}=i+\frac{R}{B}$$

czyli $A=Bi+R$, czyli $A-Bi=R$.

w równaniu tém liczba $B.i$, iest według 10. liczbą parzystą, iakakolwiek będzie liczba i, bo liczba B z założenia iest liczbą parzystą, a że i liczba A iest z założenia liczbą parzystą, więc według prawdy 7. liczba R, iest liczbą parzystą c: b: do ok:

Podobnie rozumuiąc przekonamy się że

15. *Jeżeli Dzielnik i Iloraz są liczbami parzystemi, iakikolwiek będzie Dzielnik, na ten czas i reszta iest liczbą parzystą.*

16. *Jeżeli Dzielna i reszta są liczbami parzystemi, na ten czas albo Dzielnik albo iloraz iest liczbą parzystą:* w pierwszym przypadku Iloraz a w drugim dzielnik mogą bydź iakiemikolwiek liczbami parzystemi lub nieparzystemi: *i na odwrot:*

17. *Jeżeli Dzielnik albo Iloraz iest liczbą parzystą, na ten czas i Dzielna i reszta są liczbami parzystemi* i t. d.

18. *Jeżeli liczba parzysta iest dokładnym kwadratem, na ten czas liczba ta iest podzielną przez 4, a ztąd każda liczba parzysta niepodzielna przez 4 nie iest dokładnym kwadratem:* bo iakakolwiek liczba parzysta 2A wyniesiona do kwadratu daie na wypadek liczbę $4A^2$ podzielną przez liczbę 4.

Każda liczba nieparzysta, która zmnieyszona o iedność, nie iest przez liczbę 4 podzielną, nie iest dokładnym kwadratem: bo iakakolwiek liczba nieparzysta (2A+1) podniesiona do kwadratu daie na wypadek liczbę $(4A^2+4A+1)$, która zmnieyszona o iedność oczywiście iest przez liczbę 4 podzielną.

II.

Sposób naznaczenia prawa podzielności dla każdéy liczby pierwszéy.

Każda liczba całkowita z m cyfr złożona zamknieta iest według n: 2 w wzorze następuiącym:

$$N = a + b.\,10 + c.\,10^2 + d.\,10^3 + \ldots + u.\,10^{m-2} + w.\,10^{m-1} \ldots (a)$$

Jeżeli liczba ta ma bydź podzielna przez liczbę pierwszą bezwzględną n, na ten czas liczba $\frac{N}{n}$ musi bydź według n: 3 liczbą całkowitą, a dzieląc obydwie strony równania (a) przez n, otrzymamy

$$\frac{N}{n} = \frac{a + b.\,10 + c.\,10^2 + d.\,10^3 + \ldots + u.\,10^{m-2} + w.\,10^{m-1}}{n}$$

czyli według n: 15.

$$\frac{N}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b.10}{n}+\frac{c.10^2}{n}+\frac{d.10^3}{n}+\ldots+\frac{u.10^{m-2}}{n}+\frac{w.10^{m-1}}{n}$$

czyli według n: 17.

$$\frac{N}{n}=a.\frac{1}{n}+b.\frac{10}{n}+c.\frac{10^2}{n}+d.\frac{10^3}{n}+\ldots+u.\frac{10^{m-2}}{n}+w.\frac{10^{m-1}}{n}\ldots(\alpha)$$

Wykonywaiąc teraz naznaczone dzielenia $\frac{1}{n}, \frac{10}{n}, \frac{10^2}{n}, \frac{10^3}{n}\ldots$ i ilorazy ztąd wynikaiące cechuiąc przez $i_0\, i_1, i_2, i_3, \ldots$ a reszty do których nas te dzielenia prowadzą, a które *resztami wypadkowości* nazywać będziemy, przez $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ mamy

$$\frac{1}{n}=i_0+\frac{r_0}{n},\ \frac{10}{n}=i_1+\frac{r_1}{n},\ \frac{10^2}{n}=i_2+\frac{r_2}{n},\ \frac{10^3}{n}=i_3+\frac{r_3}{n},\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{10^{m-2}}{n}=i_{m-2}+\frac{r_{m-2}}{n},\ \frac{10^{m-1}}{n}=i_{m-1}+\frac{r_{m-1}}{n}\ldots$$

a ztąd podstawiaiąc ważności te w wzorze (β)

$$\frac{N}{n}=a\left[i_0+\frac{r_0}{n}\right]+b.\left[i_1+\frac{r_1}{n}\right]+c.\left[i_2+\frac{r_2}{n}\right]+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots+u.\left[i_{m-2}+\frac{r_{m-2}}{n}\right]+w.\left[i_{m-1}+\frac{r_{m-1}}{n}\right]$$

czyli

$$\frac{N}{n}=ai_0+bi_1+ci_2+\ldots+ui_{m-2}+wi_{m-2}$$

$$+\frac{ar_0+br_1+cr_2+\ldots+ur_{m2}+wr_{m1}:}{n}$$

W wyrażeniu tém, skoro strona pierwsza iest z założenia liczbą całkowitą, na ten czas i strona druga musi bydź całkowitą, a że część $ai_0+bi_1+ci_2+\ldots+ui_{m-2}+wi_{m-1}$ iest już liczbą całkowitą, więc według n: 22 i druga część $ar_0+br_1+cr_2+\ldots+ur_{m-2}+$

wr_{m-1} musi bydź liczbą całkowitą: prawo przeto podzielności dla liczby n powinniśmy czytać w wyrazie ostatnim drugiéy strony, to iest w wyrazie

$$R = \frac{ar_0 + br_1 + cr_2 + \ldots + ur_{m-2} + wr_{m-1}}{n} = \text{liczb: całko:}$$

które wysłowioné iest następuiące:

Aby liczba dana była podzielną przez pewną liczbą pierwszą bezwzględną, na ten czas dostatecznem iest, ażeby summa iloczynów, które wynikaią z rozmnożenia każdéy z cyfr liczbę daną składaiących przez resztę do któréy dochodzimy, dzieląc tę potęgę liczby 10, *która wartość mieyscową cyfry téy oznacza, była podzielną przez tę liczbę pierwszą.*

Wykonywaiąc dzielenia w równaniach (r) podane widzimy:

1º *Że żadna z reszt* $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ *nie może bydź równa zero, skoro liczba pierwsza bezwzględna iest różna od* 2 *lub* 5: a to dla tego że liczba 10 iest tylko, wyiąwszy przez iedność i siebie samą, podzielną przez liczby pierwsze 2 i 5, a tém samém i każda potęga liczby 10 według n: 33 nie iest podzielną przez żadną liczbę pierwszą prócz 2 i 5, a ztąd też i żadna z reszt $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ nie może bydź równą *zero*.

2re: *Każdą resztę następuiącą otrzymuiemy, przypisuiąc zero do reszty poprzedzaiącéy i dzielenie daléy wykonywaiąc:* bo zero to iest właśnie tém, które znayduie się na końcu potęgi następuiącéy liczby 10, uważanéy za dzielną; skoro więc dzielenie potęgi poprzedzaiącéy uskutecznionem zostało, przeto według prawideł dzielenia wypada do reszty ostatniéy następuiącą cyfrę dzielnéy, t: i: tutay zero przypisać, i dla otrzymania reszty następuiącéy wykonywać daléy dzielenie.

3cie: *Liczba reszt tych różnych co do wartości liczbowéy chociaż dzielenie, idąc do potęg co raz wyższych liczby* 10, *idzie bez końca, iest ograniczona, i reszty dalsze odpowiednie równe* *początkowym wracaią się w tym samym porządku, w iakim były z samego początku wynalezione, czyli reszty te wracaią się periodycznie, a ztąd tworzą tak nazwany peryod*: bo z zasad dzielenia wiemy, że reszta zawsze iest mnieysza od Dzielnika, przeto w dzieleniu iakieykolwiek liczby przez liczbę pierwszą n nie możemy doyść do innych reszt, (nie uważaiąc reszty 0, która według n: 1 tutay mieysca nie ma) iak tylko do 1, 2, 3. . . . aż do $(n-1)$, a ztąd liczba tych reszt iest ograniczona, i nie może bydź większa od liczby, dla którey prawa podzielności szukamy, ani nawet iey równa, ale owszem o iedność przynaymniey mnieyszą bydź musi: ieżeli przeto w ogólności mówiąc, wynaleziemy te $(n-1)$ reszt różnych, to na ten czas następuiąca koniecznie bydź musi równa iedney z reszt iuż wynalezionych, a tém samém dopisuiąc zero do tey reszty, dla otrzymania przez dalsze dzielenie reszty następuiącey, otrzymamy i dzielną cząstkową równą iedney z poprzedzaiących, a mianowicie równą tey, która wypadała dodaiąc do reszty która się wrociła, zero; ztąd i cyfra w ilorazie do tey dzielney należąca wróci się ta sama i przyprowadzi nas do reszty równey reszcie, do którey nas dawniey ta sama dzielna cząstkowa doprowadziła, a tém samém przyprowadzi nas do reszty równey reszcie następuiącey po reszcie tey, która wracaiącey się była równa: reszta ta doprowadzi nas dla tey samey przyczyny do reszty równey reszcie następuiącey i t. d. a rozumowanie to stosuiąc i do reszt dalszych przekonamy się, że tak cyfry w ilorazie, iako też i reszty wrócą się w tym samym porządku w iąkim poprzednio były wynalezione. Ażeby zaś nakoniec okazać, że reszty te wrócą się w tym samym porządku w iakim z samego początku dzielenia były otrzymane, trzeba tylko okazać; że pierwsza z reszt powracaiących iest równa pierwszey z reszt z początku otrzymanych t: i: równa się reszcie z podzielenia $\frac{1}{n}$ wynikaiącey, która na mocy tego że $n > 1$ równa się *iedności:* co iest oczywistém, bo ieżeli między resztami z początku otrzymywanemi iest iedna równa iedności, na ten czas i między resztami wracaiącemi się musi bydź iedna równa iedności, od któréy wracaiąc się reszty w tym samym iak pierwiéy porządku, przekonywaią nas, że skoro reszta ta peryod pierwszy zaczynaiąca była równa *iedności*, i reszta peryod drugi zaczynaiąca bydź musi równą *iedności*; a tém samém *liczba reszt różnych co do wartości liczbowéy, chociaż . . . i t: d*: c: b: do ok:

Z poprzedzaiących uwag wynika, że dla otrzymania potrzebnych reszt do zastosowania prawa podzielności dla liczby pierwszéy n do liczby innéy danéy, potrzeba tylko otrzymać, różne co do wartości liczbowéy reszty, których w nayogólnieyszym przypadku będzie $(n-1)$: wszystkie bowiem dalsze reszty wracaiąc w tym samym porządku, w iakim poprzedzaiące z początku znalezionemi zostały, są tém samém wiadome— Wynalezieniem takich reszt dla niektórych szczególnych ważności na n, zatrudnimy się w tym ustępie, z których wiadomych stanowić będziemy według wyrażenia R prawa podzielności dla tych liczb.

Prawo podzielności dla liczby 3.

Dla wynalezienia prawa podzielności dla liczby 3 połóżmy $n = 3$; w ten czas wykonywaiąc dzielenia w rów: (γ) naznaczone, otrzymamy $r_0 = 1$, $r_1 = 1$, a ztąd widzimy, że skoro reszta r_1 iest ta sama co r_0 peryod reszt dla liczby 3 iest iednocyfrowy i równy *iedności*, czyli że w ogólności $r_p = 1$; prawo zatém podzielności dla liczby 3 zamknięte iest w wyrażeniu

$$R = \frac{a + b + c + d + \ldots + u + w}{3}$$

które wysłowiwszy iest następne:

Każda liczba, któréy cyfry, z których się ona składa, bez względu na ważności ich mieyscowe do siebie dodane, daią liczbę podzielną przez 3, iest także podzielną przez 3: a że wypadek z dodawania cyfr bez względu na ich ważność mieyscową pewną liczbę składaiących zazwyczay zowią summą cyfr téy liczby, ztąd prawa podzielności dla liczby 3, wysłowienie nayprostsze iest następne:

Każda liczba, któréy summa cyfr iest podzielna przez 3, iest też podzielna przez 3.

Przykład: Liczba 191898 iest podzielne przez 3, bo

$1 + 9 + 1 + 8 + 9 + 8 = 36$ iest podzielném przez 3.

Uwaga. Jeżeli summa cyfr liczby danéy, iest liczbą po któréy z pierwszego rzutu oka trudno poznać, że iest podzielną przez 3, na ten czas można znowu prawo podzielności dla liczby 3 zastosować do téyże liczby, a gdy liczba z zastosowania prawa podzielności wynikaiąca będzie podzielna przez 3, na ten czas i liczba poprzedzaiąca, a tém samém i liczba dana iest podzielna przez 3. *np* gdyby liczba dana była 37264927045. na ten czas stosuiąc prawo podzielności do téy liczby mamy

$3 + 7 + 2 + 6 + 4 + 9 + 2 + 7 + 8 + 4 + 5 = 57$, a stosuiąc znowu prawo do liczby 57 otrzymamy $5 + 7 = 12 =$ liczbie podzielnéy przez 3: gdybyśmy prawo stosowali ieszcze i do liczby 12 na ten czas otrzymalibyśmy $1 + 2 = 3$. t: i: liczbę 3 przez siebie samą podzielną; a ztąd wniesiemy, że liczba dana iest podzielna przez 3.

Ta sama uwaga ma mieysce i dla każdéy innéy liczby, ztąd też w dalszym ciągu przy końcu podanego prawa podzielności dla pewnéy liczby zawsze iéy dorozumiewać się będziemy.

Prawo podzielności dla liczby 7.

W celu wynalezienia prawa podzielności dla liczby 7 połóżmy $n=7$, a na ten czas wykonywaiąc dzielenia w rów: (ν) naznaczone, zważaiąc na to co się pod liczbą 2 na str. 40 powiedziało, otrzymamy

$$r_0=1,\ r_1=3,\ r_2=2,\ r_3=6,\ r_4=4,\ r_5=5,\ r_6=1\ldots$$

a ztąd w ogólności

$$r_{6p}=1,\ r_{6p+1}=3,\ r_{6p+2}=2,\ r_{6p+3}=6,\ r_{6p+4}=4,\ r_{6p+5}=5:$$

czyli reszty dla liczby 7 tworzą peryod o 6. liczbach następnych 1, 3, 2, 6, 4, 5,: prawo zatém podzielności dla liczby téy czytamy w następuiącém wyrażeniu

$$R=\frac{a.1+b.3+c.2+d.6+e.4f.5+g.1+h.3+\ldots\ldots}{7}$$

które w następuiącém prawidle zamknąć można:

Ażeby poznać, czyli liczba iest podzielną przez 7, podzielić trzeba naprzód liczbę daną od strony prawéy ku lewéy na podziałki o 6ciu cyfrach, a potém w każdéy podziałce cyfrę pierwszą z strony prawéy ku lewéy rozmnożyć należy przez 1, cyfrę drugą przez 3, cyfrę trzecią przez 2, cyfrę czwartą przez 6, cyfrę piątą przez 4, a cyfrę szóstą przez 5; ztąd otrzymane iloczyny trzeba do siebie dodać, a ieżeli summa tychże iest liczbą podzielną przez 7, na ten czas i liczba dana iest podzielna przez 7:

Przykład: Chcąc poznać czyli liczba dana 119236834032491 iest podzielna przez 7 następnie postępuie

$$\begin{array}{ccc|cccccc|cccccc}
1 & 1 & 9 & 2 & 3 & 6 & 8 & 3 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 9 & 1 \\
{\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 1} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2+3+9+10+12+36+16+9+4+0+12+12+8+27+1 = {} & 1\quad 6\quad 1 \\
& 2\quad 3\quad 1 \\
\hline
& 2+18+1=21=
\end{aligned}$$

liczbie podzielnéy przez 7, bo $21=3\cdot7$, a ztąd i liczba podana iest podzielna przez 7.

Chcąc poznać czyli liczba dana 24661 iest podzielna przez 7, postępuie tak samo

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$8+24+12+18+1 = 63 =$ liczbie podzielnéy przez 7, bo $63 = 7 \times 9$: a ztąd i liczba dana iest podzielna przez 7:

Prawidło to w zastosowaniu swém iest trochę niewygodném, staraymy się przeto ie uprościć, a w tym celu zamiast reszt

$$r_{6p+3} = 6 \qquad r_{6p+4} = 4 \qquad r_{6p+5} = 5$$

weźmy *reszty dopełnicze*, które dla rozróżnienia od reszt poprzedzaiących kreskuiąc, otrzymamy według n. 3.

$$r'_{6p+3} = 1 \qquad r'_{6p+4}\ 3 \qquad r'_{6p+5} = 2:$$

zkąd uwaga ta, że $r_{6p} = r'_{6p+3} = 1$, $r_{6p+1} = r'_{6p+4} = 3$, $r_{6p+2} = r'_{6p+5} = 2$, prowadzi nas do prawidła daleko krótszego, bo w przypadku tym

$$R = \frac{a \times 1 + b \times 3 + c \times 2 + d \times -1 + e \times -3 + f \times -2 + g \times 1 + h \times 3 + \ldots\ldots\ldots}{7}$$

czyli

$$R = \frac{[(a \times 1 + b \times 3 + c \times 2) + (g \times 1 + h \times 3 + ..) + (.. \quad ..)]}{7}$$

$$- \frac{[(d \times 1 + e \times 5 + f \times 2) + (\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)]}{7}$$

z którego wynika to prawidło.

Ażeby poznać, czyli liczba daną iest podzielna przez 7, *trzeba naprzód liczbę daną podzielić na podziałki o trzech cyfrach, a potém w każdéy podziałce rozmnożyć cyfrę pierwszą od strony prawéy ku lewéy przez* 1, *cyfrę drugą przez* 3, *a cyfrę trzecią przez* 2: *otrzymane ztąd iloczyny w podziałkach nieparzystych, to iest* 1*széy,* 3*éy,* 5*éy... trzeba do siebie dodać,* *i podobne iloczyny w podziałkach parzystych otrzymane do siebie także dodać należy, a ztąd doydziemy do dwóch liczb między któremi, ieżeli różnica będzie = zero, albo równa liczbie podzielnéy przez* 7, *na ten czas i liczba podana będzie podzielna przez* 7 — zastosuymy to prawidło do liczby np. 8737968976471.

$$\begin{array}{l}
8\,|\,7\;3\;7\,|\,9\;6\;8\,|\,9\;7\;6\,|\,4\;7\;1 \\
1\,|\,2\;3\;1\,|\,2\;3\;1\,|\,2\;3\;1\,|\,2\;3\;1 \\
\hline
8 \qquad 18+18+8 \qquad 8+21+1 = 82 \\
\quad 14+9+7 \qquad 18+21+6 = 75 \\
\hline
\end{array}$$

różnica 7 = liczbie podzielnéy przez 7, a tém samém i cała liczba iest podzielna przez 7.

Uwaga. W otrzymaniu iloczynów można wielokrotności liczby 7 opuszczać, bo to nie nadweręża prawa podzielności, a czyni potém dodawanie krótszém; a tak w ostatnim przykładzie można było wypuścić liczby 21, a zamiast liczb 18 pisać tylko liczby 4: zresztą wprawa i przytomność rachuiącego ułatwiaią bardzo to prawidło.

Prawidło podzielności dla liczby 11.

Naznaczaiąc reszty dla liczby 11 otrzymamy w ogólności

$$r_{2p}=1,\; r_{2p+1}=10:$$

a ztąd

$$R=\frac{(a\cdot 1+b.\,10)+(c.\,1+d.\,10)+\ldots}{11}$$

które podaie nam następuiące prawidło:

Aby poznać, czyli liczba dana iest podzielna przez 11, *trzeba liczbę daną podzielić na podziałki dwóch cyfrowe zaczynaiąc od strony prawéy, i liczby w podziałkach tych będące do siebie dodać, a ieżeli summa ztąd wynikaiąca iest podzielna przez* 11, *na ten czas i liczba dana iest podzielna przez* 11.

Przykład: Zobaczmy, czyli liczba dana 70928374 iest podzielna przez 11: w tym celu liczbę tę dzielę na podziałki dwucyfrowe 70|92|83|74, i liczby w tych podziałkach będące do siebie dodaię t: i:

$$70+92+83+74=319$$

z którą liczbą tak samo postępuiąc otrzymuie $3+19=22=$ liczbie podzielnéy przez 11; a ztąd i liczba dana iest podzielna przez 11.

Zamiast reszt r'_{2p+1} użyimy reszt dopełniczych, na ten czas

$$r_{2p+1}=1 \text{ a ztąd}$$

$$R=\frac{a\times 1+b\times -1+c\times 1+d\times -1+\ldots}{11}=\frac{(a+c+e+\ldots)-(b+d+f+\ldots)}{11}$$

które daie nam następne dogodnieysze do wykonania prawidło:

Aby poznać czyli liczba dana iest podzielna przez 11 *trzeba dodać cyfry na mieyscach nieparzystych liczby danéy stoiące, i podobnie należy otrzymać summę cyfr mieysca parzyste zapełniaiących, a dopiero ieżeli różnica między temi dwoma summami iest=zero, lub podzielna przez* 11, *na ten czas i liczba dana iest podzielna przez* 11.

Przykład. Dla téy saméy liczby 70928374 według tego prawidła będzie

$$4+3+2+0=9$$
$$7+8+9+7=31$$

różnica $22=$liczb: podz: przez 11,

ztąd i cała liczba iest podzielna przez 11.

Prawo podzielności przez liczbę 13.

Dla liczby 13 reszty z dzieleń według równań (γ) otrzymane będą $r_{6p}=1$, $r_{6p+1}=10$, $r_{6p+2}=9$, $r_{6p+3}=12$, $r_{6p+4}=3$, $r_{6p+5}=4$, z których prawo podzielności podobnie się iak dla liczby 7 wysławia, a wprowadzaiąc reszty dopełnicze dochodzimy, na mocy tego, że

$$r_{6p} = r'_{6p+3} = 1 \qquad r_{6p+1} = r'_{6p+4} = 10 \qquad r_{6p+2} = r'_{6p+5}\ 9$$

do podobnego prawa dla liczby 13, iakieśmy podali drugie dla liczby 7.

Przykład. Sprobuymy czyli liczba 29614482 iest podzielna przez liczbę 13:

w tym celu tak działam

$$\begin{array}{r|r|l}
2\ 9 & 6\ 1\ 4 & 4\ \ 4\ \ 2 \\
1\,0\,1 & 9\ 1\,0\ 1 & 9\ \ 10\ \ 1 \\
\hline
20+9 & & +36+40+2 = 107 \\
 & 54+10+4 & \qquad\qquad\ = \ \ 68 \\
\hline
\end{array}$$

$39 = 3 \times 13 =$ równe liczbie podzielnéy przez 13, ztąd i cała liczba iest podzielna przez 13.

Tym samym sposobem można w naznaczeniu praw podzielności daléy postępować, i tak dla liczby 17 otrzymamy period reszt ze względem na reszty dopełnicze $= \pm$ (1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5) trudny iuż bardzo, a nawet niepodobny do zachowania go ciągle w pamięci: dla liczby 19 otrzymamy takiż peryod $= \pm$ (1, 10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17) ieszcze dłuższy.. i t. d. dla liczb 23, 29, 31,......: ciekawy iednak i krótki między temi iest peryod dla liczby 37, a ztąd też go tutay wyłożemy

Prawo podzielności dla liczby 37.

W tym celu czyniąc $n = 37$ otrzymamy peryod reszt o trzech tylko liczbach tak że

$$r_{3p} = 1 \qquad r_{3p+1} = 10 \qquad r_{3p+2} = 26.$$

czyli używaiąc reszty dopełniczéy

$$r_{3p} = 1 \qquad r_{3p+1} = 10 \qquad r'_{3p+2} = 11$$

a ztąd

$$R = \frac{(a.1 + b.10) + (d.1 + e.10) + \ldots - (c + f + \ldots).11}{37}$$

czyli „*Ażeby poznać czyli liczba dana iest podzielna przez* 37 *trzeba liczbę daną podzielić na podziałki o trzech cyfrach od prawéy ku lewéy stronie; dodać liczby z dwóch cyfr pierwszych od prawéy ku lewéy do podziałek należących złożone, i od téy summy odciągnąć* 11 *razy wziętą summę cyfr pozostałych trzecich: tym sposobem doydziemy do liczby, która gdy będzie równa zero lub liczbą podzielną przez* 37 *zapewni nas* o *podzielności liczby danéy przez liczbę* 37.

Przykład: Sprobuymy czyli liczba 1951102019 iest podzielna przez 37, tym końcem tak postępuie,

1|951|102|019

$$1 + 51 + 2 + 19 = \ldots\ldots 73$$
$$-11(9 + 1 + 0) = -11 \times 10 = -110$$
$$\overline{\quad -37 =} \text{ liczbie}$$

podzielnéy przez 37: a ztąd i liczba dana iest podzielna przez 37.

Skończę nakoniec rzecz tę na okazaniu następującéy prawdy:

Jeżeli liczbę N *o ilukolwiek bądź cyfrach podzielimy na podziałki, umieszczając w każdéy po tyle cyfr, z ilu licz składa się peryod reszt dla liczby pierwszéy n, różnéy z założenia od liczb pierwszych* 2 *i* 5, *na ten czas liczba ta* N *iest podzielna przez liczbę n, ieżeli summa wynikająca z dodania liczb w podziałkach będących iest podzielna przez tę liczbę n.*

Na okazanie tego uważaymy, że, gdy przez a, b, c,..... l, a_1, b_1, c_1,.... l_1,... i t. d. cechować będziemy cyfry liczbę pewną składające, a mianowicie przez a cyfrę na mieyscu pierwszém, przez b cyfrę na mieyscu drugiém, przez c cyfrę na mieyscu trzeciém,..... i t: d: przez l cyfrę na mieyscu μ, przez a cyfrę na mieyscu $\mu+1$, przez b cyfrę na mieyscu $\mu+2$.... i t: d: od strony prawéy ku lewéy leżącą, na ten czas każda liczba N da się w następuiący sposób wyrazić

$N = l..... cba + l_1 ...... c_1 b_1 a_1 \times 10^\mu + l_2 ..... c_2 b_2 a_2 \times 10^{2\mu} + ... (\alpha)$.

Założywszy teraz, że peryod reszt dla liczby pierwszéy n składa się z α liczb, widzimy, że podzielność liczby N przez liczbę pierwszą n prowadzi nas do tego, ażeby albo każdy wyraz strony drugiéy wyrażenia (α) był podzielny przez liczbę n; albo ażeby reszty z podzielenia każdego z tych wyrazów przez liczbę n wynikaiące dodane do siebie wydały liczbę podzielną przez liczbę n; albo nakoniec ażeby, gdy niektóre z tych wyrazów są podzielne przez liczbę n, wyrazy pozostałe niepodzielne przez liczbę n doprowadziły nas do reszt takich, których summa iest podzielna przez liczbę n, co wszystko iest koniecznem i oczywistém według n; 21 i 43 lecz wszystkim tym przypadkóm uczyni się zadosyć, *ieżeli liczba*

$$l...... cba + l_1 ...... c_1 b_1 a_1 + {}_2..... c_2 b_2 a_2 + ...(\beta)$$

iest podzielna przez liczbę n: bo co do *pierwszego*, ponieważ liczba pierwsza n rożna od liczb 2 i 5 nie może dzielić dokładnie czynniki 10^μ $10^{2\mu}$...... przeto podzielność każdego wyrazu strony drugiéy wyrażenia (α) zależy według n: 30 od podzielności liczb $l.....$ cba, $l_1.... c_1 b_1 a_1$, $l_2.... c_2 b_2 a_2$,.... a tem samem według n 21 podzielność liczby N przez liczbę n zależy także od podzielności summy tych liczb, czyli od podzielności wyrażenia (β): co do *drugiego*, ponieważ każdy wyraz strony drugiéy nie iest podzielny przez liczbę pierwszą n, przeto żaden z dwóch czynników każdego z tych wyrazów nie może bydź według n: 33 podzielny przez tę liczbę n, ale uważając że gdy czynniki 10^μ, $10^{2\mu}$,.... są liczbami z iedności i z μ, z 2μ,.. zer złożonemi, przeto reszty do iakich nas wyrazy strony drugiéy wyrażenia (α) prowadzą, są te same które nam wprost liczby $l_1 \ldots c_1 b_1 a_1$, $l_2 \ldots c_2 b_2 a_2, \ldots$ daią (a); ztąd zatém podzielność liczby N przez liczbę pierwszą n zależy od podzielności summy reszt do których nas liczby te $l \ldots cba$, $l_1 \ldots c_1 b_1 a_1$, $l_2 \ldots c_2 b_2 a_2 \ldots$ i t. d. prowadzą, czyli zważając na prawdę w n: 43 wyłożoną, podzielność liczby N przez liczbę pierwszą n zależy od podzielności summy w wyrażeniu (β) zamkniętéy: nakoniec rozumowanie ostatnie co do *drugiego* połączone z rozumowaniem co do *pierwszego* dowodzi nam przypadku *trzeciego*; a ztąd *ieżeli liczba N o ilukolwiek*.... i t. d.... Cob: do ok:

Prawda ta bardzo nam skraca zastosowanie praw podzielności do liczb wielocyfrowych, albowiem według niéy zastosowanie prawa podzielności dla liczby pierwszéy n do liczby wielucyfrowéy sprowadza się do zastosowania onegoż do liczby tylko μ cyfrowéy, zkąd tutay możemy następujące ogólne prawidło w wykonaniu iak naykrótsze względem podzielności liczb ustanowić.

Ażeby poznać, czyli liczba dana iest podzielna przez liczbę pierwszą n (różną z założenia od liczb pierwszych 2 i 5), *trzeba liczbę tę daną podzielić od strony prawéy ku lewéy na podziałki tylucyfrowe,* z *ilu liczb składa się peryod reszt dla liczby pierwszéy n, i podpisawszy te podziałki pod sobą, należy licz-*

(a) W tém to mieyscu znayduie powód, dla czego my liczbę daną dzielimy na podziałki tylucyfrowe, z ilu liczb składa się period reszt dla liczby n; bo inaczeyby reszty wspomniane nie były te same, albowiem $l \ldots cba$, $l \ldots cba \times 10^{\mu}$ $l \ldots cba \times 10^{2\mu} \ldots$ i t. d. dzielone przez liczbę n w ten czas tylko prowadzą do reszt $r_{\mu 1}$ $r_{2\mu 1}$ $r_{3\mu 1} \ldots$ równych czyli tych samych, gdy μ iest równém liczbie reszt różnych dla liczby n, co wypływa wprost z tego, cośmy pod liczbą 3 na początku ustępu tego powiedzieli.

by w nich będące do siebie dodać: a w ten czas dopiero, ieżeli liczba ztąd wypadająca czyni zadość prawu podzielności dla liczby pierwszéy n, i liczba podana iest podzielna przez liczbę n. — Jeżeliby liczba ta wypadkowa składała się z więcéy cyfr, aniżeli znayduie się liczb w peryodzie reszt dla liczby *n*, to na ten czas podobnie z nią iak z liczbą daną postępuiąc, doydziemy zawsze do liczby tylucyfrowéy, z ilu liczb peryod reszt dla liczby *n* się składa.

Ażebyśmy w zastosowaniu tego prawidła nabrali nieiakieyś wprawy, przerobimy tutay według tego niektóre przykłady iuż wyżéy podane; i tak

1. Chcąc się dowiedzieć, czy liczba 119236734032491 iest podzielna przez liczbę 7, zważając że dla liczby 7 peryod reszt iest o sześciu liczbach, następnie postępuię

```
119|236834|0 3 2 4 9 1
   |       |2 3 6 8 3 4
           |      1 1 9
         -----------------
            2 6 9|4 4 4
            2 3 1|2 3 1
         -----------------
                8+12+4 = 24
          4+18+9       = 31
                       -----
                         7 = liczbie po-
```

dzielnéy przez 7, a ztąd liczba podana iest podzielna przez 7.

2. Chcąc się dowiedzieć, czyli liczba 8377968976471 iest podzielna przez 7 działam podobnie

```
8|737968|976461
        |737968
        |     8
        ---------
       1|714447
        |     1
        ---------
        |714|448
        |231|231
        ---------
            |8+12+8 = 28
   14+3+4           = 21
                    -----
                      7 = liczbie podzielnéy
```

przez 7, a ztąd liczba dana iest podzielna przez 7.

3. Chcąc się dowiedzieć, czyli liczba 29614442 iest podzielna przez 13, zważaiąc że peryod reszt dla liczby 13 iest o sześciu liczbach, działam następnie

```
29| 6 1 4 4 4 2
  |         2 9
  -------------
  | 6 1 4|4 7 1
  | 9 10 1| 9 10 1
  ----------------
         |36+70+1 = 107
   54+10+4        = 68
                  -----
                   39 = 3 X 13 = liczbie
```

podzielnéy przez 13, a ztąd i liczba dana iest podzielna przez 13.

4. Chcąc się dowiedzieć, czyli liczba 1951102019 iest podzielna przez 37, zważaiąc na to, że peryod reszt dla liczby 37 iest o trzech liczbach, działam następnie

```
1|951|102|019
         |102
         |951
         |  1
         -----
        1|073
         |  1
         -----
         |074 = 2. 37 = liczbie podzielnéy przez
```

37 a ztąd i cała liczba iest podzielna przez 37.

III.

Zastosowanie sposobu poprzedzaiącego do liczb pierwszych 2 i 5 i do niektórych liczb złożonych.

Sposób poprzedzaiący daie się zastosować do każdéy liczby, bo n może bydź liczbą całkowitą iakąkolwiek, a tém samém może bydź równém 2 lub 5, 2^n lub 5^n, a dla niektórych nawet liczb złożonych daie wypadki ciekawe: stosuymy go przeto do wynalezienia niektórych praw podzielności:

Prawo podzielności dla 2. Naznaczaiąc reszty dla $n = 2$, otrzymamy $r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = 0$ a ztąd $R = \frac{a.\,1}{2}$, co prowadzi do tego samego prawa, któreśmy wyżéy podali.

Prawo podzielności dla liczby 5. Czyniąc $n = 5$ otrzymuiemy $r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = 0$ a ztąd $R = \frac{a.\,1}{5}$, co prowadzi do wyżéy iuż podanego prawa.

Prawo podzielności dla liczby 4. Czyniąc $n = 4$ otrzymamy $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = r_4 = \ldots = 0$ a ztąd $R = \frac{a.\,1 + b.\,2}{4}$, zkąd wypływa następuiące prawo:

Aby liczba dana była podzielna przez 4, *musi koniecznie cyfra iedności powiększona dwa razy wziętą cyfrą na mieyscu dziesiątek stoiącą wydać liczbę podzielną przez* 4: np. liczba 1996 iest podzielna przez 4, bo $6 + 2.\,9 = 24$ = liczbie podzielnéy przez 4.

Prawo podzielności dla liczby 6. Czyniąc $n = 6$ otrzymamy $r_0 = 1$ $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \ldots = 4$ ztąd

$$R = \frac{a.\,1 + (b + c + d + e + \ldots).\,4}{6}$$

a tém samém: *Aby liczba dana była podzielna przez* 6 *musi koniecznie cyfra na mieyscu iedności stoiąca powiększona* 4 *razy wziętą summą cyfr pozostałych liczby danéy wydać liczbę podzielną przez* 6: i tak np. liczba 2364234 iest podzielna przez 6 bo

$$4+4\,(3+2+46+3+2)=4+4.\,20=84=$$

liczbie podzielnéy przez 6, bo podobnie $4+8.\,4=36=6.\,6$.

Prawo podzielności dla liczby 8. Czyniąc $n=8$ otrzymuiemy

$$r_0=1,\ r_1=2,\ r_2=4,\ r_3=r_4=r_5=r_6=\ldots\ldots=0$$

a ztąd $R=\frac{a.\,1+b.\,2+c.\,4}{8}$ zkąd prawo

Aby liczba dana była podzielna przez 8, *trzeba ażeby cyfra iedności powiększona dwa razy wziętą cyfrą dziesiątek i* 4 *razy wziętą cyfrą set wydała liczbę podzielną przez* 8, i tak np. liczba 358624 iest podzielna przez 8 bo $4+2.2+4.\,6=32=$ liczbie podzielnéy przez 8.

Prawo podzielności dla liczby 9.— Czyniąc $n=9$ otrzymamy $r_0=r_1=r_2=\ldots\ldots$ a w ogólności $r_p=1$ ztąd

$$R=\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{9}$$

podobnie iak dla liczby 3, zkąd prawo wynika następuiące:

Każda liczba, któréy summa cyfr iest podzielną przez 9, *iest także podzielną przez* 9.

Prawo podzielności dla liczby 12. Dzieląc następne potęgi z 10ciu przez 12 otrzymamy $r_0=1,\ r_1=10,\ r_2=r_3=r_4=\ldots=4$

a ztąd $R=\frac{a.\,1+b.\,10+(c+d+e+f+\ldots).\,4}{12}$

czyli: *Ażeby liczba dana była podzielna przez* 12 *trzeba, ażeby liczba złożona z dwóch iéy cyfr pierwszych powiększona* 4 *razy wziętą summą cyfr pozostałych była podzielną przez* 12, i tak np. liczba 634729464 iest podzielną przez 12 bo $64+(4+9+2+7+4+2+6).4=204=$ liczbie podzielnéy przez 12, bo podobnie $4+2.4=12=$ liczbie podzielnéy przez 12.

Prawo podzielności dla liczby 15. Dla $n=15$ otrzymamy $r_0=1$, $r_1=r_2=r_3=\ldots\ldots=10$ a ztąd

$$R=\frac{a+(b+c+d+e+f+\ldots\ldots).10}{15}$$

czyli: *Ażeby liczba dana była podzielna przez* 15 *trzeba ażeby cyfra na mieyscu iedności stoiąca powiększona dziesięć razy wziętą summą cyfr pozostałych wydała liczbę podzielną przez* 15: i tak np, liczba 36218775 iest liczbą podzielną przez 15, bo $5+(7+8+1\pm2+6+3).10=345=$ liczbie podzielnéy przez 15, bo podobnie dla téy liczby iest $(3+4).10+5=75=5.15=$ licz. podz. przez 15.

Prawo podzielności dla liczby 18. Czyniąc $n=18$ otrzymuiemy $r_0=1$, $r_1=r_2=r_3=r_4=\ldots\ldots=10$, a ztąd podobnie iak dla liczby 15.

Ażeby liczba była podzielna przez 18 *trzeba, ażeby cyfra na mieyscu iedności stoiąca powiększona dziesięć razy wziętą summą cyfr pozostałych wydała liczbę podzielną przez* 18: i tak np. liczba 357946236 iest podzielną przez 18, bo $6+(3+2+6+4+9+7+5+3).10=396=$ liczbie podzielnéy przez 18, bo i dla téy liczby iest podobnie $6+(3+9).10=126$, a dla téy $6+(1+2).10=36=2.18=$ liczbie podzielnéy przez 18.

Prawo podzielności dla liczby 27. Dla liczby téy otrzymuiemy peryod o trzech tylko liczbach

$$r_p=1,\ r_{p+1}=10,\ r_{p+2}=19$$

czyli używaiąc reszty dopełniczéy

$$r_p = 1,\ r_{p+1} = 10,\ r'_{p+2} = 8$$

zkąd czytamy podobne prawo iak dla liczby 37.

Tym samym sposobem daléy postępuiąc można stanowić prawa podzielności i dla innych liczb złożonych, a w szczególności szukaiąc praw podzielności dla liczb będących potęgami z 3ch lub 7miu doszedłem do ciekawych peryodów reszt, nad któremi iednak tutay zabawiać się nie chcę, ale rzecz tę skończę na podaniu praw następuiących:

Prawa podzielności dla liczb (11), 33, 99, 111, 333, 999..... *a w szczególności dla każdéy liczby, któréy cyframi są same tylko iedynki, tróyki, lub dziesiątki.* Dzieląc przez 33 lub 99 różne potęgi z 10ciu otrzymamy reszty $r_p = 1$, $r_{p+1} = 10$, ztąd

Każda liczba iest podzielna przez 33 *lub przez* 99, *skoro summa liczb podziałek dwucyfrowych liczby danéy iest podzielną przez* 33 *lub przez* 99: (tutay należy także podobne prawidło podzielności dla liczb 11, któreśmy iuż wyżéy podali).

Dzieląc znowu różne potęgi liczby 10 przez 111, 333, 999 otrzymamy reszty $r_p = 1$, $r_{p+1} = 10$, $r_{p+2} = 100$ a ztąd

Każda liczba iest podzielna przez 111 *lub* 333 *lub* 999, *skoro summa liczb iéy podziałek trzech cyfrowych iest podzielna przez* 111 *lub* 333 *lub* 999.

Dla 1111, 3333, 9999, otrzymamy reszty 1, 10, 100, 1000: i t. d. a w ogólności:

Chcąc poznać czyli liczba dana iest podzielna przez liczbę, któréy cyframi są same iedynki, albo same tróyki, albo same dziesiątki, trzéba liczbę daną podzielić od strony prawéy ku lewéy na podziałki tylucyfrowe, ile samych iedynek— lub samych troiek— lub samych dziewiątek— wchodzi w skład liczby, któréy prawo podzielności stosuiemy; liczby w tych podziałkach będące dodać do siebie, a w ten czas dopiero ieże-

li summa ztąd wypadaiąca iest przez tę liczbę podzielną, i liczba dana iest przez nią podzielną.

Przykłady: Sprobuymy, czyli liczba 322187884 nie iest podzielna przez 99: w tym celu następnie postępuię

3|22|18|71|84

3+22+18+71+84=198= liczbie podzielnéy przez 99, bo dla téy liczby iest 1+98=99= liczbie podz. przez 99, a ztąd i liczba dana iest podzielna przez 99.

Sprobuymy czyli liczba 19,295,019 nie iest podzielna przez 333 w tym celu dodaie 19+295+19=333= liczbie podzielnéy przez 333, a ztąd widzę że i liczba dana iest podzielna przez 333.

Uwaga. Wspomnieć tutay w krótkości powinienem, że to wszystko, cośmy przy końcu ust: II. powiedzieli, da się i tutay zastosować do praw podzielności wszystkich tych liczb, dla których niedochodzimy do reszty zero, i to do niektórych wprost tak iak tam podane było, iak np. do prawa podzielności dla liczby 27; do innych zaś z pewną modyfikacyą którą łatwo spostrzec można z wzorów daiących nam prawa podzielności dla liczb 6, 12, 15, 18, a ieszcze lepiéy z wzorów, z których czytamy prawa podzielności dla liczb np. 35, 52, 875, których to praw podzielność wynalezienie według dopiero co wskazanego sposobu własnéy chęci czytelnika zostawiam.

IV.

Ustanowienie praw podzielności dla liczb złożonych, gdy wiadome mamy prawa podzielności dla liczb pierwszych, z których liczby te są złożone; w tym tylko iednak przypadku, gdy liczby te pierwsze nie wchodzą więcéy nad ieden raz za czynniki do liczb tych złożonych.

Powiedzieliśmy w n: 38 i n. 49 że ieżeli liczba pewna iest podzielna przez dwie, trzy, cztery,... lub więcéy liczb pierwszych między sobą, lub pierwszych bezwzględnych, na ten czas liczba ta iest także podzielną i przez iloczyny z tych liczb wynikaiące. Twierdzenie to połączone z prawami podzielności dopiero co podanemi prowadzi nas do praw podzielności dla liczb złożonych: i tak. „Jeżeli liczba N iest podzielna przez 2 i przez 3 na ten czas liczba ta iest także podzielna przez iloczyn $2 \times 3 = 6$: zkąd

Każda liczba parzysta, któréy summa cyfr iest podzielna przez 3, *iest podzielna przez* 6.

„Jeżeli liczba N iest podzielna przez 3 i przez 5, na ten czas liczba ta iest podzielna i przez iloczyn $3 \times 5 = 15$, a ztąd

Każda liczba zakończona na 5 *lub* 0, *któréy summa cyfr iest podzielna przez* 3, *iest podzielna przez* 15:

Jeżeli	liczba	N	iest	podz.	przez	2	i przez	7,	iest	też	podz.	i	przez	14.
„	„	N	„	„	„	3	„	7	„	„	„	„	„	21.
„	„	N	„	„	„	3	„	13	„	„	„	„	„	39.
„	„	N	„	„	„	7	„	11	„	„	„	„	„	77.

i t. d.

Możemy nakoniec składać z sobą prawa podzielności liczb pierwszych z prawami podzielności liczb złożonych, a nawet prawa podzielności liczb złożonych z prawami podzielności liczb także złożonych, byleby liczby te tak w pierwszym iako i w drugim przypadku były pierwszemi między sobą, i tak:

Jeżeli	liczba	N	iest	podz.	przez	3	i przez	4,	nateneczas	iest też	podz. i przez	12.
„	„	N	„	„	„	2	„	9	„	„	„	18.
„	„	N	„	„	„	4	„	5	„	„	„	20.
„	„	N	„	„	„	5	„	6	„	„	„	30.
„	„	N	„	„	„	3	„	8	„	„	„	24.
„	„	N	„	„	„	4	„	9	„	„	„	36.
„	„	N	„	„	„	5	„	9	„	„	„	45.

i t. d

NIEKTÓRE ZADANIA z ARYTMETYKI, w KTÓRYCH TEORYA PODZIELNOŚCI LICZB MA SWOIE ZASTOSOWANIE.

ZADANIE I. *Daną liczbę rozłożyć na iéy czynniki pierwsze.*

Rozwiązanie: 1. Niechay liczba dana którą na czynniki pierwsze rozłożyć mamy będzie N, na ten czas dzieląc liczbę N (ze względem na niektóre wiadome prawa podzielności) przez każdą z liczb pierwszych w porządku naturalnym po sobie następuiących 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.... niechay *np.* liczba a będzie naymnieyszą z liczb pierwszych, przez którą liczba N iest dokładnie podzielną, na ten czas gdy dzielenie liczby N przez liczbę a wykonamy, a ztąd wynikaiący iloraz nazwiemy Q' będzie $N: a = Q'$ czyli $N = aQ'$: probuymy teraz czyli Q' nie iest podzielném przez a, a ieżeli to ma mieysce, to z uskutecznionego dzielenia otrzymuiemy podobnie $Q' = aQ''$, ztąd $N = a^2.Q''$; probuymy znowu, czyli Q'' nie iest ieszcze podzielném przez a, a gdy to ma mieysce, na ten czas otrzymamy znowu $N = a^3.Q'''$.... i w ogólności gdy dzielenia te następne przez liczbę a, n razy, wykonamy, a za każdą razą doydziemy do tego, że iloraz poprzedzaiący iest ieszcze podzielny przez a znaydziemy $N = a^n.N'$ gdzie N' iest liczbą całkowitą: ieżeli teraz uskuteczniaiąc dzielenie liczby N' przez a doydziemy do tego, że liczba ta nie iest iuż podzielną przez a, na ten czas pewni iesteśmy według tego, że każdy czynnik iest dzielnikiem dokładnym liczby téy, w którey skład on wchodzi, że liczba N' nie zamyka w sobie czynnika pierwszego a, czyli że z liczby N wyrzuciliśmy czynnika a tyle razy, ile razy się to uskutecznić dało.

Ponieważ każdy czynnik pierwszy według n : 31 różny od czynnika a dzieląc dokładnie liczbę N dzielić koniecznie musi liczbę N', przeto wynalezienie czynników pierwszych liczby N różnych od liczby pierwszéy a przywodzi się do rozłożenia na czynniki pierwsze liczby N', z którą tym samym sposobem postępować należy iakieśmy postępowali z liczbą N, z tą tylko uwagą, że ponieważ a iest naymnieyszą z liczb pierwszych liczbę N dokładnie dzielących, żadna liczba pierwsza mniéysza od a nie dzieli iuż dokładnie liczby N', bo gdyby liczba mniéysza od a dzieliła liczbę N', na ten czas musiałaby dzielić i wielokrotność $a^n . N'$ czyli N, co bydź nie może bo liczba a iest naymniéyszą z liczb liczbę N dokładnie dzielących: w wynaydywaniu więc czynnika pierwszego liczby N' nie trzeba zaczynać od początkowych liczb pierwszych, ale tylko trzeba zacząć od liczby pierwszéy naybliżéy większéy od a: ieżeli teraz z następnych liczb pierwszych naymniéysza liczb: pierws: dzieląca dokładnie liczbę N równa się b, na ten czas wyczerpawszy tego czynnika tyle razy ile razy się to da np. n' razy, otrzymamy podobnie iak wyżéy

$$N' = b^{n'} . N'' \text{ a ztąd } N = b^{n} . a^{n'} . N''.$$

Postępuiąc tak samo znowu z liczbą N'', dla któréy proby podzielenia dokładnego zacząć należy od liczby pierwszéy naybliżéy $>$ od b, doydziemy, cechuiąc naymnieyszą z liczb pierwszych liczbę N'' dzielących przez c, a liczbę razy ile ta wchodzi w skład téy liczby N'' przez n'', do $N = a^n . b^{n'} . c^{n''} . N'''$ i t. d. dotąd dopóki nieprzyidziemy do ilorazu $N^{(n)}$ będącego albo liczbę pierwszą albo iakąkolwiek potęgą liczby pierwszéy, co koniecznie według n. 19. nastąpić musi, a na ten czas Zadanie nasze zostanie skończoném, i liczbę N rozłożoną na czynniki pierwsze otrzymamy tego kształtu

$$N = a^n . b^{n'} . c^{n''} . d^{n'''} \ldots\ldots k^{n^{(m)}}$$

gdzie *a*, *b*, *c*, *d*,.... *k*, są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, a n n′ n″.... $n^{(m)}$ liczbami iakiemikolwiek całkowitemi.

2. Zadanie to w tym przypadku, gdy liczba dana N iest liczbą pierwszą bezwzględną przywodzi się do tego

Jakim sposobem możemy poznać, czyli liczba dana iest liczbą pierwszą lub liczbą złożoną:

a co większa zadanie pierwsze polega zupełnie na zadaniu dopiéro co wysłowioném, bo w rzeczy saméy ciągle w zadaniu poprzedzaiącém szukamy, czyli ilorazy następne N′, N .... są liczbami pierwszemi lub złożonemi.

Ażeby poznać czyli liczba dana iest liczbą pierwszą lub złożoną trzeba probować czyli liczba ta nie iest podzielną przez iednę z liczb pierwszych od niéy mniéyszych, a zatém trzeba mieć wiadome wszystkie liczby pierwsze mnieysze od liczby danéy, do czego służą nam Tablice liczb pierwszych, o których niżéy mówić będziemy, i wykonać tyle dzieleń w przypadku tym, gdy liczba dana w rzeczy saméy iest liczbą pierwszą, ile liczb pierwszych przed nią w porządku liczb naturalnych się znayduie: widziemy przeto iak długiém i nudném iest wykonanie tego Zadania, którego rozwiązanie następuiąca prawda bardzo nam skróci.

Jeżeli liczba N nie iest dokładnie podzielną przez żadną z liczb pierwszych całkowitych mnieyszych od $\sqrt{N}$, na ten czas liczba ta nie iest téż podzielną i przez żadną liczbę pierwszą większą od $\sqrt{N}$, a tém samem iest liczbą pierwszą.

Na dowodzenie tego przypuśćmy że są iakiekolwiek dwie liczby A i B, których iloczyn równa się N, i niechay $\sqrt{N} = R$, na ten czas $A.B = R.R$ a ztąd

$$\frac{A}{R} = \frac{R}{B}:$$

Ażeby rowność ta miała mieysce, potrzeba ażeby, gdy A iest większém od R, w tym samym czasie B koniecznie mnieyszém było od R, inaczéy bowiem liczba $A:R>1$ równałaby się liczbie $R:B<1$, co bydź nie może; a ztąd wynika że ieżeliby liczba $A>R=\sqrt{N}$ była dzielnikiem dokładnym liczby N, na ten czas koniecznie znaydowaćby się musiała liczba $B<R$ liczbę N dokładnie dzieląca, co się sprzeciwia założeniu, bośmy powiedzieli, że żadna liczba mnieysza od R nie dzieli liczby N, przeto i to bydź nie może, ażeby liczba N była podzielną przez którą z liczb pierwszych większych od R czyli $\sqrt{N}$ c:b:d:ok:

Z twierdzenia tego wynika, że dla przekonania się czyli liczba N dana iest liczbą pierwszą, dość iest probować czyli liczba dana nie iest podzielną przez iednę z liczb pierwszych mnieyszych od liczby naybliżéy większéy od $\sqrt{N}$: co prowadzi nas także i do następuiącego prawidła: *Jeżeli w badaniu czyli liczba dana iest pierwszą lub złożoną przy wykonywaniu dzieleń przez liczby pierwsze po sobie następuiące doydziemy do ilorazu mnieyszego od Dzielnika, na ten czas liczba dana iest liczbą pierwszą:* bo z zasad dzielenia wynika, że iloraz iest tém mnieyszy, im dzielnik iest większy, gdy dzielna ta sama zostaie: ieżeli przeto iednę i tę samą liczbę daną dzielemy przez coraz liczbę większą, i w końcu doydziemy do tego, że iloraz iest mnieyszy od dzielnika, na ten czas dzielnik ten musi bydź większy od iednego z dwóch czynników równych między sobą téyże liczby, czyli musi bydź mnieyszym od pierwiastku kwadratowego téy liczby, a ztąd według twierdzenia dopiéro podanego liczba dana musi bydź na ten czas pierwszą.

Przykłady: Trzeba się przekonać czyli liczba 8123 iest liczbą pierwszą lub złożoną:

W tym celu uważam, że gdy liczba 8123 nie iest podzielna, stosuiąc prawa podzielności, ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5, 7, 11, 13 i 37: przeto probuiąc podzielności liczby téy przez inne liczby pierwsze trzeba dzielenia te probiercze wykonywać, aż do liczby pierwszéy od $\sqrt{8123}$, czyli mnieyszéy od liczby 91, a zatém aż do 89:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 8123 & 17 \\ \hline
\text{reszta} & 14 & 477 \text{ iloraz}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
8123 & 19 \\ \hline
10 & 427
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
8123 & 23 \\ \hline
4 & 355
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
8123 & 29 \\ \hline
3 & 280
\end{array}
\quad \text{i t. d.}$$

przechodząc przez wszystkie liczby pierwsze aż do 89 włącznie, przekonamy się, że liczba ta 8123 nie iest podzielną przez żadną z tych liczb pierwszych, a tém samém iest liczbą pierwszą.

Trzeba się przekonać czyli liczba 10783 iest liczbą pierwszą lub złożoną.

Gdy żadnemu z praw podzielności podanych liozba ta nie czyni zadość, przeto wykonywam dalsze dzielenia

$$\begin{array}{rr|l}
 & 10783 & 17 \text{ il:} \\ \hline
\text{reszty} & 5 & 534
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
10783 & 19 \\ \hline
10 & 567
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
10783 & 23 \\ \hline
19 & 468
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
10783 & 29 \\ \hline
24 & 371
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
10783 & 31 \\ \hline
26 & 347
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
10783 & 41 \\ \hline
0 & 263
\end{array}$$

i widzę z ostatniego, że liczba ta iest złożoną z dwóch czynników 41 i 263 pierwszych, bo i liczba ta ostatnia iest pierwszą, ponieważ nie iest podzielną przez żadną z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 13, 17 $\sqrt{263}$.

3. Przy rozwiązaniu tych zadań trzeba mieć pod ręką szereg liczb pierwszych ciągle po sobie według porządku naturalnego następuiących, ażeby wiedzieć przez które liczby mamy liczbą daną następnie dzielić dla przekonania się o tém, czyli liczba ta iest pierwszą; czyli trzeba mieć pod ręką Tablice liczb pierwszych: takowe Tablice znayduią się w wielu dziełach, iako to

Johann Gottlob Krügers — Gedanken von der Algebra, nebst den Primzahlen von 1 bis 100000 (na tytule iest tutay pomyłka drukarska, gdzie zamiast sto tysięcy stoi million t. i. 1000000) Halle r. 1746.

Lambert's Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Berlin 1770 — tu znayduie się Tablica liczb pierwszych od 1 do 102000.

Są także tablice, w których nie tylko znayduią się same liczby pierwsze, ale i wszystkie inne liczby rozciągaiące się do pewnéy granicy, gdzie przy każdéy liczbie złożonéy znayduie się liczba pierwsza naymnieysza, przez którą liczba ta iest podzielną: takowe Tablice do rozwiązania tych tu zadań bardzo dogodne znaleść można w dziełach następuiących:

Johann Mich. Poetii gründliche Anleitung zu der jetzt unter den Gelehrten üblichen arithmethischen Wissenschaften vermittelst einer parallelen Algebra — Frkf. u. Leipzig 1728. tu przy końcu znayduie się *Anatomia numerorum* od 1 do 10000: — te same tablice przedrukowano i w innych dziełach iako to np. w dziele

Vollständ. mathem. Lexicon II Th. Leipzig 1742.

Dogodnieysze od poprzedzaiących tablic podali *Lambert*, *Felkel* i *Hindenburg*. *Felkel* rozciągnął takie Tablice od 1 do 2000000 i te znayduią się w rękopismie w Archivum Wideńskim — z tych Tablic wyszło z druku 17 arkuszy, które obeymuią czynniki naymnieysze wszystkich liczb od 1 do 408000 niepodzielnych przez 2, 3, i 5, — *Hindenburg* miał obliczyć tablice ieszcze co do użycia od poprzedzaiących dogodnieysze, ale te niewiem czyli drukiem ogłoszone zostały — w Wegi logarytmach „*Vega's* logarithmisch trigonometrische Tafeln Leipz 1797," znayduie się Tablica liczb od 1 do 102000 niepodzielnych przez 2, 3, i 5 wraz z ich naymnieyszemi czynnikami, nakoniec nayobszernieysze podobne Tablice są te, które *Burckhardt* w r. 1817 wydał; tytuł ich iest następuiący:

Table des diviseurs pour tous les nombres du 1er, 2e, 3e Million avec les nombres premiers, qui s'y trouvent Paris 1817.

4. Jakim sposobem Tablice takowe naykróciéy i naypewniéy układaią się, nie możemy tutay tego wyłożyć, bo to zależy od wielu ciekawych i ważnych własności liczb pierwszych, które nam szczególniéy podali Fermat, Euler, Kraft, Lambert, Hindenburg, Gauss, Legendre, i inni: wyłożemy przeto tu tylko sposób nayprostszy i naydawnieyszy Eratostenesa służący do wynaydowania liczb pierwszych, który zazwyczay *Sitem Eratostenesa* zowią — i przyłączemy według sposobu podobnego do sposobu Eratostenesa obliczoną tablicę liczb od 1 do 2000 wraz z ich czynnikami naymnieyszemi.

Sposób Eratostenesa wynalezienia liczb pierwszych.

Gdy Eratostenes Bibliotekarz Muzeum Alexandryiskiego na lat 280 przed nar. Jez. Chryst. żyiący chciał sobie ułożyć tablicę liczb pierwszych na ten czas napisał on wszystkie Liczby nieparzyste w porządku naturalnym na długiéy Tablicy drewnianéy (liczby parzyste wyrzucił, bo wszystkie są liczbami złożonemi iako podzielne przez 2). To uczyniwszy wziął naprzód liczbę 3 i dodał do niéy 3, do téy summy dodał znowu 3 i t. d. a ile razy w dodawaniu takim otrzymał liczbę nieparzystą tyle razy pod tą liczbą wykroił dziurę w swéy Tablicy drewnianéy, przypuszczaiąc, że liczby te wypadły przez zrobione dziury — tak samo postępował dla liczby 5 daléy dla liczby 7, 11, 13, 17,... i t. d., a tym sposobem pozostały mu się na iegoTablicy same tylko liczby pierwsze, którą to tak podziurawioną

TABLICA

Liczb pierwszych i czynników naymnieyszych liczb naturalnych od 1 do 2000.

	1	3	5	7	9		1	3	5	7	9		1	3	5	7	9
0	1	1	1	1	3	67	11	1	3	1	7	134	3	17	5	3	19
1	1	1	3	1	1	68	3	1	5	3	13	135	7	3	5	23	3
2	3	1	5	3	1	69	1	3	5	17	3	136	1	29	3	1	37
3	1	3	5	1	3	70	1	19	3	7	1	137	3	1	5	3	7
4	1	1	3	1	7	71	3	23	5	3	1	138	1	3	5	19	3
5	3	1	5	3	1	72	7	3	5	1	3	139	13	7	3	11	1
6	1	3	5	1	3	73	17	1	3	11	1	140	3	23	5	3	1
7	1	1	3	7	1	74	3	1	5	3	7	141	17	3	5	13	3
8	3	1	5	3	1	75	1	3	5	1	3	142	7	1	3	1	1
9	7	3	5	1	3	76	1	7	3	13	1	143	3	1	5	3	1
10	1	1	3	1	1	77	3	1	5	3	19	144	11	3	5	1	3
11	3	1	5	3	7	78	11	3	5	1	3	145	1	1	3	31	1
12	11	3	5	1	3	79	7	13	3	1	17	146	3	7	5	3	13
13	1	7	3	1	1	80	3	11	5	3	1	147	1	3	5	7	3
14	3	11	5	3	1	81	1	3	5	19	3	148	1	1	3	1	1
15	1	3	5	1	3	82	1	1	3	1	1	149	3	1	5	3	1
16	7	1	3	1	13	83	3	7	5	3	1	150	19	3	5	11	3
17	3	1	5	3	1	84	29	3	5	7	3	151	1	17	3	37	7
18	1	3	5	11	3	85	23	1	3	1	1	152	3	1	5	3	11
19	1	1	3	1	1	86	3	1	5	3	11	153	1	3	5	29	3
20	3	7	5	3	11	87	13	3	5	1	3	154	23	1	3	7	1
21	1	3	5	7	3	88	1	1	3	1	7	155	3	1	5	3	1
22	13	1	3	1	1	89	3	19	5	3	29	156	7	3	5	1	3
23	3	1	5	3	1	90	17	3	5	1	3	157	1	11	3	19	1
24	1	3	5	13	3	91	1	11	3	7	1	158	3	1	5	3	7
25	1	11	3	1	7	92	3	1	5	3	1	159	37	3	5	1	3
26	3	1	5	3	1	93	7	3	5	1	3	160	1	7	3	1	1
27	1	3	5	1	3	94	1	23	3	1	13	161	3	1	5	3	1
28	1	1	3	7	17	95	3	1	5	3	7	162	1	3	5	1	3
29	3	1	5	3	13	96	31	3	5	1	3	163	7	23	3	1	11
30	7	3	5	1	3	97	1	7	3	1	11	164	3	31	5	3	17
31	1	1	3	1	11	98	3	1	5	3	23	165	13	3	5	1	3
32	3	17	5	3	7	99	1	3	5	1	3	166	11	1	3	1	1
33	1	3	5	1	3	100	7	17	3	19	1	167	3	7	5	3	23
34	11	7	3	1	1	101	3	1	5	3	1	168	41	3	5	7	3
35	3	1	5	3	1	102	1	3	5	13	3	169	19	1	3	1	1
36	19	3	5	1	3	103	1	1	3	17	1	170	3	13	5	3	1
37	7	1	3	13	1	104	3	7	5	3	1	171	29	3	5	17	3
38	3	1	5	3	1	105	1	3	5	7	3	172	1	1	3	11	7
39	17	3	5	1	3	106	1	1	3	11	1	173	3	1	5	3	37
40	1	13	3	11	1	107	3	29	5	3	13	174	1	3	5	1	3
41	3	7	5	3	1	108	23	3	5	1	3	175	17	1	3	7	1
42	1	3	5	7	3	109	1	1	3	1	7	176	3	41	5	3	29
43	1	1	3	19	1	110	3	1	5	3	1	177	7	3	5	1	3
44	3	1	5	3	1	111	11	3	5	1	3	178	13	1	3	1	1
45	11	3	5	1	3	112	19	1	3	7	1	179	3	11	5	3	7
46	1	1	3	1	7	113	3	11	5	3	17	180	1	3	5	13	3
47	3	11	5	3	1	114	7	3	5	31	3	181	1	7	3	23	17
48	13	3	5	1	3	115	1	1	3	13	19	182	3	1	5	3	31
49	1	17	3	7	1	116	3	1	5	3	7	183	1	3	5	11	3
50	3	1	5	3	1	117	1	3	5	11	3	184	7	19	3	1	43
51	7	3	5	11	3	118	1	7	3	1	29	185	3	17	5	3	11
52	1	1	3	17	23	119	3	1	5	3	11	186	1	3	5	1	3
53	3	13	5	3	7	120	1	3	5	17	3	187	1	1	3	1	1
54	1	3	5	1	3	121	7	1	3	1	23	188	3	7	5	3	1
55	19	7	3	1	13	122	3	1	5	3	1	189	31	3	5	7	3
56	3	1	5	3	1	123	1	3	5	1	3	190	1	11	3	1	23
57	1	3	5	1	3	124	17	11	3	29	1	191	3	1	5	3	19
58	7	11	3	1	19	125	3	7	5	3	1	192	17	3	5	41	3
59	3	1	5	3	1	126	13	3	5	7	3	193	1	1	3	13	7
60	1	3	5	1	3	127	31	19	3	1	1	194	3	29	5	3	1
61	13	1	3	1	1	128	3	1	5	3	1	195	1	3	5	19	3
62	3	7	5	3	17	129	1	3	5	1	3	196	37	13	3	7	11
63	1	3	5	7	3	130	1	1	3	1	7	197	3	1	5	3	1
64	1	1	3	1	11	131	3	13	5	3	1	198	7	3	5	1	3
65	3	1	5	3	1	132	1	3	5	1	3	199	11	1	3	1	1
66	1	3	5	23	3	133	11	31	3	7	13						

nazwano *sitem Eratostenesa;* sposób ten Eratostenesa podali nam Nikomachus i Boetius. — Podobnie w ułożeniu Tablicy tutay załączonéy postępowano, podpisuiąc pod liczbami złożonemi czynnika ich naymnieyszego, a tym sposobem przechodząc przez wszystkie Liczby pierwsze od 1 do liczby mnieyszéy od $\sqrt{2000}$ a zatem do 43 pozostały się kratki próżne te, które były pod liczbami pierwszemi, te *iednością* zapełniono, iedność zatem w téy Tablicy iest cechą liczby pierwszéy, inne zaś liczby w kratkach znayduiące się są czynnikami naymnieyszemi liczb, które łatwo w Tablicy wynayduiemy, uważaiąc że układ téy Tablicy o podwóyném weyściu znanym iest dokładnie z tablic logarytmów liczb naturalnych: użycie zaś iéy iest do przekonania się, czyli liczba dana mnieysza od 2000 iest pierwsza lub złożona, a oraz do naznaczenia w ostatnim przypadku czynników pierwszych liczby téy złożonéy: obiaśniymy z resztą sobie rzecz tę kilkoma przykładami.

Przykłady. Chcę się dowiedzieć czy liczba 641 iest pierwszą lub złożoną: w tym celu szukam w kolumnie pierwszéy liczby 64, a w górze biorę kratkę w któréy iest liczba 1, i widzę że pod tą kratką przy 64 stoi iedność, ztąd liczba 641 iest liczbą pierwszą.

Chcę się dowiedzieć czy liczba 1869 iest liczbą pierwszą lub złożoną: w tym celu szukam w kolumnie pierwszéy liczby 186, a w górze biorę 9, i na ten czas widzę że pod tą w kolumnie pozioméy, w któréy znayduie się liczba 186, iest liczba 3, ztąd liczba 1869 nie iest pierwszą, ale złożoną. Chcąc iéy teraz czynniki pierwsze wyznaczyć widzę że 1°. $1869 = 3 \times 623$
szukaiąc w Tablicy 623 znayduie, że liczba ta iest podzielna przez 7 a ztąd $623 = 7 \times 89$
szukaiąc znowu w Tablicy liczby 89 znayduię że liczba ta iest pier-

wszą, a ztąd przekonany iestem, że czynnikami pierwszemi liczby 1869 są liczby 3, 7, 89; czyli że

$$1869 = 3.7.89.$$

ZADANIE II. *Maiąc rozłożoną liczbę daną na czynniki pierwsze, naznaczyć wszystkie dokładne dzielniki téyże liczby.*

Rozwiązanie 1. Ponieważ według n. 39 liczba N podzielna przez liczby pierwsze a, b, c, d, ... iest też podzielna i przez różne iloczyny, które z tych liczb biorąc ie po dwie, po trzy, po cztery,... i t. d. utworzyć możemy, przeto aby z wiadomych czynników pierwszych liczby danéy otrzymać wszystkie czynniki złożone, czyli dzielniki dokładne trzeba składać z danych liczb pierwszych te różne iloczyny, z ktorych, gdy te są właśnie szukanymi dzielnikami, żadnego opuścić nie należy; i dla tego to, ażeby się zapewnić że żaden dzielnik dokładny nie został wypuszczonym, trzeba wdziałaniu tem trzymać się pewnego porządku, który co do wykonywania naykorzystnieyszy iest następuiący: piszę nayprzód czynniki *pierwsze* pionowo pod sobą w tym porządku, ażeby czynnik *pierwszy* naywiększy był naypierwszym a potem coraz mnieysze aż do 1, którą także dopisuię z powodu, o którym niżéy powiemy: potem mnożę czynnik *pierwszy* z porządku także pierwszy przez czynnik drugi pod nim stoiący, i iloczyn ztąd wynikaiący piszę obok tego czynnika drugiego, przez czynnik znowu *pierwszy* z porządku trzeci mnożę czynnika *pierwszego* z porządku pierwszego, czynnika *pierwszego* drugiego; i czynnika złożonego przy nim stoiącego, i iloczyny ztąd wynikaiące piszę w linii poziomé
y obok czynnika tego trzeciego: przez czynnik *pierwszy* z porządku czwarty, i przez każdy czynnik *pierwszy* następny mnożę wszystkie poprzedzaiące czynniki *pierwsze* i złożone, pisząc ie zawsze w linii poziomey obok czynnika *pierwszego*, przez któren wszystkie poprzedzaiące czynniki mnożę: w tym tylko szczególnym przypadku, gdy czynnik który *pierwszy*, dwa, trzy, cztery,.. i t. d. razy znayduie się tenże sam w liczbie daney, nie mnożę przez tenże czynnik, gdy go drugi, trzeci raz i t. d. uważam wszystkie czynniki poprzedzaiące, ale tylko czynnika poprzedzaiącego pierwszego, i czynniki złożone do niego należące. Tym sposobem porządnie i pewnie naznaczemy wszystkie dzielniki dokładne liczby daney.

Przykład do zad. I i II. Trzeba liczbą 403650 rozłożyć na iey czynniki pierwsze i naznaczyć wszystkie iey dzielniki dokładne: w tym celu używaiąc praw podzielności widzę że liczba dana

$$403650 = 10 . 40365 = 2 . 5 . 5 . 8073 = 2 . 5 . 5 . 9 . 897$$
$$= 2 . 5 . 5 . 3 . 3 . 3 . 299$$

czyli, ponieważ liczba 299 według Tablicy załączoney rozkłada się na dwa czynniki pierwsze 13 i 23, liczba 403650 rozłożona na czynniki pierwsze $= 2 . 3^3 . 5^2 . 13 . 23$.

Chcąc teraz naznaczyć czynniki złożone czyli dzielniki dokładne następnie postępuie

23.
13. 299.
5. 115. 65. 1495.
5. 25. 575. 325. 7475.
3. 69. 39. 897. 15. 345. 195. 4485. 75. 1725. 975. 22425.
3. 9. 207. 117. 2691. 45. 1035. 585. 13455. 225. 5175. 2925. 67275.
3. 27. 621. 351. 8073. 135. 3105. 1755. 40365. 675. 15525. 8775. 201825.

2. 46. 26. 598. 10. 230. 130. 2990. 50. 1150. 650. 14950. 6. 138. 78. 1794. 30. 690. 390. 8970. 150. 3450. 1950. 44850. 18. 414. 234. 5482. 90. 2070. 1170. 26910. 450. 10350. 5850. 134550. 54. 1242. 702. 16140. 270. 6210. 3510. 80730. 1350. 31050. 17550. 403650.

1.

2. W tém zadaniu chociaż tak porządnie iakieśmy wskazali prowadzoném, możemy iednak ieszcze przez zapomnienie wypuścić którego z dzielników dokładnych, a ztąd ażebyśmy się iak naydokładniéy zapewnili, że w rachunku żaden dzielnik dokładny przez nas nie został opuszczonym, podamy sposób obliczenia liczby czynników pierwszych, do których i czynnika 1 liczemy (a), i czynników złożonych różnych pewnéy liczby danéy, a to z wiadomych wykładników liczb pierwszych, z których liczba ta dana się składa.

Na ten koniec niechay liczba dana $N = a^n . b^{n'} c^{n''} \ldots\ldots k^{n^{(m)}}$ gdzie $a, b, c, d, \ldots\ldots k$, są liczbami pierwszemi, a $n, n', n'' \ldots\ldots$ liczbami iakiemikolwiek całkowitemi, na ten czas oczywistą iest rzeczą, że wszystkie dzielniki dokładne liczby danéy N otrzymamy

skoro wyrazy szeregu - - - - - - - $1, a, a^2, a^3, \ldots\ldots a^n$
pomnożemy przez wyrazy szeregu - - $1, b, b^2, b^3, \ldots\ldots b^{n'}$
a potem wszystkie wyrazy iloczynu ztąd wynikaiącego rozmnożemy przez wyrazy szeregu - - - - - - - - - - - $1, c, c^2, c^3, \ldots\ldots c^{n''}$
wszystkie znowu wyrazy tak nowo wynalezionego iloczynu rozmnożemy przez wyrazy szeregu - - - - - - - - - - $1, d, d^2, d^3, \ldots\ldots d^{n'''}$

(a) Tutay iest właśnie powód, dla czego na końcu, iakieśmy to w n. 1. tego zadania powiedzieli, czynnika 1. przypisuiemy.

i t. d. tym sposobem doszedłszy do ostatniego iloczynu wypadaiącego z rozmnożenia przedostatniego iloczynu przez wyrazy szeregu . . . . $1, k, k^2, k^3, \ldots\ldots k^{n^{(m)}}$ widzimy, że w ostatnim iloczynie będą wszystkie iloczyny różne z czynników a, b, c, d, ... k podniesionych do potęg $n, n' n'' n''' \ldots\ldots n^{(m)}$ po dwa, po trzy, po cztéry, i t. d. razem branych, a w których czynniki a, b, c, ... k nie będą się znaydować podniesione do potęg odpowiednie wyższych od potęg $n, n', n'' \ldots\ldots n^{(m)}$: a tém samém będą to wszystkie dzielniki dokładne liczby danéy, których liczbę chcąc obliczyć trzeba tylko liczbę wyrazów tego ostatniego iloczynu wynaleść: tym końcem uważaymy, że gdy szereg pierwszy składa się z $(n+1)$ wyrazów, a szereg drugi z $(n'+1)$ wyrazów, na ten czas w iloczynie będzie $(n+1)\,(n'+1)$ wyrazów, bo każdy wyraz szeregu drugiego rozmnożony przez cały szereg pierwszy wyda $(n+1)$ wyrazów, a że wyrazów szeregu drugiego iest $(n'+1)$; ztąd wszystkie wydadzą $(n+1)\,(n'+1)$ wyrazów: tym sposobem daléy rozumuiąc przekonamy się, że gdy w iloczynie tym znayduie się $(n+1)\,(n'+1)$ wyrazów, a w szeregu trzecim $(n''+1)$ wyr: będzie w iloczynie następnym $(n+1)\,(n'+1)\,(n''+1)$ wyr: i t. d. a z tąd w ostatnim iloczynie

$$(n+1)\,(n'+1)\,(n''+1)\,(\ldots\ldots.(n^{(m)}+1) \text{ wyr:}$$

czyli ponieważ liczba wyrazów tego iloczynu równa się liczbie wszystkich dokładnych dzielników liczby danéy N, przeto liczba tych dzielników dana nam iest w powyższem wyrażeniu, z którego następuiące prawidło czytamy.

Ażeby wynaleść liczbę wszystkich dzielników dokładnych liczby danéy N, trzeba każdego z wykładników czynników pierwszych liczbę danę składaiących powiększyć iednością i z *tych liczb zrobić iloczyn, a iloczyn ten będzie szukaną liczbą wszystkich dzielników dokładnych różnych liczby danéy, licząc także do tych i dzielnika ieden: np.* w zadaniu naszem liczba

$$403650=2.\,3^3.\,5^2.\,13.\,23$$

ma dzielników dokładnych różnych

$$(1+1)\,(3+1)\,(2+1)\,(1+1)\,(1+1)=2.\,4.\,3.\,2.\,2=96$$

co też w rzeczy saméy ma mieysce, nie licząc dwa razy czynnika pierwszego 3, a raz czyn: pierw: 5.

ZADANIE III. *Wynaleść ilukolwiek liczb danych naywiększego spólnego dzielnika.*

Rozwiązanie* 1. *Sposób pierwszy. Trzeba rozłożyć liczby dane na ich czynniki pierwsze według Zad. I, i zrobić iloczyn z wszystkich czynników pierwszych spólnych liczbom danym, podniesionych do potęg nayniższych, w których czynniki te do liczb danych wchodzą, a ztąd otrzymany iloczyn będzie nayw. spól: dzieln: liczb danych: i tak gdy

$$A=a^{\alpha}.\,b^{\beta}.\,c^{\gamma}.\,d^{\delta}$$
$$B=a^{\alpha'}.\,b^{\beta'}.\,c^{\gamma'}.\,f^{\beta'}$$
$$C=a^{\alpha''}.\,c^{\gamma''}\,d^{\delta''}$$

i $\alpha>\alpha'>\alpha''$ $\gamma>\gamma'>\gamma''$ na ten czas nayw. spoln. dzieln. liczb tych iest $P=a^{\alpha''}c^{\gamma''}$, o czém następnie się przekonamy: ponieważ czynniki pierwsze a, c wchodzą w każdą z liczb danych A, B, C, a nadto nie znayduią się w potęgach wyższych, iak w A, B, C, według założenia, przeto liczba P według n 40 dzieli dokładnie każdą z liczb A, B, C, a zatém iest ich spólnym dzielnikiem: że zaś liczba ta P. iest nayw: spoln: dzielnikiem wypływa ztąd, że każda liczba N, która iest dokładnym dzielnikiem liczb danych A, B, C, na czynniki pierwsze rozłożona nie może zamykać żadnego czynnika pierwszego różnego od czynników pierwszych liczby P, t. i. róźnego od a i c, bo inaczéy według n. 41 liczba ta N nie byłaby dokładnym dzielnikiem liczb danych A, B, C, a ponieważ i liczba ta N nie może zamykać potęg wyższych czynników pierwszych a i c od potęg α'', γ'', w których czynniki te wchodzą w liczbę P, bo inaczéy liczba N nie dzieliłaby dokładnie według n. 42 iednéy przynaymniéy z liczb danych, przeto P musi bydź podzielnem przez N, a tém samém P > N: cośmy powiedzieli o spólnym dzielniku N, to samo rozumi się o każdym innym spólnym dzielniku, a ztąd liczba P iest naywiększym spólnym dzielnikiem liczb danych.

Uwaga. Jeżeli liczba P iest naywięk. spoln. dzieln. liczb danych A, B, C, D.... na ten czas według n. 54 ilorazy A : P, B : P, C : P, są liczbami pierwszemi między sobą.

Jeżeli między liczbami danemi iest iedna liczba pierwsza bezwzględna, na ten czas prócz niéy żadna inna liczba nie może bydź spólnym dzielnikiem; a tém samém i naywięk. dzieln. liczb danych.

Jeżeli między liczbami danemi są dwie liczby pierwsze bezwzględne większe od iedności, na ten czas liczby te nie maią żadnego spólnego dzielnika: (porów. n. 7.)

Przykłady. Trzeba dla liczb 20, 48, 280, 960, 1800, 5040, 6860, wynaleść nayw. spóln. dzieln.; w tym celu uważam, że $20 = 2^2.5$, $48 = 2^4.3$, $280 = 2^3.5.7$, $960 = 2^6.3.5$, $1800 = 2^3.3^2.5$, $5040 = 2^4.3^2.7$, $6860 = 2^2.5.7^3$ a ztąd nayw. spoln. dzieln. $2^2 = 4$.

Dla liczb 2150 i 3612 wynaleść nayw. spóln. dzieln. w tym celu uważam, że

$$2150 = 2.5^2.43 \text{ a } 3612 = 2^2.3.7.43$$

ztąd nayw. spoln. dzieln. $= 2 \times 43 = 86$.

2. *Sposób drugi.* Sposób poprzedzaiący co do wykonania swego iest często niedogodny, a zwłaszcza w ten czas, gdy licz-

by dane, albo są liczbami pierwszemi granicę Tablicy, którą rachuiący ma pod ręką przechodzącemi, albo są liczbami bardzo wielkiemi: dla tego to podamy tutay rozwiązanie daleko prostsze od poprzedzaiącego, które zasadza się na wynalezieniu nayw. spoln. dzieln. dwóch tylko liczb danych:

Maiąc dane dwie liczby A i B wynaleść naywiększego spólnego dzielnika.

Daymy na to że $A > B$, a w tym założeniu dzielmy A przez B, i niechay w tém przypuszczenie, że B nie dzieli dokładnie liczby A iloraz ztąd wynikaiący będzie Q, a reszta R; daléy dzielmy znowu B przez R, i w tém samém co wyżéy przypuszczeniu nazwiymy iloraz ztąd wypadaiący przez Q_1, a resztę przez R_1; dzielmy znowu R przez R_1 i ztąd wynikaiący iloraz nazwiymy przez Q_2, a resztę przez R_2 ... i t. d. dotąd dopóki nie doydziemy do reszty R_n, którąby zupełnie się mieściła w poprzedzaiącéy reszcie R_{n-1}, na ten czas dzielnik ten ostatni R_n iest nayw. spoln. dzieln. dwóch liczb danych A i B:— według przepisanego działania mamy

$$A : B = Q + \frac{R}{B} \text{ czyli } A = B . Q + R \text{ czyli } A - BQ = R$$
$$\text{gdzie } R < B$$

$$B : R = Q_1 + \frac{R_1}{R} \text{ czyli } B = R . Q_1 + R_1 \text{ czyli } B - RQ_1 = R_1$$
$$\text{gdzie } R_1 < R$$

$$R : R_1 = Q_2 + \frac{R_2}{R_1} \text{ czyli } R = R_1 Q_2 + R_2 \text{ czyli } R - R_1 Q_2 = R_2$$
$$\text{gdzie } R_2 < R_2 \text{ i t. d.}$$

$$R_{n-3} : R_{n-2} = Q_{n-1} + \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} \text{ czyli } R_{n-3} = R_{n-2} . Q_{n-2} + R_{n-1} \text{ czyli } R_{n-3} - R_{n-2} . Q_{n-1}$$
$$= R_{n-1} \text{ gdzie } R_{n-1} < R_{n-2}$$

$$R_{n-1} : R_{n-1} = Q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}} \text{ czyli } R_{n-2} = R_{n-1} . Q_n + R_n \text{ czyli } R_{n-2} - R_{n-1} Q_n = R_n$$
$$\text{gdzie } R^n < R_{n-1}$$

$$R_{n-1} : R_n = Q_{n+1} = \text{l. } \textit{całk.} \text{ czyli } R_{n-1} = R_n . Q_{n+}, \text{ czyli } R_{n-1} = R_n Q_{n+1} = 0$$

Dzielnik ostatni R_n iest naywięk. spólnym dzielnikiem liczb A i B; bo skoro R_n dzieli dokładnie R_{n-1} na ten czas dzieli też dokładnie według n. 26 i $R_{n-1}Q_n$, a dzieląc i siebie samo, dzieli także i summę $R_{n-1}Q_n + R_n$ czyli R_{n-2}: ponieważ R_n dzieli dokładnie liczbę R_{n-1} tudzież R_{n-2}, przeto też także podzieli dokładnie i summę $R_{n-2}.Q_{n-1} + R_{n-1}$ czyli R_{n-3}... i t. d. dowiedziemy, że liczba ta R_n dzieli następnie dokładnie wszystkie reszty R_{n-4}, R_{n-5}, R_{n-6},...... R_3, R_2, ...R_1, R: a dzieląc liczby R_1 i R dzieli także dokładnie i summę $RQ_1 + R_1$ czyli liczbę B, a ztąd dzieląc B i R dzieli także i liczbę A $= BQ + R$: reszta ta więc R_n dzieląc i liczbę A i liczbę B iest spólnym dzielnikiem dwóch tych liczb danych. Ażeby zaś okazać, że liczba ta R_n iest naywięk. spólnym dzielnikiem uważaymy, że gdyby była liczba inna $M < R_n$ spólnym dzielnikiem liczb A i B, na ten czas i liczba $B.Q$ musiałaby bydź podzielną przez M, i liczba $A - BQ$, skoro A iest z założenia podzielnem przez M, według n. 20; podzielną przez M, czyli musiałoby R bydź podzielnem przez M: dzieląc znowu liczba M liczbę R dzieliłaby i RQ_1, a dzieląc i B z założenia dzielićby musiała według n. 20 i $B - R.Q_1$ czyli R_1 i t. d. rozumuiąc, dóydziemy, że liczba ta M musiałaby następnie dzielić reszty R_2 R_3 .... R_{n-2}, R_{n-2},R_n, a ze R_n z założenia mnieysze od M nie może bydź przez liczbęM podzielnem, przeto też i to bydź nie może, ażeby była liczba $M >$ od R_n, którąby dokładnie dzieliła tak A iako i B, a tém samém liczba R_n iest nayw. spóln. dzieln. liczb A i B.

Uwaga. Jeżeli $R_n = 1$ na ten czas liczby te A i B są pierwszemi między sobą, i na odwrót ieżeli liczby A i B są pierwsze między sobą reszta R_n musi bydź równa iedności.

Zastanowiwszy się nad przepisanem wyżéy działaniem widzimy, że sposób ten zamknąć można w następuiącém prawidle.— „*Podziel liczbę większą przez mnieyszą: ieżeli dzielenie wykona* *się zupełnie bez reszty, liczba mnieysza będzie nayw. spóln. dzieln. szukanym. Jeżeli z dzielenia pozostanie reszta, dziel liczbę mnieyszą przez tę resztę pierwszą; a ieżeli dzielenie wykona się bez reszty, pierwsza reszta będzie nayw: spól: dzielnikiem. Jeżeli zaś z powtórnego dzielenia pozostanie reszta dziel pierwszą resztę przez drugą; a ieżeli dzielenie wykona się bez reszty, druga reszta będzie dzielnikiem szukanym. Jeżeli zaś i z tego dzielenia pozostanie reszta, ciągniy tož samo działanie póki nie otrzymasz reszty, któraby zupełnie dzieliła resztę poprzedzaiącą. Takowy ostatni dzielnik będzie nayw. spóln. dzielnikiem dwóch liczb danych.*

Przykłady: Wynaleść nayw. spólny dzielnik dwóch liczb 177263 i 74003:

w tym celu dla krotkości działanie tak sobie porządkuie

ilorazy	2	2	1	1	8
177263	74003	29257	15489	13768	1721
148006	58514	15489	13768	13768	
29257	15489	13768	1721	„	

ztąd liczb 177263 i 74003 nayw. spóln. dzielnik iest 1721.

Wynaleść nayw. spóln. dzielnik dwóch liczb 367457 i 114157

Wykonanie Działania.

ilorazy	3	4	1	1	3	7	1	1	2	6	14
367457	114157	24986	14213	10773	3440	453	269	184	85	14	1
342471	99944	14213	10773	10320	3171	269	184	170	84	14	
24986	14213	10773	3440	453	269	184	85	14	1	„	

Ponieważ ostatni Dzielnik dokładny iest *ieden*, przeto liczby dane są pierwszemi między sobą

3. Sposób ten wynalezienia nayw. spóln. dzielnika dwóch liczb danych można następnie zastosować i do wynalezienia nayw. spólnego dzielnika kilku liczb danych, i tak

Ażeby wynaleść nayw: spól: dzieln: kilku liczb danych A, B, C, D,.... H, J, K których liczba niech będzie $= n$, potrzeba nayprzód wynaleść według sposobu dopiero co podanego
nayw: spól: dzielnik między A i B którym niechay będzie liczba w
2) wynaleść „ „ w i C „ „ „ „ w_1
3) „ „ „ w i D „ „ „ „ w_2
i t. d.
.... między w_{n-5} i H a tym niech będzie w_{n-4}
.... między w_{n-4} i J „ „ „ w_{n-3}
nakoniec między w_{n-3} i K „ „ „ w_{n-2}
na ten czas mówię, że liczba w_{n-2} iest nayw: spól: Dziel: wszystkich liczb danych: bo gdy w_{n-2} dzieli dokładnie liczby w_{n-3} i K, a liczba w_{n-3} dzieli znowu dokładnie liczby w_{n-4} i J, przeto liczba w_{n-2} dzieli także według n, 46 liczby w_{n-4} i J, a zatem liczba w_{n-2}, będąc dokładnym dzielnikiem liczby daney K, dzieli także dokładnie i liczbę J: ponieważ liczba w_{n-2} dzieli dokładnie według tego cośmy dopiero powiedzieli liczby w_{n-4} i J, a liczba w_{n-4} dzieli dokładnie liczby w_{n-5} i H, przeto też liczba w_{n-2} dzieli także według n. 46 liczby w_{n-5} i H, a ztąd liczba ta, będąc spolnym dzielnikiem dwóch liczb K i J, danych, iest zarazem spolnym dzielnikiem i liczby H: tym samym sposobem przekonamy że liczba w_{n-2} dzieli dokładnie wszystkie liczby dane K, J, H, ... C, B, A, a tem samém iest ich spólnym dzielnikiem.— A gdy według n. 54 naywiększy spólny dzielnik liczb danych iest podzielny przez każdego innego spólnego dzielnika m tychże liczb, przeto liczba m iako spól.

ny dzielnik liczb K, H, J,... C, B, A, dzieli także dokładnie nayw: spóln: dzielnika liczb A i B, czyli liczbę w, i dla téy saméy przyczyny dzieli liczby w_1, w_2, w_3.... w_{n-2} a ztąd liczba w_{n-2} zamyka w sobie za czynnika liczbę m, a tém samém iest większą od m: to samo się rozumi i co do każdego innego spólnego dzielnika liczb danych, a ztąd liczba w_{n-2} iest nayw: spólnym dzielnikiem liczb danych.

Przykłady. Wynaleść nayw: spól: dzielnika liczb

50071, 32655, 41363,

Wykon: działania

1)

	1	4	1	3
50071	41363	8708	6531	2177
41363	34832	6531	6531	
8708	6531	2177	„	

	15
32655	2177
2177	
10885	
10885	
„	

ztąd 2177 iest naywiększym spolnym dzielnikiem tych liczb.

Wynaleść nayw: spól: dzieln: liczb

6984, 5976, 3924, 3636, 2286,

1)

	1	5	1	13
6984	5976	1008	936	72
5976	5040	936	72	
1008	936	72	216	
			216	
			„	

2)

	54	2
3924	72	36
360	72	
324	„	
288		
36		

3)

	101
3636	36
36	
36	
36	
„	

4)

	65	2
2286	36	18
216	36	
126	„	
108		
18		

ztąd 18 iest naywiększym spolnym dzielnikiem liczb danych.

ZADANIE IV. *Wynaleść naymnieyszą wielokrotność dwóch trzech lub ilukolwiek liczb danych.*

Sposób pierwszy. Ażeby wynaleść naymnieyszą wielokrotność kilku liczb danych trzeba według zad. I. rozłożyć liczby te na czynniki pierwsze, i rozmnożyć przez siebie wszystkie do liczb danych wchodzące czynniki pierwsze różne, podniesione do potęg naywyższych w iakich w liczby dane wchodzą: ztąd wypadaiący iloczyn iest żądaną naymnieyszą wielokrotnością liczb danych— iakoż niechay liczbami danemi będą liczby A, B, C,.... J, K i niechay liczby te rozłożone na czynniki pierwsze będą.

$$A = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} f, \quad B = a^{\alpha'} b^{\beta'} d^{\delta'}, \quad C = a^{\alpha''} c^{\gamma''} e^{\varepsilon''} \ldots\ldots$$

$$J = a^{\alpha^{(n-1)}} \cdot c^{\gamma^{(n-1)}} \cdot d^{\delta^{(n-1)}}, \quad K = a^{\alpha^{(n)}} \cdot c^{\gamma^{(n)}} \cdot f^{\varphi^{(n-1)}}$$

na tenczas, ieżeli $\alpha'^{(n-1)}$ iest większém od każdéy z ilości α', α', α'',.... $\alpha^{(n)}$, β' większym od β, γ'' większem od $\gamma^{(n-1)}$ lub $\gamma^{(n)}$, $\delta^{(n-1)}$ większem od δ', a $\varphi^{(n-1)}$ większem od iedności, na ten czas naymnieysza spólna wielokrotność liczb tych danych iest.

$$V = a^{\alpha'^{(n-1)}} \cdot b^{\beta'} \cdot c^{\gamma''} \cdot d^{\delta^{(n-1)}} \cdot e^{\varepsilon''} \cdot f^{\varphi^{(n-1)}}$$

bo że V iest spólną wielokrotnością liczb danych wypada z n. 40, 41, 42, albowiem żadne inne liczby pierwsze prócz *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, nie wchodzą w liczby dane, i nadto w tychże nie są podniesione do potęg wyższych iak w liczbie V, a gdy nadto każda wielokrotność liczb tych danych koniecznie zamykać musi między swemi czynnikami pierwszemi wszystkie czynniki pierwsze *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, gdyż inaczéy w n: 41 nie byłaby podzielną przez te wszystkie liczby dane; i nie może zamykać liczb tych potęg niższych od $\alpha'^{(n-1)}$, β', γ'', $\delta^{(n-1)}$, ε'', $\varphi^{(n-1)}$, bo inaczéy nie byłaby według n: 42 przez wszystkie liczby dane podzielną, przeto według n. 40 wielokrotność ta musi bydź podzielną przez wielokrotność V, a tem samem musi bydź większą od V, czyli że wielokrotność V iest wielokrot. naymnieyszą.

Przykład. Wynaleść naymnieys: spólną wielokrotność liczb następuiących 20, 48, 280, 960, 1800, 4040, 6860: ponieważ rozkładaiąc liczby te na czynniki pierwsze otrzymuiemy

$20=2^2.5 \quad 48=2^4.3 \quad 280=2^3.5.7 \quad 960=2^6.3.5$

$1800=2^3.3^2.5^2 \quad 5040=2^4.3^2.7 \quad 6860=2^2.5.7^3$

przeto naymn: spoln: wielokrotn: liczb danych$=2^6.3^2.5^2.7^3$ $=4939200$.

2. *Sposób drugi.* Sposób poprzedzaiący z powodu rozkładania liczb danych na czynniki pierwsze iest w zastosowaniu niedogodnym, dla tego podamy tutay inny ieszcze sposób wynaydywania naymn: spoln: wielokr: ilukolwiek liczb danych, który zasadza się na wynalezieniu naymn: spoln: wielokr: dwóch liczb danych.

Wynaleść naymnieyszą spólną wielokrotność dwóch liczb danych A i B.

W tym celu szukaymy naywiększego spólnego dzielnika między liczbami danemi A i B, i ten niechay będzie M; podzielmy przez tegoż którąkolwiek z liczb danych, i ztąd wypadaiący iloraz rozmnożmy przez drugą liczbę daną, a na ten czas iloczyn ten ostatni iest szukaną naymnieyszą spólną wielokrotnością liczb danych A i B: bo ieżeli $A:M=a$, a $B:M=b$, na ten czas $A=a.M$, a $B=b.M$ gdzie a i b są według n. 54 liczbami pierwszemi między sobą, a gdy $b[Ma]=a[M.b]$

przeto $b.A=a.B$

czyli $$\left(\frac{B}{M}\right).A=\left(\frac{A}{M}\right).B$$

z których dwóch iloczynów równych na mocy tego, że ilorazy

$(B:M)\,A:A=(B:M)=b$, i $(A:M)\,B:B=(A:M)=a$ są liczbami pierwszemi między sobą, każdy według n. 56 iest naymnieyszą spólną wielokrotnością dwóch liczb danych A i B.

Przykład. Wynaleść naymnieyszą wielokrotność spólną dwóch liczb 1020 i 1030.

Wykon: dział: szukam nayw. spól. dzielnika tych liczb

	1	4	1	6
1030	1020	210	180	30
1020	840	180	180	
210	180	3	,,	

i ten wynayduie równy 30, a ztąd naymn. wielokrotność spólna liczb danych iest

$$\left(\frac{1020}{30}\right)\cdot 1230=\left(\frac{1230}{20}\right)\cdot 1200$$

czyli $34\ .\ 1230=41\ .\ 1020=41820.$

3. Sposób ten można zastosować i do ilukolwiek liczb danych następnie. Niech liczbami danemi będą liczby A, B, C, D, ... H, J, K, których liczba iest n, na ten czas podług sposobu dopiéro co podanego wynayduię naymnieyszą wielokrotność między A i B, i tą niech będzie m_1, daléy między m_1 i C, i tą niech będzie m_2, daléy między m_2 i D i tą niech będzie m_3.... i t. d. między m_{n-4} i H i tą niech będzie m_{n-3}, między m_{n-3} i J i tą niech będzie m_{n-2}, nakoniec między m_{n-2} i K i tą niech będzie m_{n-1}, na ten czas ostatnia wielokrotność m_{n-1} iest naymnieyszą wielokrotnością liczb danych; bo gdy m_{n-1} iest wielokrotnością liczb m_{n-2} i K, a m_{n-2} iest znowu wielokrotnością liczb m_{n-3} i J, na ten czas m_{n-1} iest także wielokrotnością liczb m_{n-3}, J, i K, liczba więc m_{n-1} wielokrotna względem liczby K iest także wielokrotną i względem J: ponieważ znowu liczba m_{n-3} iest spólną wielokrotnością liczb m_{n-4}

i H, a liczba m_{n-1} iest wielokrotną względem m_{n-3}, przeto też liczba m_{n-1} iest także wielokrotną i względem H, a ztąd iest wielokrotną względem m_{n-4} H, J, K: tym samym sposobem daléy postępuiąc przekonamy się że liczba m_{n-1} iest spólną wielokrotnością liczb danych K, J, H,.... C, B, A, a gdy nadto według n. 55 każda naymnieysza wielokrotność liczb danych dzieli dokładnie każdą inną spólną wielokrotność liczb tych, więc każda różna od m_{n-1} spólna wielokrotność liczb danych K, J, H,.... C, B, A, musi bydź dokładnie podzielną przez A i B a tém samém przez m; przez m, i C, a tem samém przez m_{I}.... i t. d. a będąc podzielną przez m_{n-2} i K musi bydź podzielną przez m_{n-1}: ztąd każdą spólną wielokrotność liczb danych dzieli dokładnie liczba m_{n-1}, a tém samém liczba ta iest naymnieyszą spólną wielokrotnością liczb danych.

Przykład. Trzeba wynaleść naymn: spól: wielokrot: liczb następuiących 20, 48, 280, 960, 1800, 5040, 6860.

Wykon: działania. 1° Szukam nayw: spól: dzielnika między 20 i 48, a ztąd dopiéro naymn: spólnéy wielokrotności liczb tych

	2	2	2
48	20	8	4
48	16	8	
8	4	„	

ztąd M = 4 a zatem $\left(\frac{A}{M}\right) \cdot B = 240 = m$

2re Szukam nayw: spóln: dzielnika między 280 i 240, a ztąd dopiero naymn: spóln: wielokrotn: liczb tych

	1	6
280	240	40
240	240	
40	„	

ztąd M = 40 a $\left(\frac{A}{M}\right) \cdot B = 1680 = m_{I}$

3^{cie} Szukam tym samym sposobem naym: spól: wiel: między 960 i 1680.

	1	1	3
1680	960	720	240
960	720	720	
720	240	„	

ztąd $M = 240$ a $\left(\frac{A}{M}\right) \cdot B = 6720 = m_2$

4^{te} Szukam między 1800 i 6720 naym: spól: wielok:

	3	1	2	1	3
6720	1800	1320	480	360	120
	1320	960	360	360	
	90	360	120	„	

ztąd $M = 120$ a $\left(\frac{A}{M}\right) . B = 100800 = m_3$

5^{te} Szukam między 5040 i 100800 spól: naym: wielokrot.

	20
100800	5040
10080	
„	

ztąd $M = 5040$ a $\left(\frac{A}{M}\right) . B = 100800 = m_4$

6^{te} nakoniec, szukam naymn: spóln: wielokr: między 100800 i 6860.

	14	1	2	3	1	2
100800	6860	4760	2100	560	420	140
6860	4760	4200	1280	420	420	
32200	2100	560	420	140	„	
27440						
4760						

ztąd $M = 140$ a $\left(\frac{A}{M}\right) . B = 49 . 100800 = 4939200$ iak wyżéy: naymnieysza spólna przeto wielokrotność liczb danych iest 4939200.

4. *Sposób trzeci* naydogodniéyszy i nayczęściéy w rachunkach używany zasadza się na wyłożonym tutay Sposobie pierwszym, iest on następuiący:

a) piszą się liczby dane obok siebie zazwyczay w linii poziomey, i wyrzuca się nayprzód liczby te, które dokładnie się mieszczą w iednéy z liczb dalszych danych:

b) uważa się czyli dwie lub kilka liczb pozostałych nie maią iakiego spólnego dzielnika; ieżeli to ma mieysce, to na boku pisze się tenże spólny dzielnik, i dzielą się przez niego liczby te, które on dokładnie dzieli, a ilorazy pod niemi się podpisuią; reszta zaś liczb t: i: liczby niepodzielne przez wyłączonego na bok dzielnika piszą się okok tych ilorazów tak iak były dane.

c) do otrzymanych w ten sposób liczb stosuią się znowu prawidła pod lit: a) i b) podane, i dotąd się tak działa, dopóty nie doydziemy do samych liczb pierwszych bezwzględnych lub pierwszych między sobą.

d) Iloczyn dopiéro z tych liczb pierwszych i dzielników na boku napisanych iest szukaną naymniéyszą spólną wielokrotnością.

Przykład. Niech liczbami danemi będą liczby

20, 48, 280, 960, 1800, 5040, 6860

na ten czas sposób ten do liczb stosuiąc, mamy

~~20~~.	~~48~~.	280.	960.	1800.	5040.	6860.
	20	~~14~~.	48.	90.	252.	343.
	2		24.	45.	126.	343.
	2		12.	45.	63.	343.
	7		12.	45.	9.	49.
	3		4.	15.	3.	49.
	3		4.	5.	1.	49.

Działanie iest iuż ukończoném, bo liczby 4, 5, 49, są pierwszemi między sobą, a naymnieysza szukana spólna wielokrot: iest

$20 \times 2 \times 2 \times 7 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 49 = 4939200$ (iak wyżéy).

ZADANIE V. *Przywieść dany Ułamek do nayprostszego iego wyrażenia.*

Przez przywiedzenie ułamku danego do nayprostszego wyrażenia rozumiemy wynalezienie innego ułamku zupełnie równego co do wartości swoiéy ułamkowi danemu, a któregoby licznik i mianownik czyli któregoby wyrazy były liczbami pierwszemi między sobą. Wynalezienie takiego ułamku zasadza się na téy fundamentalnéy prawdzie Teoryi ułamków: że Ułamek nie odmienia wartości swoiéy, dzieląc obydwa iego wyrazy przez iednę i też samą liczbę: ztąd ieżeli my licznika i mianownika rozłożemy na czynniki pierwsże, i wyrzucemy z tychże czynniki spólne tyle razy ile razy się to da, na ten czas doydziemy do ułamku, którego wyrazy są liczbami pierwszemi między sobą, bo się składaią z czynników pierwszych różnych, a którego wartość na mocy prawdy dopiéro co przytoczonéy iest ta sama co wartość ułamku danego; gdyż wyrzucaiąc czynniki wspólne dzielimy obydwa iego wyrazy przez iednę i tę samą liczbę: ztąd

Sposób pierwszy. Chcąc przywieść ułamek do nayprostszego swego wyrażenia trzeba rozebrać z osobna licznika i mianownika iego na czynniki pierwsze, i wyrzucić z tychże równą liczbę razy czynniki obydwom spólne, a to tyle razy ile razy się to da.

Przykład: przywieść ułamek $\frac{134352}{324980}$ do iego nayprostszego wyrażenia, czyli krociéy mówiąc skrócić ułamek podany: w tym celu uważam że, gdy rozłożywszy wyrazy iego na czynniki pierwsze, liczba

$$134352 = 2_4 . 3^3 . 311$$

$$\text{a } 424980 = 2^2 . 3^3 . 5 . 787$$

przeto ułamek dany

$$\frac{134352}{424980} = \frac{2^4 . 3^3 . 311}{2^2 . 3^3 . 5 . 787} = \frac{(2^2 . 3^3)\, 2^2 . 311}{(2^2 . 3^3)\, 5 . 787} = \frac{2^2 . 311}{5 . 787} = \frac{1244}{3935}.$$

Sposób drugi. Znaiąc prawa podzielności liczb można ie tutay bardzo dogodnie zastosować, i zamiast rozkładania wyrazów ułamku danego na czynniki pierwsze, a potém wyrzucenia czynników spólnych, można te czynniki spólne, wynayduiąc ie przez upatrywanie praw podzielności spólnie do licznika i mianownika zastosować się mogących, cząstkowo wyrzucać dotąd, dopóty nie przyidziemy do wyrazów będących liczbami pierwszemi między sobą, o czém za pomocą szukania nayw. spóln. dzielnika między wyrazami ułamku ostatniego przekonać się powinniśmy. — Tym sposobem działaiąc mamy

	4		9		3	
134352		33588		3732		1244
424980		106245		11805		3935

a gdy iuż nie upatruie żadnego spólnego prawa podzielności, przeto probuie czy te liczby są pierwszemi między sobą: w tym celu odbywam działanie wynaydow. nayw. spóln. dzielnika

	3	6	5	1	1	1	3	
3935	1244	203	36	23	13	10	3	1
3732	1218	180	23	13	10	9	3	
203	36	23	13	10	3	1	„	

i widzę, że liczby te są pierwszemi między sobą, bo nie maią innego spólnego dzielnika nad iedność; a tém samém ułamek dany iest przywiedziony do nayprostszego wyrażenia.

Sposób trzeci. Chcąc działanie skracania ułamku wprost wykonać trzeba poszukać nayw. spóln. dzielnika wyrazów ułamku, przez który podzieliwszy też wyrazy, ułamek przywiedziony zostanie do nayprostszego wyrażenia: bo tym sposobem wyrzuca się wszystkie czynniki spólne obu wyrazom tyle razy, ile razy się to da, albowiem naywiększy spólny dzielnik dwóch liczb składa się z tychże samych czynników pierwszych i w téy samey liczbie powtorzonych.

Przykład: Skrocić ułamek $\frac{134352}{424980}$: w tym celu szukam między liczbami 134352 i 424980 nayw. spóln. dziel.

	3	6	7	1	4	5
424980	134352	21924	2808	2268	540	103
403056	131544	19016	2268	2160	540	
21924	2808	2268	540	108	„	

który, gdy znayduie równy 108, przeto ułamek dany

$$\frac{134352}{424980} = \frac{134352:108}{424980:108} = \frac{1244}{3935} \text{ tak iak wyżéy.}$$

Sposobu pierwszego iako w przystosowaniu niedogodnego rzadko bardzo się używa: sposób *drugi* i *trzeci* są częstego, a prawie ciągłego użycia w rachunku z ułamkami.

ZADANIE VI. *Przywieść ilekolwiek ułamków danych do naymnieyszego spólnego mianownika.*

1. Przez przywodzenie ilukolwiek ułamków danych do spólnego mianownika rozumiemy zamienienie ułamków danych na inne odpowiednie ułamkom danym co do wartości równe, a któreby miały iednego i tegoż samego mianownika:— Rozwiązanie tego zadania polega na rozwiązaniu następuiącego:

Zamienić ułamek dany $\frac{A}{B}$ *na inny równy danemu co do wartości, a któregoby mianownik był równy liczbie M:* w tym celu uważaymy, że $\frac{A}{B} = \frac{A}{B} \cdot \frac{M}{M} = \frac{A \times M}{B \times M}$, a gdy nowy ułamek ma mieć za mianownika samą liczbę M, a nie BM, przeto trzeba ieszcze ostatniego ułamku obydwa wyrazy podzielić przez B, a ztąd otrzymamy

$$\frac{A}{B}=\frac{(A \times M):B}{M}$$

z którego wzoru czytamy następuiące prawidło na rozwiązanie podanego zadania, — „Chcąc ułamek dany zamienić na inny równy mu co do wartości, a któregoby mianownik był równy liczbie danéy, trzeba licznika ułamku danego rozmnożyć przez ten mianownik dany, a ztąd wypadaiący iloczyn podzielić przez mianownik ułamku danego: iloraz ztąd otrzymany będzie licznikiem ułamku szukanego, którego mianownik iest mianownik nowy dany."

Przykłady. Chcąc zamienić $\frac{6}{7}$ na ułamek któregoby mianownik był równy 56 trzeba położyć

$$\frac{6}{7}=\frac{(6 \times 56):7}{56}=\frac{336:7}{56}=\frac{48}{56}$$

Chcąc podobnie zamienić ułamek $\frac{3}{4}$ na ułamek, któregoby mianownik był równy 7 trzeba położyć

$$\frac{3}{4}=\frac{(3 \times 7):4}{7}=\frac{21:4}{7}=\frac{5\frac{1}{4}}{7} \text{ i t. d.}$$

2. Jeżeli teraz założemy, że wyrazy ułamku danego są liczbami pierwszemi między sobą, na tenczas licznik ułamku szukanego w tenczas tylko bydź może liczbą całkowitą, gdy nowy mianownik dany iest dokładnie podzielny przez mianownika dawnego; bo iloczyn (A . M) nie może bydź według n: 30 dokładnie podzielnym przez B, w założeniu że A iest pierwszem względem B, tylko w tenczas gdy czynnik drugi t. i. M iest podzielny przez liczbę B; a wtym przypadku krótszym od poprzedzaiącego sposobem zamienia się ułamek dany na inny równy mu co do wartości, a któregoby mianownik był równy liczbie danéy z założenia wielokrotnéy wzglę-

dem mianownika ułamku danego, dzieląc przez ten ostatni mianownik mianownik nowy dany, iloraz z tąd wynikaiący mnożąc przez licznika ułamku danego, i tenże iloczyn pisząc za licznika ułamku szukanego, którego mianownik iest równy nowemu mianownikowi danemu: bo według n. 17 w założeniu, że liczby A, B, M są liczbami całkowitemi mamy

$$\frac{A \times M}{B} = A \cdot \left(\frac{M}{B}\right)$$

Przykłady: Zamienić ułamek $\frac{19}{20}$ na ułamek, któregoby mianownik był równy 100 w tym celu uważam że

$$\frac{19}{20} = \frac{19 \times \frac{100}{20}}{100} = \frac{19.5}{100} = \frac{95}{100}.$$

Zamienić ułamek $\frac{263}{521}$ na ułamek, któregoby mianownik był równy 3126 w tym celu uważam że

$$\frac{263}{521} = \frac{263 \times \frac{3126}{521}}{3126} = \frac{263 \times 6}{3126} = \frac{1578}{3126}.$$

3. Przystąpmy teraz do głównego naszego zadania i uważaymy, że ieżeli chcemy otrzymać ułamki równe ułamkom danym, któreby miały liczniki całkowite, i iednego i tego samego mianownika, na tenczas według tego cośmy dopiero powiedzieli spólny mianownik tych ułamków musi bydź liczbą dokładnie podzielną przez każdego z mianowników danych, czyli musi bydź spólną wielokrotnością mianowników ułamków danych; a że spólnych wielokrotności dla ilukolwiek liczb danych może bydź nieskończenie wiele, bo maiąc iednę z nich daną, każda liczba wielokrotna względem teyże iest także spól: wielokrotnością liczb danych, przeto w zadaniu naszem idąc drogą naykrótszą powinniśmy za spólny mianownik ułamków danych wziąść naym: spólną wielokrotność mianowników danych ułamków, a który z tego powodu zowie się *naymnieyszym*

spólnym mianownikiem: maiąc iuż tym sposobem wynaleziony naymnieyszy spólny mianownik zamieniamy każdy z ułamków danych według n: poprzedzaiącego na inny równy mu co do wartości, a którego by mianownik był równy naym: wynalez: spóln: mianownikowi; ztąd przeto: Aby przywieść ilekolwiek ułamków danych do naym: spólnego mianownika trzeba:

1° Dla wynalezienia tego spólnego mianownika wynaleść według zad. IV naydogodniéy zapomocą *sposobu trzeciego* naym: spólną wielokrot. mianowników ułamków danych, która właśnie będzie szukanym spólnym mianownikiem.

a 2re dla wynalezienia odpowiadaiących liczników trzeba przez każden mianownik ułamków danych podzielić ten spolny naymnieyszy mianownik, i każden z ilorazów ztąd wynikaiących pomnożyć przez licznika do ilorazu tego należącego: iloczyny ztąd otrzymane będą szukanemi nowemi licznikami.

Przykłady. Przywieść do spólnego naymn: mianownika ułamki $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}, \frac{19}{20}$.

Wykona: działania, szukam 1° naymn: spól: wielokr: mianowników

$$\begin{array}{l|l} & \cancel{2},\ \cancel{4},\ \cancel{5},\ \cancel{6},\ 8,\ \cancel{10},\ 12,\ 15,\ 20 \\ \hline \underbrace{2} & 4 \quad\quad 6 \quad 15 \quad 10 \\ \hline \underbrace{2} & 2 \quad\quad \cancel{3} \quad 15 \quad \cancel{5} \end{array}$$

ztąd naymn: wielokr: spól: $= 2.2.2.15 = 8.15 = 120 =$ naymn: spól: mianownikowi.

2re dla otrzymania liczników następnie działam

$120 : 2 = 60$	ztąd licznik odpowiadaiący	$= 60 \times 1 =$	60
$120 : 4 = 30$	„ „ „	$= 30 \times 3 =$	90
$120 : 5 = 24$	„ „ „	$= 24 \times 4 =$	96
$120 : 6 = 20$	„ „ „	$= 20 \times 5 =$	100
$120 : 8 = 15$	„ „ „	$= 15 \times 7 =$	105
$120 : 10 = 12$	„ „ „	$= 12 \times 9 =$	108
$120 : 12 = 10$	„ „ „	$= 10 \times 11 =$	110
$120 : 15 = 8$	„ „ „	$= 8 \times 14 =$	112
$120 : 20 = 6$	„ „ „	$= 6 \times 19 =$	114

a ztąd $\frac{1}{2} = \frac{60}{120}$, $\frac{3}{4} = \frac{90}{120}$, $\frac{4}{5} = \frac{96}{120}$, $\frac{5}{6} = \frac{100}{120}$, $\frac{7}{8} = \frac{105}{120}$

$$\frac{9}{10} = \frac{108}{120},\ \frac{11}{12} = \frac{110}{120},\ \frac{14}{15} = \frac{112}{120},\ \frac{19}{20} = \frac{114}{120}.$$

OMYŁKI ZNACZNIEYSZE.

Str. 3-w. 15. z: *całkowittéy* cz. *całkowitéy*; w: 26-z: $(i+1)$. A-cz: $(i+1)$. A;— Str. 7-w: 17. z: $(k.m.).A = K(mA)$ cz: $(km)A = k(mA)$; w w: 17, 18, 21 z: m, k, K, cz: m, k, k w: 24-z: $(k.A.)m = (Azm\,k.$ cz: $(kA)\,m = (Am)k$;— Str. 8.-w: 1 z: na ten czas— cz: na ten czas okażemy,— w: 24 z: liczba s cz: liczba s;— w: 26-zam: będziemy (a)— cz: będziemy mieysce (a); w środku 31 wiersza zam: ....*rsq* cz: *rqs;* w: 36 zam: mieysce a cz. mieysce (a);— Str: 10 w: 14 zam: ....a cz: ....—a;— Str: 12 w: 9 zam: ieżeli, zaś cz: ieżeli zaś;— Str. 13 w: 14 zam: całkowitemi inaczey cz: całkowitemi, inaczéy; w: ostatni zam: przez liczb cz: przez liczbę; Str. 16 w. 24 z: *liczbą pierwszę względem* A cz: *liczbą pierwszą względem iednego z czynników, np. względem A;*— Str. 17 w 11 z: Ri cz: Ri_1;— Str. 19 w: 11 z: A, B, C, D, czytay A,B,C,D,....., w: 12 z: A, B, C, D,.... cz: ABCD.....;— Str. 21-w: 1 z: gdzie q'—iest cz: gdzie q' iest liczbą całkowitą: iest;— Str: 22 w: 17 z: była cz: bydź;— Str: 28 w 14 z: $p.nC$ cz: $pn.C$;— Str. 51 w: 15 z: którśéymy cz: któreyśmy;— Str. 33. w. 12 z. $M.10^m$ cz: $M.10^n$;— Str. 37 w. 18 z: przez l cz: przez i,;— Str. 43. w: 4 z: zdodawania cz: z dodania— w: 5 z: składaiących, cz. składaiących wynikaiący,— w. 10 z: podzielne cz: podzielna;— Str. 57 w. 26 z. *dziesiątki* cz. *dziewiątki*;— Str. 58 w. 28 z: n. 49 cz: n. 39;— Str. 62 w. 9. z: N', N... cz: N', N''....;— Str. 64 w. 5 z: pierwszéy od cz: pierwszéy $<$ od; w. 21 z: 17 cz: 17 $>$;— Str. 69 w. 6 z: drugi, trzeci raz i t. d. uważam cz: drugi raz uważam— w. 8 z: do niego należące. cz: do niego należące, a gdy go trzeci, czwarty, i t. d. raz uważam, wszystkie tylko czynniki złożone do niego, gdym go drugi, trzeci, i t. d. raz uważał, należące.