Duplicat

*

LECTIONES
ELEMENTARES
ALGEBRÆ ET GEOMETRIÆ

CL. VIRI

R. D. DE LA CAILLE *Academiæ Regiæ Scientiarum Parisinæ, Suecicæ, Borussicæ, & Goettinganæ, nec non instituti Bononiensis Membri, ac Professoris Matheseos in Collegio Mazariniano Parisiis,*

IN LATINUM TRADUCTÆ

A

R. P. CAROLO SCHERFER

è Soc: JESU,

In Universitate Viennensi Matheseos Professore.

VILNÆ

TYPIS S. R. M. ET REIP: ACADEM: SOC: JESU.

Annó 1773.

z Ksiąg Krzysztofa
Hieronima Bernarda
Skulskich

Monitum Authoris.

Non eô conſiliô ſcribendis hiſce Elementis manum admovi, ut primorum Matheseos principiorum capita ſingula minutim diſcuterem, quando hac in re jam alii ſuô meritô clari,& quorum libri plurimorum teruntur manibus, felicem poſuerunt operam. Illud mihi potius conſtitutum erat,ut quæ ſcitu neceſſaria Mathematicarum diſciplinarum Elementa habent, & breviter complecterer, & quàm poſſem perſpicuè.

Qui juventuti ſcientiis hiſce imbuendæ ſe addixerunt,non inviti dabunt, vix aliud majore cum emolumento præſtari poſſe alumno, qui cæteris naturæ dotibus non obſcurum jungit diſcendi deſiderium, rerumque veritatem perſpiciendi penitus,quàm ſi ejusmodi juvetur librô, qui unâ aut alterâ complectatur paginâ, quæ ſingulis prælectionibus Præceptoris voce diffuſiùs explicata audivit. Hac quippe ratione fit, nè dum unico velut obtutu ea omnia percurrere licet, quæ ab Inſtitutore iam expoſita altiùs menti imprimenda ſunt, vel tiro afficiatur tædiô, vel animum deſpondeat, quod utrumque evenire ſolet, ſi longus minutimque deductus ratiociniorum nexus,de rebus à ſenſu alienis,oculis objiciatur,quem quidem aliàs per ſequi,cum alteri aures præbet,difficile non ſit,atque etiam ſi quæ,cum dicuntur minus videantur perſpicua,

illi-

illico Magiſtri voce planiora redduntur: at vero hæc ut ipse prolixa lectione exequatur, operoſum ſanè fuerit tironi. Contra autem nihil æquè mentem excitat, nihil ipſam recordandi vim juvat magis, quám ſi ita rem habeat in compendium redactam, ut cum illud oculis ſubiit, verbum eum quodvis perceptæ iam ratiocinationis admoneat, demonſtrationumque ſeriem in animum revocet. Atque hunc in modum literarum ſtudiis qui vacant, animi attentionem conſervandi facilitatem acquirunt, magisque ingenium excoli quám memoriam, fructû uberrimô experiuntur.

At enim cùm præſens liber ſæpiùs jam prælo ſubjiceretur, quamvis in eo complura ſeu correxerim, ſeu mutarim, ſeu addiderim, blandiri tamen mihi non auſim, id aſſecutum me eſſe, ut conſilii mei conditiones omnes expleviſſe videar; illud tamen præſtitum exiſtimo, ut quisquis cum ea animi attentione, quam hoc inſtitutionum genus poſcit, Elementa iſta legenda ſuſceperit, præſens Magiſtri ſubſidium non requirat. Neque eſt ſanè, quod præterea in libro deſideres, qui ut explicaretur, eſt conſcriptus.

Etſi autem propoſitionum, quibus utor, numerus exiguus videri poſſit, plura tamen complexus ſum, quàm quæ apud hujus generis ſcriptores pertractari ſolent, idque etiam, dum vitandæ obſcuritatis causâ plerùmque demonſtratio amplior reddi debuit. Porro in theorematis, quæ ad ſuperficierum,

&

& ſolidorum dimenſionem pertinent, demonſtrandis, *indiviſibilium*, ut appellant, methodo utar, non eò ſane, quòd á veteribus adhibitæ, atque ad omne mrigorem exactæ præferendam exiſtimem, ſed quod planiores multo, & tironum captui magis accommodatas demonſtrationes ſuppeditet; quod numerum theorematum, quæ aliàs præmittenda forent, admodum contrahat; quod conſimilem atque adeo eandem in omnibus, quæ ad Elementa pertinent, applicationem patiatur. Aptior igitur propoſito meo fuît, eòque etiam præſtat, quòd juvenum animos, quantum quidem fieri poteſt, brevi temporis intervallo eò perducat, unde in univerſum Geometriæ ſystema proſpectus quidam pateat; quæ res, ſua jam propenſione huc inclinatis, fere nunquam non acriores ſubdit ſtimulos profundius in Mathematicas diſciplinas penetrandi.

Hanc qui methodum rejiciunt, eò id faciunt potiſſimùm obtentu, quòd fieri nequeat, ut tiro ante tempus demonſtrationum rigori aſſueſcat. Equidem dicerentur hæc apprimè ad perſuadendum apte, ſi demonſtrationes omnes, quæ in Algebræ & Geometriæ Elementis adhibentur, aut partem ſaltem maximam hac una é methodo eſſent petitæ, & qui *indiviſibilium* principiis ſemel imbutus eſt, hanc in omnibus perquiſitionibus ſuis inſiſtere viam cogeretur, quæ (ut, quod res eſt, dicamus) ne quidem ipſa unquam ad errorem deduceret. Verum cum fieri nequeat, ut quis cognitionem ſuam ad paulò ſublimimiora proveh at citra librorum aliorum lectionem, quibus peculiares Matheseos partes accuratiùs pertractantur, & quorum alii veterum, recentiorum alii methodô conſcripti ſunt, nunquam non in promptu habebit principia, è quibus, ut volet, Theoremata omnia demonſtret, quæ ad ſuperficierum & ſolidorum menſurationem ſunt neceſſaria. Illud curavi quoque, ut majuſculo Charactere exhiberentur, quæ ad ipſa Elementa pertinent, quorumq; notitiâ carere non poſſumus, quo ſcilicet ab iis ſecernerentur commodè, quorum pauló minor eſt neceſſitas. Itaque qui nonniſi primis Matheſeos principiis animum imbuere conſtituerunt, ea, quæ typis minutioribus excusa ſunt, omittere poterunt: quibus vero propoſitum eſt alios aliquando evolvere libros, qui res Elementari methodô paulò ſublimiùs exequntur; hi nil ſibi tranſiliendum ſciant, ſed omnia accurata cum diligentia eſſe perſcrutanda.

Porro ut obſervet, velim, Lector, quæ minoribus inſerta ſunt literis, ejusmodi eſſe, ut niſi quis principia ipſa majore Characterum formâ propoſita, rite animo comprehenderit, ad ea gradum facere non poſſit; ut adeo illis prius perfectè intellectis, hæc ſecundæ lectioni ſint reſervanda.

Denique eosdem fere numeros retinuimus in hac editione, qui in prioribus ſingulis articulis præfixi erant, ut citationes, quæ in aliis noſtris Lectionibus occurrunt, cuivis eſſent accommodatæ.

LECTIONES ELEMENTARES
MATHEMATICÆ.

Notio Generalis Matheſeos, & præcipuorum Terminorum Definitiones.

I.

Matheſeos nomine omnes eæ ſcientiæ cenſentur, quarum objectum *magnitudo* eſt, vel *quantitas.*

2. Cum autem *quantitatem* vel *magnitudinem* dicimus, id omne intelligimus, quod e partibus compoſitum poteſt concipi; & quidquid augmenti, vel decrementi capax eſt.

3. Porro quantitas conſiderari poteſt, ſeu ut compoſita e partibus ſeparatis inter se, seu conſtans partibus unitis, atque invicem connexis. Exempli cauſa, acervus arenæ eſt quantitas, cujus partes ſeparatæ

ſunt; baculus, eſt magnitudo partibus unitis, continuisque prædita.

4. Quantitas compoſita e partibus ſeparatis, exprimitur numeris, & *Arithmetices* objectum conſtituit.

5. Quantitas, cujus partes continuæ sunt, *extenſum* appellatur, eſtque *Geometriæ* objectum.

6. Ut adeo Arithmetica & Geometria univerſas Mathematicas disciplinas complectatur, eæque, quibus Aſtronomiæ, Mechanicæ, Opticæ &c. nomina obtigere, nil aliud revera ſint, niſi Arithmeticæ & Geometriæ ad pecularia objecta applicatio; ad motus puta Aſtrorum, ad leges impactûs, & æquilibrii, ad luminis affectiones &c. Fieri itaque nequit, ut scientiarum iſtarum quis gnarus evadat, niſi Arithmeticæ Geometriæque notitiam habeat.

7. Matheſeos utilitas ad omnem fere humanam cognitionem pertinet, ut verum inter, falsumque diſcrimen ſtatuat; ut veritatum jam repertarum evidentiam pariat, ut detegat novas, ut reliquis ſcientiis certitudinem plenam, perfectionemque adferat, ad quam ratio humana per se poteſt pertingere.

8. Atque ut ad hanc perfectionem pertingant Mathematici, imprimis *definitiones* adhibent, seu verborum notionem, rerumque, de quibus iis ſermo eſt, naturam nitide, præciſeque determinant: tum ſtatuunt *axiomata*, hoc eſt, principia tam clara, ut eorum evidentiæ nemo vel minimum quid dubii cum ratione obmovere poſſit; quandoque etiam *poſtulata* addunt, id eſt, rem factu tam facilem ſibi dari poſcunt, ut negari nequeat. Ex hisce principiis poſtulatisque *Propoſitiones* deducunt, quarum nexum neceſſarium cum axiomatis luculento ratiocinio, quod *demonſtrationem* appellant, oſtendunt. Denique e propoſitionibus jam demonſtratis *Corollaria* inferunt, quæ nihil sunt, quam veritates inde manifeſte profluentes, ut non aliis argumentis evinci debeant.

Hunc

Hunc in modum si qua materia pertractetur, *Methodus Geometrica adhiberi* dicitur.

9. Duplex est propositionum genus, aliæ, quas *Theoremata* nuncupant, quæque magnitudinis proprietates demonstrant; aliæ quas vocant *Problemata*, vel theorematum ope, demonstratarum proprietatum applicationem ad usum ostendunt, vel qua ratione novæ detegi possint, docent.

10. Ut seu via ad demonstrationem præparetur, seu ipsa demonstratio reddatur clarior, non nunquam *Constructiones*, *Lemmata* & *Scholia* adhibentur.

11. Est vero constructio partium earum recta coordinatio, quæ ad demonstrandum Theorema sunt necessariæ: seu etiam ordo ipse, qui in Problematis resolutione est tenendus.

12. Lemma est veritas, cujus demonstratio ideo solum præmittitur, ut sequentium propositionum evidentia inde deduci possit.

13. Scholium quandoque est observatio quæpiam rei notatu dignæ, qnandoque est propositionis ejusdem demonstratio alia ratione inita; quin etiam totius theoriæ in antecedentibus diffusius expositæ summaria quædam repetitio.

AXIOMATA PRÆCIPUA.

14. I. Totum est majus sua parte.

15. II. Totum est æquale suis partibus simul sumtis.

16. III. Quantitates, qnæ sunt siugulæ æquales eidem alteri, sunt æquales inter se.

17. IV. Si quantitates æquales inter se, æqualiter augeantur, vel æqualiter minuantur, etiam auctæ, vel imminutæ manent æquales.

18. V. Si quantitates inter se æquales augean-

tur, vel minuantur inæqualiter, fiunt inæquales.

19. VI. Si quantitates inter se inæquales augeantur, vel minuantur æqualiter, ſemper erunt inæquales.

PARS PRIMA.

ARITHMETICA.

De natura Numerorum; de eorundem formatione, & valore.

20. QUantitas numeris expreſſa ejusmodi eſt, quam velut in plures partes æquales diviſam plerumque concipimus: & ex partibus iſtis ſi quæpiam ſolitarie ſpectetur, *unitas* dicitur. Itaque numerus eſt collectio unitatum; & ſi cui unitati altera adjungatur, earum ſumma numerum binarium, ſeu *duo*, efficiet; ſi denuo his addatur unitas, numerus *tria* habebitur, & ſic deinceps.

21. Extenſum reipſa partibus infinitis conſtat, ut numero finito exprimi nequeat, niſi ſi eas conſideremus velut in plures collectiones minores, numero finitas ac inter ſe æquales, diſtributas. Dum igitur numero extenſum deſignamus, indicamus ſolummodo, in quot ejusmodi aggregata particularia partes omnes diviſas concipiamus: & tum quidem unitatis vicem id genus collectio ſubit, quæ ipsa adeo nequaquam eſt indiviſibilis, ſed ſuis etiam partibus conſtat, quarum reſpectu numerum conſtituit. Atque hinc fractiones originem ducunt.

22. Ut numerum quemlibet deſignare poſſimus, decem ſequentibus characteribus, ſive cyfris utimur.

ze-

zerus - - - -	0	quinque - - - -	5
unum - - - -	1	sex - - - - - -	6
duo - - - - -	2	septem - - - -	7
tria - - - - -	3	octo - - - - - -	8
quattuor - - -	4	novem - - - - -	9

Itaque dum *decem* indicare volumus, ſcribimus 10, quod decadem denotat; dum *undecim* ſignificamus, utimur hac nota 11, velut decadis & unitatis ſigno; *duodecim* exprimit 12, ſive decas cum duabus unitatibus &c. Pro *centum* adhibemus 100, id eſt decadum decadem; pro *centum & unum*, 101 ſubſtituimus, ſeu decadem decadum cum unitate &c.

23. Ex quo manifeſtum fit, notas, dum ſingulæ ponuntur, non alium habere valorem, quam ſuperiore tabella expoſitum; at dum plures in eandem conjunguntur ſeriem, eum cuivis tribuendum eſſe, quem locus, quo alias præcedit, ſequiturve, exigit. Valor autem localis a dextera ſiniſtram verſus computatur, ut nota quælibet ad dextram contiguæ decadem deſignet, ita quidem ut hoc ſeſe ordine excipiant: numerus ſimplex, ſive *unitas*, *decas*, *centenarius*, *millenarius*, *decas millenariorum*, *centenarius millenariorum*, *decies centena millia*, vel *millio*, *decas millionum*, *centenarius* &c. *millionum*, *bimillio* ſive *billio*, *decas billionum*, *centenarius* &c. *billionum*, *trimillio*, aut *trillio* &c.

24, Ut ergo numerum ſecundum valorem ſuum rite enunciemus, exempli cauſa 2639, advertendum eſt, primam a dextra parte notam 9 eſſe numerum ſimplicem novem unitatum; huic contiguam 3 exprimere tres decades, ſeu triginta: ſequentem 6 valere ſex centenarios, vel ſexcenta: poſtremam denique 2 denotare duos millenarios, aut duo millia. Quare ſi converſo ordine iidem valores repetantur, dicendum erit, numerum 2639 ſignificare duo millia, ſexcenta, triginta & novem.

25. Munus zeri, seu notæ o, eſt, vel ut ſimpliciter quantitatis numericæ carentiam exprimat, seu *nihil*, cum ſcilicet nullum alium numerum ſibi præfixum habet; vel vero ut, dum locum quempiam occupat, reliquis notis valor localis conſervetur. Sic quando ad ſignificandum *decem*, vel *decadem*, ſcribimus 10, unitati zerum adjungimus eum in finem, ut ſecundo loco conſtituta intelligatur, in quo decadis valorem habet. Dum ducenta & ſeptem indicamus, utimur notis 207; ut zero inter 2 & 7 interjecto advertatur, primam 2 centenariorum locum tenere.

26. Cum notis numericis magnitudo quæpiam data exhibenda eſt, veluti ſexaginta tria millia, quadringenta & tria, animadvertendum eſt, numerum hunc compoſitum eſſe è *ſex* millenariorum decadibus, *tribus* millenariis, *quatuor* centenariis, *zero*, seu *nulla* decade, & *tribus* unitatibus. Hinc primo ſcribendum eſt 6, quo sex millenariorum decades indicentur; dein ad dextram adjungendum 3 pro tribus millenariis; poſtea 4 pro centenariis; zerus in loco decadum; tandem 3 pro unitatibus, ut adeo numerus propoſitus ſequente ratione exprimatur 63403.

27. *Numerum ſimplicem*, ſive *unitates* etiam, appellabimus deinceps numerum quemlibet, cujus valor decadem non adæquat, hoc eſt, omnes ab 1 usque ad 9 incluſive: *Numeros compoſitos* dicemus omnes, qui pluribus, quam una nota, conſtant, ſive a 10 omnes in infinitum.

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICÆ.

28. Quoniam Mathematici quantitatem ea ſolum ratione ſpectant, qua augmenti, vel decrementi capax eſt, sequitur, *duplicis generis operationes in numeris poſſe inſtitui; alteram ſcilicet, qua una, pluresve quantitates*

datæ augentur, *quam* additionem *appellant; alteram*, *qua quantitas data alia quantitate pariter data imminuitur*, *vocaturque* Subtractio.

Dum operatio in numeris ſimplicibus inſtituenda eſt, nulla opus eſt regula, utpote cum hoſce citra ullum negotium combinemus; at vero ſi numeri dentur compoſiti, ad regulas recurrendum eſt, quibus nempe continetur ars illa efficiendi per partes, ac ſucceſſive, quod in toto, atque unico mentis actu præſtare non poſſumus, quæ ob ſuam brevitatem ad magna ſese non extendit.

De Regulis Additionis.

29. Per Additionem plures quantitates datæ in unum totum aliquod componuntur, quod etiam *Totum* ſeu *ſumma* earum magnitudinum dicitur.

30. I. Dum quantitates datæ ſunt numeri ſimplices, regulis non indigemus, ut ſummam earum reperiamus, cum nemini non ſit clarum, dudumque notum, verbi gratia ſi 2 addamus ad 2, totum fore 4; id quod compendii cauſa hunc in modum exhibemus $2 + 2 = 4$ (ſignum enim $+$ denotat *plus*; ac alterum $=$ exprimit *æquale*). Pari ratione nemo neſcit, 3, 6, & 8 ſimul juncta eſſe 17, vel $3 + 6 + 8 = 17$.

31. II. Quod ſi dentur numeri compoſiti, uti ſi quæratur ſumma ex 432, & 363, en regulam in additione tenendam: *ſcribe numerum alterum infra alterum ita, ut unitates infra unitates, decades infra decades, centenarii infra centenarios, &c. poſiti ſingulas ſeries verticales conſtituant: duc lineam transverſam, & initio a dextra facto, verſusque ſiniſtram progrediendo, collige ſummam unitatum, tum decadum, dein centenariorum &c, ſcribe ſingulas has ſummas infra lineam ſub columna correſpondente, ex qua ſcilicet quævis collecta eſt.* Exempli cauſa

$$\begin{array}{r} 432 \\ 363 \\ \hline 795 \end{array}$$

ſa in prima columna habentur 2 + 3 = 5; ſcribantur inferius 5. In altera ſunt 3 + 6 = 9; ſubscribantur 9. In tertia 4 + 3 = 7; & poſitis infra lineam 7, quæſita ſumma obtinetur 795.

Ratio operationis ex Axiomate II manifeſta eſt, quod ſcilicet totum æquale ſit ſuis partibus omnibus ſimul ſumtis.

32. Observa I. *Quando ſumma ex una columna collecta excedit 9, ſive dum componitur ex decadibus & unitatibus, ſolæ unitates infra lineam ſcribendæ ſunt, numerus vero decadum in ſequentem columnam rejiciendus.* Sequentia exempla rem illuſtrabunt.

Oporteat addere hoſce tres numeros, 6078, 9198, 483: ſcribantur igitur juxta regulam alii infra alios, & erit 8 + 8 = 16, + 3 = 19; hoc eſt, ſumma primæ columnæ conficit 19, ſeu decadem unam cum novem unitatibus. Unde huic unitatum columnæ ſubſcribantur 9, decadis vero ratio in ſequente habeatur. Quare habebitur 1 + 7 = 8, + 9 = 17, + 8 = 25, Ob rationem jam expoſitam non niſi 5 ſcribantur infra ſecundam columnam, ſervatis 2 decadibus pro ſequente; in qua fiet 2 + 0 = 2. + 1 = 3, + 4 = 7, & ſcribatur ſub linea 7. Denique in poſtrema eſt 6 + 9 = 15; & quia nulla alia ſequitur, utraque nota 15 ponatur. Habebitur ſumma quæſita 15759.

6078
9198
483
15759

Subjicimus exempli cauſa additiones alias juxta regulam factas, in quibus tyro exerceri poſſit.

4950	101740	147	40000
5050	270	45	59697
10000	21909	312	190
	123919	56	1009
		200	9897
		760	110793

33. II. Ut sciatur, num quis error in additione commissus sit, repetatur operatio, atque summa colligatur ex singulis columnis ab infima nota sursum ascendendo. Equidem manifestum est, eandem debere prodire, quæ invenitur descendendo a suprema ad infimam.

34. III. Si idem numerus sibi ipsi aliquoties addi debeat, uti sexies, octies, vigesies, vel centies, &c. tum vero additione compendiaria utendum est, quæ *Multiplicatio* dicitur, a nobis paulo inferius explicanda.

De Regulis Subtractionis.

35. Per subtractionem data quantitas minuitur quantitate alia itidem data: ejus ope cognoscimus, quantum altera major, minorve sit altera, quisve *excessus* majoris sit supra minorem, seu quænam utriusque sit *differentia*.

36. In numeris simplicibus subtractio omni caret difficultate. Nemo enim non videt, quod *si* 2 *ex* 5 *demantur*, 3 *supersint*, atque ideo 3 sint excessus 5 supra 2, vel etiam differentia inter 2 & 5. Expressio compendiaria hujus operationis est $5-2=3$ (signum — indicat *minus*;) item $9-4=5$; $8-7=1$.

37. In numeris compositis sequens servetur regula: *numerus subtrahendus altero minor esse debet; scribatur igitur minor infra majorem eodem modo, ac in additione præcepimus: tum infra singulas columnas ponatur excessus unitatum, decadum, centenariorum &c numeri superioris supra unitates, decades, centenarios &c numeri inferioris; habebitur excessus totus, sive differentia inter numeros datos.*

Exemplum: Sit numerus 243 subtrahendus ex 795: ubi minor subscriptus majori est, fiet impr

B mis

mis 5—3=2: poniturque hæc nota 2 infra lineam: dein 9—4=5, & 5 priori verſus ſiniſtram adjungitur ſub ſecunda columna: denique ob 7—2=5, rurſus hoc reſiduum ſubſcribitur, ut differentia ſeu reſiduum totum evadat 552.

$$\begin{array}{r} 795 \\ \underline{243} \\ 552 \end{array}$$

38. Ratio eſt, quod ſubtractis ex 795. tot unitatibus, tot decadibus, centenariis &c. quot in 243 continentur, neceſſe ſit, ut numerus unitatum, decadum, centenariorum &c. remaneat, qui exceſſum numeri 795 ſupra 243 æquet.

39. OBSERVA I. *Quando in columna quapiam nota inferior major eſt ſuperiore, huic (ſuperiori) decas addenda eſt, atque exceſſus ſuperioris decade auctæ ſupra inferiorem ſubſcribendus; ut autem hujus decadis compenſatio fiat, nota verſus ſiniſtram proxima in numero minuendo mulctanda eſt unitate.*

EXEMPLUM. Sit numerus 38 ex 64 ſubtrahendus; poſtquam juxta regulam deſcripti ſunt, apparet, 4—8 fieri non poſſe; verum 14—8=6; quare 6 ſubjiciatur primæ columnæ; & quoniam decas addita fuit ad 4, in columna altera nequit, ut alias, poni 6—3, ſed tantum 5—3=2; ſubſcripto 2, differentia quæſita eſt 26.

$$\begin{array}{r} 64 \\ \underline{38} \\ 26 \end{array}$$

Exempla alia

$$\begin{array}{rrrr} 485000 & 50000 & 56078 & 489249 \\ \underline{402} & \underline{30000} & \underline{1003} & \underline{299999} \\ 484598 & 20000 & 55075 & 189250 \end{array}$$

40. II. *Ut conſtet, ſubtractionem rite eſſe peractam, exceſſus repertus addatur numero minori;* evidens enim eſt, ſummam debere numero majori æqualem fieri.

41.

41. III. Si numerus idem ſæpius, v. g. ſexies, vigeſies, centies &c. ex eodem ſubtrahi debeat, ut inveniatur, quoties major minorem excedat, adhibenda eſt ſubtractio compendiaria, quæ *Diviſio* appellatur.

D E

RELIQUIS ARITHMETICÆ

OPERATIONIBUS.

Quamvis juxta notionem Arithmetices ſuperius allatam (28) ea duabus tantummodo operationibus abſolvatur; quia tamen plures emergunt caſus (quos N. 34, & 41 indicavim9,) in quibus nimium longæ evaderent, earum ſequentia compendia ſunt excogitata.

De Multiplicatione.

42. Multiplicationis uſus eſt in reperienda citra longiorem calculum ſumma alicujus numeri ſibi ipſi pluribus vicibus addendi; ita ſi quis quærat ſummam, quæ ex 12 novies ſumptis oritur, neceſſe erit, ut efformet ſeriem e 12 novies ſcriptis, indeque ſummam 108 colligat (31). niſi multiplicationem adhibeat, qua eandem ſummam 108 ſine ejusmodi ambagibus inveniet.

43. Atque in exemplo propoſito numerus 12 *Multiplicandus* dicitur, 9 *Multiplicator*, & 108 *productum*, ſive *factum;* commmuni vocabulo tam multipiicandus, quam multiplicator *factores* appellantur.

Igitur clarum eſt, *productum eſſe ſummam multiplicandi toties ſumti, quot multiplicator unitates continet:* ſive, quod idem, in producto toties contineri multiplicandum, quoties unitas in multiplicatore.

44. Ex multiplicatione ergo hæc proportio deducitur: *unitas eſt ad multiplicandum, ut multiplicator ad productum.*

45. Si loco 12 in una ſerie novies ſcripti, ponatur 9 duodecies, patet, in utravis eandem ſummam 108 debere colligi; atque hinc intelligitur, *perinde eſſe, uter e duobus numeris pro multiplicando ſumatur, cum alter ſemper futurus ſit multiplicator.*

46. Pro multiplicatione numerorum ſimplicium nulla præſcribi poteſt regula, cum quisque videat, factum ex 2 in 3 ductis eſſe 6, cujus compendiaria ſignificatio eſt $2 \times 3 = 6$ (ſignum x enunciatur *multiplicatum per*, vel *ductum in*); ſimiliter $3 \times 4 = 12$, $7 \times 5 = 35$ &c. Quin opus eſt producta numerorum ſimplicium memoria tenere, ut regularum multiplicationis uſus expeditior ſit. Quem in finem paulo majora ſequente tabella ſubjicimus.

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$

$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

47.

47. Si dentur duo numeri, v. g. 32 & 24, ut obtineatur eorum factum, *imprimis alteruter, quem quis multiplicatorem esse velit* (plerumque minor assumitur) *subscribitur multiplicando*, quemadmodum in additione; in præsente exemplo ponitur 24 sub 32: *tum vero a dextra versus sinistram progrediendo ponuntur producta singularum notarum multiplicandi ductarum in singulas notas multiplicatoris infra lineam.* Unde scribuntur imprimis *producta e notis singulis multiplicandi in unitates multiplicatoris*, dicendo exempli causa $2 \times 4 = 8$, & ponuntur 8 sub unitatibus utriusque factoris; dein $3 \times 4 = 12$, & adjunguntur priori notæ sub linea 12 versus sinistram. Dein *itidem a dextra versus sinistram scribuntur producta singularum notarum multiplicandi in decades multiplicatoris;* ut si v. g. dicas: $2 \times 2 = 4$, scribe 4 infra notam 2 multiplicatoris: $3 \times 2 = 6$, adjunge 6 priori notæ 4. *Denique summa* horum *productorum colligatur*, & habebitur factum totale 768.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 768 \end{array}$$

48. Ut operandi methodus rite intelligatur, ita quisque apud semet ratiocinari potest: evidens est, productum ex 32 in 24 esse æquale (43) decadibus & unitatibus numeri 32 toties sumtis, quot in 24 unitates continentur, hoc est sumtis quater (quippe 4 sunt in 24 unitates simplices), & bis denis vicibus, quia 2 in eodem adsunt præterea decades. Ergo cum 2 unitates multiplicandi quater accceptæ efficiant 8 unitates, has imprimis in loco unitatum subscribere debeo. Deinde 3 decades multiplicandi sumtæ quatuor vicibus conficiunt 12 decades: quare prioribus 8 unitatibus versus sinistram 12 adjicienda sunt, ut scilicet locum decadum occupent.

Progrediendum jam ad duas decades multiplicatoris, & cum 2 unitates multiplicandi acceptæ bis denis vicibus producant 4 decades, sub secunda versus

ſus ſiniſtram columna ſcribenda ſunt 4, ſeu, quod idem, ſub eodem multiplicatoris loco, ex quo præſens ejusdem nota accepta eſt, cum factum 4 jam decades deſignet, ideoque etiam in decadum loco conſtituendum ſit. Denique tres decades multiplicandi bis denis vicibus acceptæ efficiunt 6 decades decadum, hoc eſt 6 centenarios; unde 6 adſcribi debent ad 4 verſus ſiniſtram partem in centenariorum loco: & factum ex 3 decadibus & 2 unitatibus multiplicandi in duas decades multiplicatoris erit ſexaginta & quatuor decades, ſeu ſex centenarii, & quatuor decades. Supereſt tantum, ut productum iſtud addatur prius invento, ut obrineatur factum totale ex omnibus partibus multiplicandi in omnes partes multiplicatoris, 768 ſcilicet.

EXEMPLUM Aliud multiplicationis numerorum paulo magis compoſitorum. Quæritur productum ex 564 in 249: utroque numero ſecundum præſcriptam regulam diſpoſito, multiplicetur primo 564 per 9 unitates multiplicatoris, dicendo $4\times9=36$; ponatur 6 in loco unitatum, & 3. reſervetur; $6\times9=54$, ſed quoniam ſuperfuerunt e priore facto 3, dicatur $54+3=57$, & ſcribatur 7, 5 in ſequentem claſſem rejecto; $5\times9=45$, & $45+5=50$, quod totum ſcribatur, cum nihil ſuperſit in unitates multiplicatoris ducendum.

			5	6	4
			2	4	9
		5	0	7	6
	2	2	5	6	
1	1	2	8		
1	4	0	4	3	6

Sumantur dein 4 multiplicatoris decades, per quas multiplicetur 564; nempe $4\times4=16$; retenta decade ponatur 6; $6\times4=24$, $+1=25$; reſervato 2, & 5 ſubſcripto, eſt ulterius $4\times5=20$, $+2=22$; quod totum exprimendum eſt. Denique ſimili ratione 564 ducatur in 2 centenarios alterius factoris, ſcilicet $2\times4=8$, quod ſubſcribitur loco centenariorum: $6\times2=12$, ſervatur 1, & 2 præfiguntur centenanariis; $5 \times 2 = 10$, $+ 1 = 11$, quo ad sinistram adjecto colligitur summa factorum particularium, eritque factum totale 140436.

49. OBSERVA I. Si vel in uno, vel in utroque numero in fine adsint unus, pluresve zeri, operatio contrahitur, solis notis reliquis multiplicatis, factoque totali tot adjectis zeris, quot in utroque simul numero aderant. Exempli causa ut obtineatur factum ex 406000 in 10700, multiplicetur 406 per 107, & summæ factorum partialium 43442 adjiciantur in fine 5 zeri; erit productum totale 43442000000.

Ratio patebit, si facta, ut alias, operatione productiore, attendatur, zeros inutiles occurrere.

Exempla Multiplicationis

466	1000000	65464
1002	1000	4053
932	1000000000	196392
466		327320
466932		261856
		265325592

50. II. Num quis inter operandum hallucinatus sit, facile deteget, si commutatis numeris, & multiplicatore pro multiplicando assumpto operationem repetat: quippe cum idem omnino factum obtinere debeat (45).

De Divisione.

51. Divisio est compendiaria subtractio, qua, quoties fieri potest, quantitas una ab altera demitur, ut quoties altera contineatur in altera, innotescat.

Sic, ut sciatur, quoties 4 in 12 contineantur, methodum nobis hanc ipsa natura commonstrat, ut scilicet 4 ex 12 subducantur: restabunt 8: tum si hinc denuo 4 auferamus, 4 relinquuntur; ac denique 4 detractis ex 4, nihil remaneat. Ex quo quisque videt, nu-

numerum 12 penitus exhauriri, ſi 4. tribus vicibus demantur, ideoque hunc in illo toties accurate contineri. At enim prolixa nimis hæc methodus eſt, quando numeri majores proponuntur. Ejus compendio itaque, ſive diviſione, utimur, ut expeditius reperiatur, quoties in una quantitate (quæ tum *dividendus* dicitur) altera (quæ *diviſor* vocatur) contineatur. *Quotiens*, ſive *quotus* apppellatur numerus ndicans, quoties diviſor inſit in dividendo.

In exemplo adducto dividendus eſt 12, diviſor 4, quotiens 3.

52. Ex his notionibus deducitur I, *in dividendo toties contineri diviſorem, quoties unitas in quotiente reperitur.* Quotiens enim exprimit, quot ſubtractiones faciendæ ſint, ut dividendus exhauriatur.

53. Hinc ſemper habetur analogia: ***unitas eſt ad quotum, ut diviſor ad dividendum.***

54. II. Diviſorem toties ſumtum, quot unitates ſunt in quotiente, debre æquare dividendum: (id enim nil aliud eſt, quam toties reſtituere diviſorem, quoties ablatus eſt, quo fit, ut dividendus integer reddatur) ſeu, quod idem eſt, *factum ex diviſore in quotientem eſſe æquale dividendo.*

55. Itaque primo, *ut examinetur, an quotiens accuratus ſit, is multiplicandus eſt per diviſorem, & factum cum dividendo conferendum.* Quod ſi enim hoc majus deprehendatur, quam dividendus, quotus juſto major acceptus eſt, & ex oppoſito.

56. Dividendus conſiderari poteſt inſtar producti alicujus ex multiplicatione, cujus factores ſint diviſor & quotiens. Unde dividendum partiri per diviſorem, ut obtineatur quotus, idem eſt, ac factum aliquod dividere per unum factorem cognitum, ut factor alter

ter reperiatur. Hinc ſecundo: *dato producto & factore ejus altero, ut inveniatur alter factor, productum per factorem datum dividendum eſt.*

57. III. Operatione ſuperiore effectum eſſe, ut 12 in tres partes æquales ſecaretur, quarum quævis ſit 4; ſive in partes 4 æquales, quarum quælibet ſit 3. Igitur *dum quantitas in partes quotvis diſtribuenda eſt, ea per numerum partium dividi debet: quotus exprimet magnitudinem partium ſingularum.*

58. CASUS I. *quando dividendus & diviſor ſunt numeri ſimplices.* Enimvero tum ſine artis adminiculo quotiens innoteſcit. v. g. Nemo eſt, qui ignoret, 4 in 8 accurate bis contineri, ſeu quotientem ex 8 per 4 diviſis eſſe 2, cum ſit $2\times4 = 8$. Compendii cauſa diviſio ſic exprimitur $\frac{8}{4} = 2$. Diviſor ſcilicet dividendo interpoſita linea ſubſcribitur, & enunciatur *diviſum per.* (Alii ſcribunt $8:4 = 2$). Pari modo $\frac{9}{3} = 3$. quod ſcilicet $3\times3 = 9$; & $\frac{6}{2} = 3$, ob $3\times2 = 6$.

59. *Quando quotiens exactus haberi nequit* (ut ſi quis velit 9 per 4 dividere, illico intelligit, 4 in 9 eſſe plus binis, ſed minus tribus vicibus, ideoque quotum verum eſſe inter 2 & 3), *hoc in caſu pro quoto ſumitur minor eorum numerus, inter quos verus quotus contineri debet, perque eum multiplicatur diviſor; factum ex dividendo ſubtrahitur, & reſiduum ſcribitur penes quotum, eique lineola ſubducto diviſor ſubſcribitur.*

In priore exemplo, in 9 comprehenditur 4 plus binis, ſed minus tribus vicibus; unde ſumto quoti loco 2, fit $2\times4=8$; tum $9-8=1$, & habetur $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, id quod denotat, 9 diviſa per 4 dare quotum 2, & præterea remanere unam unitatem ex 9 in quatuor partes diſtribuendam. Similiter $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$; $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

60. *Obſerva I.* Tribus igitur operationibus diviſio abſolvitur: Primo *dividitur dividendus per diviſorem,*

 ut

ut habeatur quotiens; Secundo *multiplicatur divisor per quotientem, ut obtineatur productum;* Tertio *hoc productum subtrahitur a dividendo, ut reperiatur residuum.*

61. II. Si divisor major sit dividendo, uti si oporteat 4 per 7 dividere, satis est, si ponatur $\frac{4}{7}$ instar residui divisionis, quo scilicet quotiens designetur.

62. Id genus quotientes, seu divisionum residua, aut universim quævis expressio divisionis, qua numero alteri interjecta linea alter subjicitur, *fractiones* dicuntur, vel *numeri fracti.* Et ex opposito vocantur *integra*, vel *numeri integri*, qui sine ea linea scribuntur.

63. III. Quantitas, quæ per alteram exacte, quin quidpiam maneat residui, dividi potest, dicitur *multipla* illius, quippe æqualis facto ex quotiente divisionis in quantitatem illam ducto. Ita 8 est multiplum numerorum 4 & 2: item 12 numerorum 6, 4, 3, & 2: omnis autem numerus est multiplum unitatis; at vero 8 non est multiplum de 7, nec de 6, vel 3, similiter 11 nullius unitate majoris est multiplum.

64. IV. Quantitas, cujus altera est multiplum, vocatur *aliquota*, sive *pars aliquota* illius multipli: sic 4 & 2 sunt aliquotæ numeri 8,

65. V. Numerus, qui nullius alterius, quam unitatis, est multiplus, dicitur *numerus primus.* Horum numerorum amplæ tabulæ apud varios scriptores extant; en eos, qui centenario sunt inferiores:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53; 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,

66. CASUS II. *quando dividendus, & divisor sunt numeri compositi.*

Proponatur exempli gratia numerus 147475 per 362 dividendus. *Videatur primo, in quot notis ex parte*

sini-

ſiniſtra (hic enim ſemper diviſio inchoanda) *contineri poſſit diviſor?* & quoniam 362 in primis tribus notis 147 dividendi non continentur, ſed ſolum in quatuor 1474. *iſtæ interjecto puncto a reliquis ſeparentur, diviſorque iisdem ſubſcribatur*, atque adeo prima diviſionis pars eſt, ut 1474 per 362 dividantur. Quoniam vero 1474 ſimul per 362 dividi nequeunt, dividantur ſoli centenarii numeri 1474 per centenarios alterius 362, & quæratur, 3 in 14 quoties contineantur? & licet plus 4 vicibus 3. in 14 inveniantur, accipiatur tamen 4 pro quotiente, & per eum multiplicetur diviſor 362, factumque 1448 a dividendo 1474 ſubtrahatur; ſuperérunt 26 ex prima diviſionis parte.

Huic reſiduo ad partem dextram adjungatur 7, nota proxima earum numeri propoſiti, quæ a primis quatuor ſeparatæ fuerunt, pars altera diviſionis erit, ut 267 per 362 dividantur. Unde rurſus centenarios numeri 267 per centenarios 362 dividere oportet, quærendo 3 in 2 quoties reperiantur? & quia ne ſemel quidem major in minore continetur, prius invento quoto adjungatur 0, ducatur diviſor 362 in 0, productum, quod pariter fit 0, ſubducatur a dividendo, remanent 267, ita pars altera peracta eſt.

```
1474,75            141
———————— = 407 ————————
 362               362
1448
————
  267
    0
————
 2675
  362
 2534
————
  141
```

Reſiduo adſcribatur nota altera 5, quæ ſupererat puncto ſeparata, conſiſtet tertia pars diviſionis in eo, ut 2675 per 362 dividantur. Quæratur igitur 3 in 26 quoties inſint? reperitur novus quotus 8, quo in 362 ducto, obtinetur factum 2896: & quia ab hoc dividendus 2675 exceditur, facile apparet, quotum 8 eſſe juſto majorem: huic igitur deleto alter 7 ſubſtituatuatur, per quem ſi multiplicetur 362, productum fit 2534, quo ex 2675 ablato remanent 141. Cum porro nulla ſuperſit nota in dividendo, quæ huic reſiduo adjungi poſſet, tota diviſio abſoluta eſt, quotus inventus 407, reſiduum 141, quod fractionis in modum a latere quoto adſcribitur.

67. *Accuratio diviſionis exploratur, ſi omnia multiplicationum producta cum ultimo reſiduo eo ordine, quo inter operandum occurrerunt, in unam ſummam colligantur.* In allato exemplo producta ſunt 1448, 0, 2534, reſiduum ultimum 141: deletis igitur reliquis notis, hæc ut ſuis quæque locis diſpoſita ſunt, addantur, reperitur ſumma 147475 æqualis numero ad dividendum propoſito. Ex quo conſtat, diviſionem rite factam eſſe. Quod ſi enim hæc ſumma inveniretur alia, id certo eſſet erroris indicio. Ratio eſt, quod ſumma productorum ſingularum notarum quotientis in diviſorem, æqualis ſit producto quotientis totius in eundem diviſorem; hoc vero (54) productum ex quoto in diviſorem reddere debeat dividendum.

68. OBSERVA I. Cujusvis partis diviſio ſemper per primam a ſiniſtris diviſoris notam inſtituitur. Itaque ſi primam hanc notam ſequantur duæ aliæ, non attenditur ad binas dexteriores notas dividendi, ſed priores tantum per primam diviſoris notam dividuntur. Si hæc prima nota diviſoris adjunctas habeat tres, quatuor &c alias, tribus, quatuor, &c. dextimis in dividendo neglectis, primæ a ſiniſtris per primam diviſoris dividuntur.

69. II. Evenit ſæpe inter dividendum, ut quotiens aſſumatur vero major, præcipue dum nota primam in diviſore ſequens paulo major eſt, uti ſunt 6, 7, 8 vel 9.

70. III. Quando reſiduum quodpiam nova dividendi nota auctum, membrum minus, quam ſit diviſor, ſuppeditat, compendii

dii cauſa illico quotienti invento adjungi poteſt o, atque ad membrum dividendum ſequens e ſuperioribus nota adscribi, ut novo quoto reperiendo locus ſit.

71. IV. Ut adhuc magis brevitati conſulatur, diviſor non ſub ſingulis partibus scribitur, ſed idem adhibetur, qui ab initio ſub dividendo poſitus eſt. Verum attendendum eſt, ne ordo localis notarum perturbetur. Hoc compendio ſi utamur, exemplum præcedens hoc ordine disponetur:

$$\frac{1474\cdot75}{362} = 407\frac{141}{632}$$

1448
267
0
2675
2534
141

Addimus huic alia non nulla: in primo numerus 473645 per 1002 dividendus proponitur; in secundo 200000 per 191; in tertio 790758 per 354.

$$\frac{4736,45}{1002} = 472\frac{701}{1002} \qquad \frac{200,000}{191} = 1047\frac{23}{191} \qquad \frac{790\cdot758}{394} = 2007$$

4008	900	788
7284	764	2758
7014	1360	2758
2705	1337	0
2004	23	
701		

72. V. Si diviſor in fine zeros adjunctos habeat, diviſio compendioſior redditur, ſi tot notæ ex parte dextra dividendi re-

refecentur, quot zeri funt in divifore: peracta vero divifione in reliquis notis, refiduo, fi quod fuerit, ultimo junguntur notæ absciffæ dividendi, fubscripto ex more divifore. Jn exemplo fi dividendus fit 238873 per 3600, dividatur 2388 per 36; reperitur quotus 66, & remanent 12: itaque quotiens quæfitus erit $66\frac{1273}{3600}$. Pariter quotus ex 324755 per 300 divifis eft $1082\frac{155}{300}$; item fi 843554 dividantur per 1000, quotus obtinetur $843\frac{554}{1000}$.

73. VI. Denique fi tam in fine diviforis, quam dividendi adfint zeri, hi in utroque pari numero deleri poffunt, reliquis notis juxta regulas, & quæ fuperius notavimus, divifis: ut fi dividendus detur 417000, divifor 2500, opus eft tantummodo, ut 4170 per 25 dividatur: erit quotus $166\frac{20}{25}$. Sic etiam divifio inftituetur in 43495 per 2850, loco 43495000 per 2850000, & reperitur quotus $15\frac{745}{2850}$. Eodem modo ex divifione 100000 per 1700 quotus eft $58\frac{14}{17}$.

Notandum. Qui frequentiore exercitio expofitas operationes, atque obfervationes familiares fibi reddiderit, debitamque animi attentionem adhibuerit, facile intelliget, eas omnes reduci ad operationes articulo 59 præscriptas: nifi quod paulo complicatiores fint. Jllud autem, quod ultimo loco obfervandum diximus, ex natura fractionum decimalium, quas infra tractabimus, petitum eft.

DE FRACTIONIBUS

De Fractionum natura generatim: de earum valore, & comparatione.

74. Vidimus (62) fractiones nihil aliud effe, quam quantitates per alias majores divifas, & plerumque refidua divifionum.

Sed ut res hæc clarius concipiatur, meminiffe oportet, quemvis numerum (20) exprimere, quot quantitas quæpiam partes æquales contineat ejusmodi, quarum quælibet appellatur unitas: at enim nul-

nulla reipsa unitas datur, nulla datur pars determinata quantitatis, quæ etiam ipsa ex certo numero partium æqualium ac minorum compofita concipi non poffit: harum igitur partium fingulæ, aut aliquot fi accipiantur, unitatis illius portionem, five fractionem conftituunt. Jn exemplo: numerus 100 pedum compofitus eft ex certa quantitate determinata centies accepta, cujus longitudo pes appellatur. Eft igitur pes unitas refpectu numeri 100. Quia vero pes in 12 digitos dividitur, quisque digitus eft pars duodecima pedis. Et fieri fane poteft, ut fi spatium aliquod dimetiamur, illud non accurate 100 pedum reperiatur, fed forfan uno, alterove digito majus, vel minus. Atque tali cafu digitus ille, vel digiti erunt fractio pedis, quæ hunc in modum exprimitur $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$ &c. hoc eft: una ex duodecim partibus pedis, duæ ex duodecim partibus pedis &c.

75. Generatim ergo, *fi unitas fupponatur in certum partium æqualium numerum divifa, fractio indicat, quot ejusmodi partes accipiantur;* ita fractio $\frac{1}{3}$ fignificat, ex tribus partibus æqualibus, in quas unitas divifa eft, accipi unam; fractio item $\frac{4}{5}$ denotat, fumi 4 partes ex 5 æqualibus, in quas unitas tota fecta eft &c.

Numerus, feu nota fuperior, *numerator* fractionis appellatur; inferior *denominator;* in fractione ultimo loco allata $\frac{4}{5}$, numerator eft 4, denominator 5.

76. Unde fi fractio vera fit, & proprie dicta, debet effe quantitas unitate minor, quippe cum ejus numerator minor fit denominatore. Jnterim occurrunt fæpe quantitates fractionum forma expreffæ, in quibus numerator fit æqualis, vel etiam major denominatore, & tum fi numerator denominatori æqualis fit, fractio unitati æquatur: etenim cum $\frac{4}{4}$ denotet, ex unitate in quatuor partes æquales divifa fumi ejusmodi partes quatuor, evidens eft, unitatem inte-

integram accipi, atque adeo $\frac{4}{4}=1$. Quando autem numerator denominatorem ſuperat, valor fractionis unitatem excedit. Sic $\frac{12}{4}=3$ (58).

77. *Utra fractio altera major ſit, non adeo pronum eſt advertere, niſi ſi vel eundem numeratorem, vel eundem denominatorem utraque habeat.* Sic non illico apparet, quænam e duabus hisce fractionibus $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ major ſit. At ſi primo: *utriusque ſit idem numerator, ea major eſt, cujus denominator eſt minor.* Ita nempe manifeſtum eſt, fractionem $\frac{1}{3}$ eſſe hac altera $\frac{1}{4}$ majorem; item a $\frac{3}{5}$ excedi $\frac{3}{7}$ &c.

Secundo. *Si idem utriusque fractionis denominator, major eſt, quæ majorem habet numeratorem.* Nam patet, plus eſſe $\frac{2}{3}$, quam $\frac{1}{3}$; plus item $\frac{3}{4}$, quam $\frac{1}{4}$.

Valores fractionum communem numeratorem habentium ſunt inter ſe reciproce ut earum denominatores; quibus vero communis denominator eſt, ſunt directe ut earum numeratores.

78. *Fractionis valor non mutatur, ſi tam numerator, quam denominator per eandem quantitatem multiplicetur, vel dividatur.* Etenim cuivis clarum eſt, tantum habere illum, qui habet $\frac{1}{2}$, quantum qui habet $\frac{2}{4}$, vel $\frac{3}{6}$, vel $\frac{4}{8}$ &c: eſt vero $\frac{2}{4}=\frac{1\times 2}{2\times 2}$; $\frac{3}{6}=\frac{1\times 3}{2\times 3}$; $\frac{4}{8}=\frac{1\times 4}{2\times 4}$ &c.

Eodem modo cui ſunt $\frac{4}{8}$, nil plus habet, quam cui ſint $\frac{3}{6}$, vel $\frac{1}{2}$ &c. Quod ſi itaque uterque fractionum numerus dividatur per 2, 3, vel per 4, acquiruntur fractiones ejusdem valoris cum $\frac{4}{8}$. Demonſtrationem generalem hujus proprietatis fractionum dabimus, cum de rationibus Geometricis agemus (296).

Hinc conſequitur, *infinitas eſſe fractiones ejusdem valoris, quamvis diverſis terminis exprimantur.*

DE

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICIS UNIVERSIM, QUÆ IN FRACTIONIBUS INSTITUI POSSUNT.

Operationes Arithmeticæ in fractionibus duplicis speciei sunt: aliæ dicuntur *Reductiones;* aliæ nil differunt a quatuor regulis jam recensitis.

De Reductione Fractionum.

79. Reductio Fractionum est quædam earum transformatio, quam subeunt, ut cæteræ operationes commodius institui possint.

80. I. *Numeros integros reducere ad fractiones.*

Primo: Quilibet numerus fractionis instar exhiberi potest, si ei unitas pro denominatore tribuatur. Sic 6 forma fractionis habetur $\frac{6}{1}$,

Secundo. Ut autem numerus integer reducatur ad fractionem denominatoris cujusvis dati, multiplicetur per datum denominatorem, productum erit numerator. Sic si 6 reduci debeat ad fractionem, cujus denominator 7, acquiretur $\frac{42}{7}$: divisione enim 42 per 7 quotiens 6 iterum restituitur; unde $\frac{42}{7}$ & 6 sunt quantitates æquivalentes.

Tertio: Ut numerus integer & fractus reducatur ad unicam fractionem, multiplicetur integer per denominatorem fracti; producto addatur numerator fracti; erit summa numerator fractionis quæsitæ. Hac ratione $6\frac{3}{4}$ reducuntur ad fractionem $\frac{27}{4}$; $3\frac{1}{2}$ ad $\frac{7}{2}$.

81. II. *Fractiones plures ad eundem denominatorem reducere.*

Multiplicetur numerator & denominator cujusvis fractionis per denominatores omnium reliquarum.

Ut si $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{4}$ reduci debeant ad communem denominatorem, ducatur uterque terminus fractionis $\frac{1}{2}$ in 4, habebitur $\frac{4}{8}$; tum etiam alterius tam numerator, quam denominator multiplicetur per 2; fiet $\frac{6}{8}$; eruntque fractiones, reductæ $\frac{4}{8}$ & $\frac{6}{8}$. Eodem modo fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ acquirent eundem denominatorem, si primo fractionis $\frac{2}{3}$ uterque terminus ducatur in 7, dein in 4; fiet enim $\frac{2 \times 7 \times 4}{3 \times 7 \times 4} = \frac{56}{84}$. Deinde fractio $\frac{5}{7}$ multiplicetur per 3 & 4, ut fit $\frac{5 \times 3 \times 4}{7 \times 3 \times 4} = \frac{60}{84}$. Tandem ducatur $\frac{3}{4}$ in 3 & 7; erit $\frac{3 \times 3 \times 7}{4 \times 3 \times 7} = \frac{63}{84}$. Hinc fractiones propositæ evadent $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, & $\frac{63}{84}$, ejusdem valoris (78), cum uterque singularum terminus per easdem quantitates sit multiplicatus.

82. Hac eadem methodo fractiones quotcunque ad eundem numeratorem reduci possunt, si scilicet tam numerator, quam denominator cujusvis ducatur in numeratores reliquarum v. g. fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, reducentur ad $\frac{30}{45}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{30}{40}$.

83. III. *Fractionem datam ad numeratorem, vel denominatorem datum reducere.*

Quoniam quævis fractio exprimit rationem Geometricam, fieri subinde potest, ut fractio data ad aliam, numeratorem vel denominatorem datum habentem reducatur, atque id regulæ aureæ usu. Jn exemplo fractio $\frac{3}{5}$ reduci potest ad alteram, cujus denominator sit 20, si fiat: ut 5 ad 3, ita 20 ad numeratorem quæsitum, qui reperitur 12; & hinc $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$. Simili ratione eadem data fractio ad aliam reducitur, cujus numerator sit v. g. 18, si ponatur: ut 3 est ad 5, ita 18 ad denominatorem novæ fractionis, nempe 30, ut adeo habeatur $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$. Verum hæc reductio locum non habet, nisi si numerus datus sit termini homologi in fractione reducenda multiplus. Hac fractiones reducencendi methodo valor earum determinatur accuratius, uti dum una monetæ species ad alteram reducitur, v. g. libra ad solidos, sive partes vigesimas, solidus ad denarios, vel partes duodecimas; aut etiam gradus ad minuta, sive partes sexagesimas &c.

84. IV. *Fractionem ad expressionem simplicissimam, seu minimos terminos, reducere.*

Attendendum imprimis, an numerator denominatore major sit: id enim si sit, numerator dividatur per denominatorem. Sic $\frac{12}{4}$ reducitur ad 3, sive $\frac{12}{4}=3$; item $\frac{8}{3}$ reducitur ad $2\frac{2}{3}$.

85. Dein dispiciendum, an denominator & numerator non possit uterque per eundem aliquem numerum dividi, quin quid remaneat. Quod si fieri possit, fractio evadet simplicior citra valoris mutationem (78); & expressio eo erit simplicior, quo divisor utriusque termini major fuerit adhibitus.

Reductio hæc sæpe difficilis est, imo etiam fieri nequit. Satis plerumque fuerit ejus periculum facere, quando id notæ quædam proprietates numerorum svadent.

Primo: *Quivis numerus par est multiplus binarii, seu per 2 divisibilis.* Quando igitur fractionis termini sunt numeri pares, semper ad eorum dimidia reduci possunt. Exempli causa fractio $\frac{128}{432}$ reducitur ad $\frac{8}{27}$ continua per binarium divisione. nempe $\frac{128}{432}=\frac{64}{216}=\frac{32}{108}=\frac{16}{54}=\frac{8}{27}$.

Secundo: *Quivis numerus in fine habens* 0, *potest per* 5 *& per* 10 *dividi.* Itaque fractio $\frac{20}{30}$ reducitur ad $\frac{2}{3}$.

Tertio: *Quivis numerus, cujus ultima nota est* 5, *est multiplus* 5. Hinc $\frac{15}{85}$ potest reduci ad $\frac{3}{17}$. Similiter ex $\frac{120}{215}$ fit $\frac{24}{43}$.

Quarto: *Quivis numerus, cujus omnes notæ simplici additione in unam summam collectæ constituunt aliquod multiplum ternarii, ipse quoque ternarii aliquod multiplum est, ideoque per* 3 *dividi potest.* Unde fractio $\frac{288}{351}$ est divisibiſibilis per 3, & reducitur primo quidem ad $\frac{96}{117}$, dein vero ad $\frac{32}{39}$, quia ſumma notarum numeratoris eſt 18, denominatoris 9, poſtea, peracta prima diviſione, ſumma numeratoris 96 fit 15, denominatoris 117 denuo 9.

86. En autem methodum generalem inveniendi communem diviſorem maximum duarum quantitatum datarum: *Major per minorem dividatur, & ſi diviſio ſine reſiduo fieri poſſit, ipſa quantitas minor erit diviſor quæſitus.*

Sed ſi peracta diviſione aliquid remanſerit, quantitas data minor dividatur per hoc reſiduum: & ſi ſecunda hæc diviſio exacte fieri poſſit, primæ diviſionis reſiduum eſt diviſor communis maximus.

Quod ſi denuo relinquatur quidpiam, primum reſiduum dividatur per ſecundum: & ſi non deveniatur ad tertium reſiduum, ſecundum eſt quæſitus diviſor.

Univerſim, illud reſiduum eſt diviſor maximus, per quod reſiduum præcedens exacte dividi poteſt.

Exemplum. Sit reducenda fractio $\frac{91}{294}$ ad minimos terminos; quod ut fiat, quærendus eſt diviſor communis maximus numerorum 294 & 91. Dividatur itaque 294 per 91, remanebunt 21 (ad quotientem non attenditur); ulterius dividatur 91 per 21, reperitur (inſuper habito quoto) reſiduum 7. Per 7 dividatur primum reſiduum 21, fit quotiens 3, & remanet nihil. Hinc 7 eſt communis diviſor maximus quantitatum 294 & 91, fractioque propoſita reduci poteſt ad $\frac{13}{42}$, numeratore ſcilicet & denominatore per 7 diviſis, nec alia fractionis datæ expreſſio ſimplicior, ejusdemque valoris, haberi poteſt.

Quando fractio ad ſimpliciorem expreſſionem reduci nequit, continuatis diviſionibus ad reſiduum 1 devenitur, cum unitas omnium numerorum ſit communis diviſor.

Ut ratio regulæ perſpiciatur, advertendum eſt, quantitates duas nunquam poſſe per eundem numerum ita dividi, ut nihil remaneat, niſi ſint numeri illius producta; adeo, ut quantitas major ſit factum ex eo numero ſæpius ſumto, minor vero factum ex eodem minus ſæpe accepto. Itaque ſi jam quantitates A & B ſint ejusmodi compoſitæ, atque B ex A toties, quoties poteſt v. g. tribus vicibus ſubtracta nihil ſuperſit, evidens eſt, A eſſe compoſitam ex B ter ſumta; B vero ex B ſemel accepta, ideoque tali caſu B eſſe communem diviſorem maximum quantitatum A & B.

Se-

Secundo. Sed ſi ſubtracta B ex A, quoties fieri poteſt, in præſente exemplo ter, ſuperſit aliquod reſiduum C; erit A — C quantitas compoſita ex B tribus vicibus ſumta; ſive A — C = 3 B conſequenter ſi C quoque certo vicium numero acceptum, v. g. quater, adæquet quantitatem B; idem C aliquoties ſumtum debet etiam A — C æquare. Et reipsa clarum eſt, ſi ſit B = 4 C, & A — C = 3 B, fore A — C = 3 x 4 C, atque hinc A = 13 C. Oportet igitur C ex B ſubtrahere, quoties fieri poteſt; & ſi nihil remaneat, eſt C factor ille, ex quo quantitates A & B ſunt compoſitæ.

Tertio: Quod ſi C ex B ſubducto, v. g. quater, quoties nempe fieri poteſt, adhuc ſuperſit D, neceſſe eſt, ut B — D compoſita ſit ex C quater ſumto, ſeu B — D = 4 C. Ergo ſi D aliquoties acceptum, v. g. ter, adæquet C, pariter aliquoties acceptum debet æquare tam A, quam B, eritque factor compoſitarum A & B. Nam habebitur C = 3 D; igitur in æquatione B — D = 4 C fiet B — D = 4 x 3 D, & conſequenter B = 13 D. Æquatio porro A — C = 3 B, mutabitur in hanc A — 3 D = 3 x 13 D, & tandem A = 42 D.

Hic ratiocinandi modus ſi extendatur ulterius, apparebit liquido, poſtremum reſiduum, quo aliquoties ſumto reſiduum præcedens accurate exhauritur, eſſe quantitatem, ex qua duæ datæ A & B ſunt compoſitæ, & hinc eſſe diviſorem communem maximum.

Illud vero per ſe etiam patet (51), quantitatem unam dividere per alteram eſſe idem, ac alteram toties auſferre ex altera, quoties fieri poteſt.

De additione Fractionum.

87. Ut fractiones addi poſſint, *reducantur prius omnes ad communem denominatorem; reductarum numeratores colligantur in unam ſummam, quæ erit numerator novæ fractionis cum denominatore communi.*

Exempli cauſa, addendæ ſint fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$; reducantur (81) ad $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$; erit earum ſumma $\frac{5}{6}$.

Similiter ut addi poſſint fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, reducendæ ſunt ad $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$ (81); ſumma numeratorum eſt 46; habebitur $\frac{46}{24}$, & expreſſione ſimpliciore $1\frac{11}{12}$.

88.

88. Si præterea adſint numeri integri, in unam ſummam colligan ur, iisque adjungatur ſumma fractionum. Sic $4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} = 6\frac{5}{6}$; item $3\frac{2}{3} + 4\frac{3}{4} = 8\frac{5}{12}$,

De Subtractione.

89. Fractiones quarum altera ab altera ſubtrahenda eſt, *reducantur ad communem denominatorem: accipiatur differentia numeratorum pro numeratore novæ fractionis habentis denominatorem communem.*

Exemplum. Oporteat $\frac{1}{4}$ ex $\frac{2}{3}$ ſubtrahere: facta reductione habebuntur $\frac{3}{12}$ & $\frac{8}{12}$ (81) quarum differentiam patet eſſe $\frac{5}{12}$.

90. Si fractionibus præſixi ſint numeri integri, ii prius more ſolito a ſeſe ſubtrahantur; & reſiduo adſcribatur differentia fractionum. Jta ſi ex $4\frac{3}{4}$ ſubtrahi debeant $3\frac{1}{2}$, obtinetur $1\frac{2}{8}$ ſeu (85) $1\frac{1}{4}$.

91. At ſi contingat, ut fractio ſubtrahenda major ſit alterâ, quam quantitas minuenda adjunctam habet, ſeu etiam ſi fractio a numero integro auferri debeat, unitas quantitatis minuendæ reducatur prius ad fractionem (80).

Ut ſi $3\frac{2}{3}$ ſubtrahi debeat ex $6\frac{1}{4}$, quantitas $6\frac{1}{4}$ reducatur prius ad $5\frac{5}{4}$; tum fractiones reducantur ad communem denominatorem $\frac{8}{12}$ & $\frac{15}{12}$; auferatur $\frac{8}{12}$ ex $\frac{15}{12}$; manebit $\frac{7}{12}$; auferatur porro 3 ex 5, ſupererunt 2; ut adeo tota differentia quæſita ſit $2\frac{7}{12}$.

Item ut ex 4 ſubduci poſſit fractio $\frac{2}{3}$, reducenda ſunt 4 ad $3\frac{3}{3}$; hinc ablatis $\frac{2}{3}$, reſiduum eſt $3\frac{1}{3}$. Pariter ut ſubtrahantur $\frac{4}{5}$ ex 2, loco 2 fiat $1\frac{5}{5}$, invenietur differentia $1\frac{1}{5}$.

De Multiplicatione.

92. Quando duo numeri multiplicandi ſunt, quorum vel unus, vel uterque fractus eſt, ſequens regu-

gula universim est tenenda: *reducatur numerus integer, si quis adest, ad formam fractionis* (80): *fiat nova fractio, cujus numerator sit factum ex numeratoribus multiplicandi & multiplicatoris; denominator vero factum ex eorundem denominatoribus: reducatur ad expressionem simplicissimam.* Exemplum sit.

Quantitas multiplicanda	per;	scribatur:	erit factum;	& expressio simplicissima.
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{12}$	4	$\frac{7}{12} \times \frac{4}{1}$	$\frac{28}{12}$	$2\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$4\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} \times \frac{33}{7}$	$\frac{66}{21}$	$3\frac{1}{7}$
$3\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4} \times \frac{11}{2}$	$\frac{165}{8}$	$20\frac{5}{8}$

Ut regulæ veritas pateat, illud revocandum in memoriam, quod multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$ exempli causa, nihil aliud sit, quam $\frac{2}{3}$ toties accipere, quoties unitas in $\frac{1}{2}$ continetur (43); jam vero unitas in $\frac{1}{2}$ non continetur, sed tantum dimidium unitatis reperitur semel in $\frac{1}{2}$; igitur etiam tantum dimidia sui parte quantitas $\frac{2}{3}$ sumi debet, hoc est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

93. *Coroll:* I. Ex secundo exemplo manifestum est, quod *dum numerus integer in fractum, vel vicissim, duci debet, aut numerator fractionis multiplicandus sit per integrum, aut denominator per eundem dividendus.* Idem enim obtinetur $2\frac{1}{3}$ seu fiat $4 \times 7 = 28$, & scribatur $\frac{28}{12}$; seu $\frac{12}{4} = 3$, & ponatur $\frac{7}{3}$. Verum per divisionem res non semper potest confici.

94. II. Tironi forsan sequens difficultas moveri poterit: $\frac{2}{3}$ solidi 8 denarios valent, & $\frac{1}{2}$ solidi sunt 6 denarii: quod si jam $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ efficiant $\frac{1}{3}$ solidi, seu 4 denarios; qui fieri poterit, ut tamen, si 8 denarii multiplicentur per 6 denarios, acquirantur 48 denarii?

Verum expediemus hoc facile, si advertamus, quantitatum naturam per multiplicationem mutari; earum partes ele-

van-

vantur ad quadrata, dum altera in alteram ducitur, ſeu dum acquirunt duas dimenſiones (vid. N 586); trium dimenſionum vero ſi fiant, elevantur ad cubos (708). Jtaque menſura ſimplex v. g. certum pedum numerum in longitudine continens, non aliam poteſt habere fractionem, niſi ratione 12 digitorum, in quos pes ſubdividitur. At ſi menſura dati pedum numeri in longum, multiplicatur per aliam, quæ itidem aliquot pedes velut in latum habeat, factum erit ſuperficies certi numeri pedum quadratorum, quorum quivis 144 digitos contineat. Sic hexapeda unius dimenſionis 6 tantummodo pedum eſt; at corpus unius hexapedæ (cum triplex ſit corporis dimenſio) eſt 216 pedum cubicorum. Atque ob hanc rationem factum ex $\frac{2}{8}$ in $\frac{1}{2}$ ſolidi $\frac{1}{3}$ eſt ſolidi, non ſimplicis, qui 12 denariis conſtituatur, ſed quem 144 denarii efficiant. Patet autem, $\frac{1}{3}$ ſolidi 144 denarios continentis eſſe 48 denarios, ſive factum ex denariis 8×6.

De Diviſione.

95. Diviſio fractionum eo omnino modo peragitur, quo multiplicatio, niſi quod diviſoris termini inverti debeant, ut numerator denominatoris locum occupet, & viciſſim. Exempli cauſa ſit.

Quantitas dividenda	per;	scribatur primo:	dein vero;	erit quotiens,	& expreſſio ſimpliciſſima.
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$	$\frac{6}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{3} : \frac{5}{1}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{4}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} : \frac{5}{2}$	$\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$2\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1} : \frac{7}{3}$	$\frac{3}{1} \times \frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$1\frac{2}{7}$

Ratio hujus operationis. & cur v. g. ſi $\frac{3}{4}$ dividantur per $\frac{1}{2}$, quotiens fiat $1\frac{1}{2}$; patebit, ſi cogitetur, quotientem toties debere contineri in dividendo, quoties unitas in diviſore; jam vero unitas non niſi dimidia ſui parte continetur in diviſore $\frac{1}{2}$; igitur etiam quoti tantum dimidium debet contineri in dividendo: atqui quantitas, cujus dimidium continetur in altera, eſt alterius illius dupla: quare dum $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ dividuntur, quotus eſt duplus dividendi $\frac{3}{4}$, hoc eſt, debet eſſe $\frac{6}{4}$, ſive $1\frac{1}{2}$.

Quin

Quin per ſe manifeſtum eſt, in omnibus allatis exemplis quotiente ducto in diviſorem obtineri quantitatem dividendam. Ut $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Idem eſt in cæteris.

Obſerva. Pars numeri fracti, v. g. tres quartæ duarum ſeptimarum, ſeu $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$, dicitur *fractio fractionis*. Liquet autem $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ ſignificare quartam partem quantitatis $\frac{2}{7}$ eſſe ter accipiendam. Unde $\frac{2}{7}$ dividendæ ſunt per 4, & quotiens ducendus in 3, quo fit $\frac{6}{28}$, vel $\frac{3}{14}$. Eſt autem $\frac{6}{28}$ factum ex $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{7}$: ergo primo: *valor de fractione fractionis acquiritur, ſi duæ illæ fractiones invicem multiplicentur.* Secundo: *Idem valor eſt, ſeu accipiantur $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{4}$ ſeu $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$* (45). Idem applicari poteſt fractionibus, quæ ex fractionibus aliis per alias diviſis emergunt, rurſusque per novas fractiones dividuntur in infinitum.

DE FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.

De Natura Fractionum Decimalium.

96. Præter jam expoſitas in Matheſi adhibentur aliæ fractiones, quas *decimales* appellant. Harum denominator ſemper eſt unitas cum tot adjunctis zeris, quot notis numerator conſtat; hinc fit, ut denominator ne quidem ſcribatur, ſed numerator tantum hujus generis fractionis interjecta virgula a numeris integris præfixis ſeparetur. Exempli cauſa loco $19\frac{4}{10}$, ſcribitur 19, 4; $19\frac{4}{100}$ exprimitur per 19, 04; ut ſcilicet zero ante quaternarium poſito intelligatur, denominatorem

E eſſe

esse 100. Eodem modo $19\frac{4}{1000}$ indicantur sequente ratione 19, 004 : item 49, 01742 $=49\frac{1742}{100000}$; 0, 035 $=\frac{35}{1000}$.

97. Sunt, qui virgulæ loco puncto utantur. Plurimi cum fractio sine integro indicanda est, ante virgulam vel punctum zerum omittunt, & ut v. g. $\frac{35}{1000}$ significent, scribunt: , 035, vel . 035; $\frac{4}{10000}$ exprimunt per, 0004 aut . 0004.

98. Hinc autem colligitur, prima post virgulam notâ in fractione decimali exprimi partes decimas, altera centesimas, tertia millesimas &c. Sic 4, 217 idem est ac $4+\frac{2}{10}+\frac{1}{100}+\frac{7}{1000}$ aut vero $4+\frac{200}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{7}{1000}$, quod tandem reducitur ad $4\frac{217}{1000}$ per § 88.

99. Ut numerus integer per 10, 100, 1000 &c multiplicetur, alia re opus non est, quam ut e parte dextera unus, duo, tres &c zeri adjungantur. Itaque etiam si notis fractionis decimalis versus dexteram unus, duo, tres &c zeri adscribantur, tam numerator, quam denominator per 10, 100 &c multiplicatur; ac propterea idem manet fractionis valor (78). Huncin modum fractiones 0,1; 0, 10; 0, 100; 0, 1000 æquales sunt; uti etiam 4, 7 $=$ 4, 7000 &c. Jllud etiam facile intelligitur, quantitatem 4, 7 esse majo-

jorem, quam 4, 69, aut etiam majorem, quam 4, 699999, &c; etenim $4,7 = 4\frac{7}{10} = 4\frac{70}{100} = 4,\frac{700000}{1000000}$ & $4,69 = 4\frac{69}{100}$; $4,699999 = 4\frac{699999}{1000000}$: eſt autem $\frac{70}{100}$ major, quam $\frac{69}{100}$ (77); & $\frac{700000}{1000000}$ major, quam $\frac{699999}{1000000}$; igitur etiam 4, 7 major eſt, quam 4, 69, vel 4, 699999; aut denique major, quam 4 cum fractione quotcunque notarum, quarum prima ſit minor, quam 7.

100. Porro perſpicuum eſt, 4,699999 propius accedere ad æqualitatem cum 4,7, quam 4, 69, vel 4,6999; at 4, 6999 eſſe viciniorem valori 4,7, quam 4,69: nam inter 4,699999 & 4,700000 $=$ 4,7 non niſi $\frac{1}{1000000}$ diſcrimen eſt; cum $\frac{1}{10000}$ addenda ſit, ut 4,6999 æquet valorem 4,7000 ſive 4,7; ad 4,69 vero $\frac{1}{100}$ ut cum 4, 70, ſive 4,7 æquetur. Eſt autem (77) $\frac{1}{1000000}$ longe minor, quam $\frac{1}{10000}$ & $\frac{1}{10000}$ longe minor, quam $\frac{1}{100}$: igitur differentia inter 4, 7, & 4, 699999 longe minor eſt, quam inter 4, 7 & 4, 6999; & 4, 6999 longe minus differt a 4, 7, quam 4, 69. Unde evidens eſt 4,699999 propius multo accedere ad æquali-

tatem cum 4, 7, quam 4, 6999; & 4, 6999 propius etiam, quam 4, 69.

101. Ex his autem ſequitur I: *Fractionem decimalem eſſe altera majorem, ſi primis utriusque notis exiſtentibus æqualibus, alias præterea adjunctas habeat, quæ non ſint meri zeri.*

102. II ſequitur: *Si fractio decimalis ſit plurium notarum, verſus dextram aliquas ſine magno valoris decremento omitti poſſe.* v. g. Sint calculo quovis repertæ 2, 4546 hexapedæ; ſi dextima fractionis nota deleatur, valor imminuitur $\frac{6}{10000}$ hexapedæ, quæ particula fere dimidiam lineam æquat. Si reſcindantur duæ poſtremæ notæ, & relinquatur 2, 45, valor fractionis decreſcit $\frac{46}{10000}$, ſive fere 4 lineis.

103. III. *In fractionum decimalium calculo non adhibendas eſſe plures notas*, ut v, g. quinque vel ſex, *niſi opus fuerit magna prorſus accuratione; ſed plerumque ſufficere unam, alteramve, aut ſummum tres.* Nam ſi v. g. operis ſtruendi per hexapedam pretium ſit 3 librarum, patet $\frac{6}{10000}$, imo $\frac{46}{10000}$ hexapedæ negligi poſſe, cum $\frac{46}{10000}$ ſint proxime $3\frac{1}{3}$, denariorum, ideoque binæ notæ poſtremæ in fractione 2,4546 tuto omittentur. At vero ſi in pretium 10000 librarum pro una hexapeda conventum eſſet, valor $\frac{6}{10000}$ foret 6 librarum, & $\frac{46}{10000} = 46$ libris, quarum omnino ratio habenda eſt, atque hinc plures notæ adhiberi deberent.

104. Verum *ſi quæ notæ in fractione decimali omittuntur, atque prima neglectarum quinarium excedit, ultima earum, quæ retinentur, unitate augenda eſt.* Jn exemplo, ſi in fractione o, 4864 negligantur binæ poſteriores, ſcribendum eſt o, 49, non vero o, 48. Etenim o, 49=o, 4900 (99), & o, 48 = o, 4800; jam vero o, 4900 propius accedit ad valorem o, 4864, quam o, 4800: quare ſumenda eſt quantitas o, 49, non autem o, 48. Sic etiam neglectis poſtremis notis fractionis o, 1954, adhibenda eſt fractio o, 20, non vero o, 19. At ſi habeatur v. g. o, 455, liberum erit vel o, 45, vel o, 46 ſubſtituere.

105. Cum fractiones (62) plerumque ſint reſidua diviſionis, dum ſcilicet diviſor non exacte contineatur in dividendo, ſi lubeat quotienti loco fractionis alterius adjungere decimalem, reſiduo adjungatur o, & diviſio adhibito priore diviſore continuetur; nota reperta erit prima fractionis decimalis. Si rurſus aliquid ſuperſit, reſiduum adjuncto o iterum dividatur, quotus erit altera nota decimalis, & ſic deinceps repetatur diviſio, donec vel nihil remeat, vel ſufficientes notæ decimales habeantur.

Exemplum. Ex diviſione 147475 per 362 invenitur quotiens 407, & reſiduum 141 (66); jungatur huic ad dextram o, & dividatur 1410 per 362, invenitur quotus 3, novum reſiduum 324; adſcripto o dividatur rurſus 3240 per 362, fit quotiens 8, & remanet 344; addito o, & iterata diviſione reperitur quotus 9 cum reſiduo 182, quod habitis jam tribus notis decimalibus negligi poterit. Quare quotiens ex 147475 diviſis per 362 eſt 407, 389.

106. Eadem Methodo fractio quævis alia ad decimalem reducitur. Exempli cauſa detur fractio reducenda $\frac{3}{4}$; numeratori 3 adjuncto o, dividatur 30 per 4, quotus eſt 7, & remanent 2; his novo zero ad-

adscripto & 20 per 4 divisis alter quotus fit 5, ita ut nihil supersit, adeoque $\frac{3}{4}=0,75$. Et reipsa manifestum est, quod cum 25 sint quarta pars centenarii, tres quartæ sint 75.

107. Sed plurimæ dantur fractiones, quarum exactus valor in decimalibus haberi nequit, quotcunque divisiones successivæ adhibeantur. Dignoscitur autem hoc ex eo, quod vel in quotorum serie eædem iterum notæ, eodemque ordine redeant, vel quod idem post aliquot divisiones semper maneat residuum. Exemplo sit fractio $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducenda, reperietur 0, 571428571428571428 &c quin unquam ad divisionem exactam perveniri possit. Similiter si fiat reductio fractionis $\frac{5}{12}$, invenitur 0, 416666 &c. Quod si contingat, satis fuerit reliquis neglectis duas aut tres priores notas adhibere, v. g. sumi poterit $\frac{4}{7} = 0, 57$; & $\frac{5}{12} = 0, 417$

108. *Observa.* Notæ, quas easdem, eodemque ordine repetitis divisionibus reperiri diximus, non nisi post plurimas alias in serie numeratoris fractionis decimalis redeunt.

De operationibus in Fractionibus Decimalibus.

109. Operationes Arithmeticæ in fractionibus decimalibus nihil diversi habent ab iis, quæ in numeris integris instituuntur, nisi quod peracta operatione non nulla attendenda sint in collocatione virgulæ numeros integros a notis decimalibus separantis.

110. I. Si addendæ sint quantitates 4852, 791; 4, 00745; 2, 7; 0,0049, scribantur imprimis numeri integri, ut alias fieri solet, secundum valorem suum localem alii infra alios, ita, ut etiam virgulæ in eadem sint serie verticali; dein singulis integris versus

dex-

dextram adjungatur continuo ſua fractio, ut data eſt, atque omnia in unam ſummam colligantur, ut in ſubjecto exemplo patet

4852,791	Nam quantitates iſtæ	4852,79100
4,00745	ſunt æquales	4,00745
2,7		2,70000
0,0049		0,00490
4859,50335		4859,50335

111. II. In ſubtractione idem notarum ordo, & regula alias præſcripta obſervanda eſt.

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,004556
8,92	2,8135	5,83435	2,837444

112. III. Multiplicatio decimalium nil differt ab ea, quæ in numeris integris fit, neque ratio habetur poſitionis virgulæ, niſi poſtquam producta particularia in unam ſummam fuerint collecta: tunc enim *in producto totali tot verſus dextram ſeparantur notæ, quot decimales in utroque factore ſimul fuerint*, ita, ut ſi notæ producti totalis non ſufficiant, iis tot zeri a ſiniſtra præfigi debeant, quot ad ſummam illam conficiendam requiruntur, quemadmodum in tertio exemplo videre licet.

43,7	33,23	2,4542	3,7	21,32
13	12,134	0,0053	4,12	0,100103
1311	13292	73626	74	6396
437	9969	122710	37	2132
568,1	3323	0,01300726	148	2132
	6646		15,244	2,13419596
	3323			
	403,21282			

Re-

Regulæ veritas ex quarto exemplo elucescet, in quo $3,7 = 3\tfrac{7}{10}$ (96) $= \tfrac{37}{10}$ (80); item $4,12 = 4\tfrac{12}{100} = \tfrac{412}{100}$, ex iisdem rationibus. Quod si itaque multiplicetur $\tfrac{412}{100}$ per $\tfrac{37}{10}$, productum erit $\tfrac{15244}{1000}$ (92), quod reducitur ad $15\tfrac{244}{1000}$ (84) $= 15,244$ (96).

113. IV. Divisio decimalium rursus nihil peculiare habet, nisi quod *in quotiente reperto tot versus dextram notæ interposita virgula separandæ sint, quot notis fractio dividendi excedit numerum notarum fractionis divisoris.* Ita in primo exemplo, ubi 8,445 divisa sunt per 3,22, & ex lege alias præscripta repertus est quotus 26 (66), postrema nota 6 per virgulam separatur, quod nempe in dividendo notæ decimales superent unica eas, quæ sunt in divisore.

114. At vero si in divisore occurrant plures notæ decimales, quam in dividendo (vide exeplum tertium), tum dividendi notis decimalibus quotlibet zeri adjici debent, donec numerus earum paulo major evadat, quam in divisore, ut scilicet etiam aliquæ decimales in quotiente acquirantur.

Exempla.

$\dfrac{8,445}{3,22} = 2,6$

```
  6 44
  ----
  2 005
  1 932
  -----
     73
```

$\dfrac{9,83542}{0,326} = 30,17$

```
   978
   ---
    55
     0
   ---
   554
   326
   ---
  2282
  2282
  ----
     0
```

$\dfrac{49,1}{20,074} = 2,44$

```
  40,148
  ------
  8 9520
  8 0296
  ------
   92240
   80296
   -----
   11944
```

In

In exemplo altero si quotiens 30,17 ducatur in divisorem 0,326, factum erit dividendus 9,83542.

In tertio exemplo quatuor zeri dividendo sunt adjecti; & 49,10000 per 20,074 divisis obtinetur quotiens 2,44.

Si in ejusmodi divisionibus etiam notarum residuarum rationem habere lubeat, iis zeri adjungi possunt, & iteratis divisionibus novi quotientes erui, qui totidem notæ decimales erunt; uti in primo exemplo additis ad residuum 73 tribus zeris invenitur quotus 2,6226, cum novo residuo 228, quod negligi potest.

De aliis Fractionum Speciebus.

Quoniam in diversis Matheseos partibus, atque universim in commercio, multiplicia sunt mensurarum genera adhibenda, ex earum partibus, in quas nempe dividuntur, totidem diversæ fractionum species oriuntur. En vero mensuras, quarum frequentior est usus.

115. Circuli divisio in 360 partes æquales fit, quas *gradus* appellant: sed gradus iterum in 60 minuta subdividitur, minutum in 60 minuta secunda, secundum in 60 tertia &c, ut adeo 1 gradus, 10 gradus, 20 gradus sint $\frac{1}{360}$, $\frac{10}{360}$, $\frac{20}{360}$ circuli; item 1 minutum, 15 minuta &c sint $\frac{1}{60}$, $\frac{15}{60}$ &c unius gradus; 1 minutum secundum, 10 secunda &c sint $\frac{1}{60}$, $\frac{10}{60}$ &c unius minuti primi &c. Exprimuntur autem partes dictæ hunc in modum 1°, 10°, 20°; 1', 15'; 1", 10" &c.

Itaque circulus continet 21600', vel 1296000", vel 77760000‴ &c; gradus unus est 3600", vel 216000‴ &c.

Tempus dividitur in dies, dies in 24 partes æquales, sive *horas*; hora in 60 minuta prima; minutum

F

tum primum in 60 fecunda &c. Temporis fpatium, v. g. 10 horæ, 17 minuta, 44 fecunda, æquale eft $\frac{10}{24}$ diei + $\frac{17}{60}$ horæ + $\frac{44}{60}$ minuti, horum expreffio ufitata eft 10 h. 17', 44".

Dies igitur continet 1440', vel 86400", vel 5184000'''; hora eft 3600", 216000''' &c, unum minutum primum 3600''' &c.

Diftantiæ in terra quidem per hexapedas menfurantur, hexapeda continet 6 pedes, pes 12 digitos, digitus 12 lineas, linea 12 partes æquales five puncta; ut adeo fpatium 4 hexapedarum, 2 pedum, 4 digitorum, 6 linearum & 3 punctorum exprimi poffit, fi fcribatur 4 hexapedæ + $\frac{2}{6}$ hexapedæ + $\frac{4}{12}$ pedis + $\frac{6}{12}$ digiti + $\frac{3}{12}$ lineæ.

Æquatur itaque hexapeda 72 digitis, vel 864 lineis, vel 10368 punctis; pes æqualis eft 144 lineis, vel 1728 punctis, digitus 144 punctis &c.

In re pecuniaria apud Gallos potiffimum occurrunt libræ, folidi & denarii: libra continet 20 folidos; folidus 12 denarios, ut confequenter 19 lib: 15 fol: 10 den: valeant 19 lib: + $\frac{15}{20}$ libr: + $\frac{10}{12}$ fol.

Libra ergo Gallica valet 240 denarios.

Ponderum ratio initur per libras: libra appendit 16 uncias: uncia 8 groffos vel drachmas; groffus 72 grana. Hinc pondus 15 libr: 4 unc. 7 grofs. 60 gran. eft idem ac 15 libr. + $\frac{4}{16}$ libr. + $\frac{7}{8}$ unc. + $\frac{60}{72}$ grofs. Pondus ergo unius libræ eft 128 drachmarum, vel 9216 granorum; uncia æquat 576 grana.

116. Ex his univerfim colligitur primo: *Cujusvis menfuræ partes, quæ eodem nomine exprimuntur, effe fractiones ejusdem denominatoris.* Secundo: *Hunc denominatorem effe æqualem numero partium æqualium, in quas quantitas, feu menfura, proxime fuperior dividitur.* Sic omnes unciæ funt fractiones, quarum denominator femper eft 16; & hic denominator æqualis eft numero partium

um contentarum in libra, quæ eſt quantitas proxime ſuperior uncia. Jtem digiti ſunt fractiones, quarum communis denominator eſt 12, quippe cum pes, menſura proxime præcedens digitum, in 12 partes æquales dividatur. Jdem eſt in ceteris menſuris.

117. I. Ut id genus fractiones addantur, juxta denominationem ſuam aliæ aliis ſubſcribantur; dein initio a dextra parte facto colligatur ſumma omnium notarum in eadem ſerie verticali, & ſiquidem hæc excedat denominatorem communem, dividatur per eundem; reſiduum ſcribatur infra columnam, & quotiens addatur ad columnam proxime verſus ſiniſtram ſequentem.

36°	25'	47"
49	33	28
55	31	49
141	31	4

3 d.	17 h.	42'	16"
9	13	25	33
11	23	17	42
	12	0	0
25	18	25	31

Hexaped:	*ped:*	*digit:*	*lin:*	*punct.*
9	3	11	2	7
100	0	0	0	0
47	5	3	8	0
11	0	10	8	4
168	4	1	6	11

℔	*unc:*	*groſ:*	*gran:*
10	15	7	70
9	10	4	18
47	3	6	40
	13	0	55
68	11	3	39

Lib:	*ſolid:*	*den:*
325	17	4
15	11	6
25	1	8
4	10	0
371	0	6

Diviſio ſummæ ex qualibet columna collectæ nihil aliud eſt, quam reductio, de qua quarto loco egimus (84).

118. II. Quando fractionis ejusmodi ſubtractio ab altera facienda eſt, ſubtrahendæ notæ scribantur infra minuendæ notas ejusdem nominis: tum initium a dextra faciendum, ut alias, illudque præterea obſervandum, quod dum nota quæpiam ſubtrahenda excedit ſuperiorem, a qua auferri deberet, ſuperiori addendus ſit ejus denominator, & peracta ſubtractione quantitas proximo verſus ſiniſtram loco ſequens unitate ſit minuenda. Liquet hoc in altero exemplo ſubjecto, in quo cum 43 minuta a 19 auferri deberent, additis 60 ad 19 ſubtrahuntur 43 a 79 minutis, reſiduo 36 ſubscripto; ſed in loco ſequente non amplius 14 ſed tantum 13 horæ numerantur. Ratio eſt, quod 11 horas, & 43 minuta auferre ex 14 horis & 19 minutis idem ſit, ac 11 horas cum 43 minutis ſubtrahere ex 13 horis & 79 minutis. Nempe nil hic fit aliud, quam quod ſuperius (91) faciendum præcepimus. En vero exempla:

48°	16'	17''
25	3	12
23	13	5

19 d.	14 h.	19'	40''
3	11	43	30
16	2	36	10

17 d.	11 h.	47'	5''
13	18	55	40
3	16	51	25

Hexaped:	*ped:*	*dig:*	*lin:*	*punct:*
100	0	0	0	0
17	4	5	11	8
82	1	6	0	4

℔	*unc:*	*groſs:*	*gran:*
47	10	2	55
12	12	5	12
34	13	5	43

Libr:	*ſolid:*	*denar:*
655	3	4
30	0	0
625	3	4

119. Multiplicatio & diviſio fractionum, quæ ad hanc claſſem pertinent, in elementis Mathematicis locum non habent, ſi eas fractiones dempſeris, quæ in menſuris longitudinum, aut latitudinum occurrunt.

Utraque hæc operatio prolixa eſt, & longe diverſa ab iis, quæ in aliis numeris inſtituuntur, tum quod partes id genus quantitatum multiplicatarum, vel diviſarum non maneant menſuræ ſimplices (94); cum etiam quod concipi nequeat productum quodpiam e menſuris heterogeneis, uti foret, quod e pondere per orgyas, vel gradus multiplicato oriretur. At vero ſi hæ quantitates ſolummodo ut numeri ſpectentur, qui inter ſe certam rationem habent, per regulas proportionis alii inveniri poſſunt numeri, quorum ratio ſit eadem.

Itaque peculiares regulæ compendii cauſa inventæ ſunt, quæ ſingulis fractionum iſtiusmodi speciebus ſerviant, pendentes ſcilicet a proprietatibus numerorum, qui denominatorum vices ſubeunt. Nos iſthic methodum tantum generalem operationes haſce inſtituendi indicabimus.

120. Ill. *Primo*: Factum binarum fractionum invenitur ope regulæ trium ejus terminis hunc in modum diſpoſitis: ut unitas eſt ad multiplicandum, ita multiplicator ad productum. Unde *Secundo* quantitates datæ ad minimam earum ſpeciem ſunt reducendæ; v. g. ſi dentur libræ, ſolidi, & denarii, omnia reduci debent ad denarios; ut etiam ad grana, ſi agatur de diverſis ponderibus, libris, unciis, groſſis & granis &c. Res e ſequentibus exemplis fiet clarior. Ut multiplicentur 4 lib: 7. ſol. 6. den. per 2 lib: 9 ſol. 7 den:, hæc proportio eſt facienda: ut 1 libr: eſt ad 4 libr: 7 ſol: 6 den. ita ſunt 2 lib: 9 ſol: 7. den. ad factum quæſitum; omnia igitur prius reduci debent ad denarios: libra una continet 240 denarios; & 4 lib: 7 ſol: 6 denarii, ſive 87 ſol: 6 den: efficiunt 1050 denarios, ut patet, ſi 87 ſol. multiplicentur per 12 ut fiant 1044 denarii, hisque addantur 6 præterea denarii. Dein 2 lib: 9 ſol: 7 den: ſimili ratione reducuntur ad 595 denarios. Unde termini proportionis ſunt 240 : 1050 :: 595 : x. Reperitur $x = 2603\frac{1}{8}$; atque ut ad libras, ſolidos & denarios reducatur, dividatur *primo* per 240, quotus erit 10 lib; reſiduum $203\frac{1}{8}$ den. *Secundo* dividatur reſiduum per 12, fiet quotus 16 ſol: remanentibus adhuc $11\frac{1}{8}$ den. Quare factum quæſitum habetur 10 lib: 16 ſol: $11\frac{1}{8}$ den. Si debeant 2 lib: 7 unc: 5 groſs:

5 grofs: duci in 3 libr: 7 fol: regula trium fequente terminorum ordine adhibenda eft: ut pondus 1 libr: ad pondus 2 lib: 7 unc: 5 grofs: 0 gran: ita 3 lib: 7 fol: 0 den: funt ad factum quaefitum, hoc eft, facta reductione ad minimam fpeciem, 9216 gran. : 22824 gran. :: 804 denar. : 1991 $\frac{5}{32}$ den. qui reducuntur ad 8 libr. 5 fol. 11 $\frac{5}{32}$ denar.

121 IV. Ut reperiatur quotiens ex divifione fimilium fractionum; facta rurfus reductione ad minimam quantitatum fpeciem, fequente proportione utendum eft (53): ut divifor ad unitatem; ita eft dividendus ad quotum.

Exemplum. Sint dividendi 8° 9' 48" per 3 d. 2 h. 5' 19" : ponatur: ut 3 d. 2 h. 5' 19" feu 266719" temporis funt ad 1 d. five 86400" temporis; ita funt 8° 9' 48", hoc eft 29388" in gradibus circuli, ad 9519" $\frac{225039}{266799}$, id eft 2° 38' 39" aut fere 40".

122 *Obferva.* I. Si quantitates datae, fint naturae diverfae, feu heterogeneae, unitas affumenda debet effe heterogenea cum facto, vel quoto quaefito.

123. II. Quando terminus aliquis proportionis datus non annexam habet minimam speciem, & eft cum unitate affumta homogeneus, fufficit, fi unitas ac terminus ille reducatur ad eam tantummodo speciem minorem, quae connexa eft illi termino; verum alter terminus cum unitate heterogeneus femper in minimam speciem refolvi debet. Ita in fecundo exemplo multiplicationis, cum terminus 2 lib. 7 unc. 5 grofs. nulla grana adjuncta habeat, fufficit unitatem (seu 1 libram) una cum hoc termino 2 lib. 7 unc. 5 grofs. in grofsos convertere, & proportionem hunc in modum inftituere: ut 128 grofs. funt ad 317 grofs. ita 804 denar. ad 1991 $\frac{5}{32}$ den.

ELEMENTA ALGEBRAE.

Algebra eft Arithmetica quaedam univerfalis, feu fcientia magnitudinum in genere, quemadmodum Arithmetica fcientia eft numerorum.

Definitiones quorundam Terminorum in Algebra ufitatorum.

124. Expreffio, feu quantitas Algebraica eft una plu

pluresve magnitudines, una pluribusve literis designata. Adhibentur plerumque in hunc usum literæ minores Alphabeti.

125. Quantitas Algebraica vel est *complexa*, vel *incomplexa*;

Quantitas incomplexa est, quæ solitarie ponitur, hoc est, nulli seu anteriori, seu posteriori per signum +, vel — connectitur; uti a, ab, acd, $-b$, $-adb$, $3abc$, quæ omnes quantitates incomplexæ sunt.

126. Quantitas complexa componitur e pluribus quantitatibus signo + junctis, vel signo — separatis. Exempli causa $a+b$, $aa-b+cdd$ &c sunt quantitates complexæ.

127. Quantitas incomplexa *monomium* dicitur, complexa *polynomium*; & quidem *binomium*, *trinomium*, *quadrinomium &c*, secundum terminorum, quibus constat, numerum.

128. Appellatur autem *terminus* pars ea quantitatis polynomiæ, quæ signo alicui substat. *Terminus positivus* est, quem signum + præcedit; *negativus*, quem signum — afficit; sic quantitas $+a-b+c-dd$ est quadrinomium, cujus duo termini, $+a$, $+c$, sunt positivi, & duo negativi, nempe $-b$, & $-dd$.

129. Primus terminus quantitatis complexæ, aut etiam terminus quantitatis incomplexæ, si nullum præfixum signum habeat, censetur semper positivus: ut $a+b$ sunt duo termini positivi, idemque est, ac si scriberetur $+a+b$.

130. Nota numerica termino cuicunque præposita, exempli gratia 3 in quantitate $3abc$, vocatur *coëfficiens* illius termini, ac denotat, quantitatem abc ter accipi, seu per 3 multiplicatam esse. Jn quantitate $ab-3cc+2dd$ bini occurrunt coëfficientes, 3 scilicet, & 2; & $-3cc$ significat, terminum secundum $-cc$ esse in 3 ductum; $+2dd$ vero exprimit,

mit, quantitatem $+ dd$ bis ſumi, ſive multiplicatam eſſe per 2.

131. *Termini, qui nullum còëfficientem præfixum habet, còëfficiens ſubintelligitur eſſe unitas;* v. g. $aa = 1\,aa$.

132. Numerus alicui quantitati literali ſuperne adſcriptus dicitur illius quantitatis *exponens*, exempli cauſa in a^3, eſt 3 exponens; & ſignificat, eam literam toties conſequenter poſitam, quot unitates exponens continet. Nempe a^3 adhibetur loco aaa; & $a^4\,b^3\,c^2$ pro $aaaa\;bbb\;cc$ uſurpatur.

Quævis litera, cui nullus exponens adſcriptus eſt, ſupponitur habere unitatem pro exponente. Jn exemplo $a\,b$ idem eſt, ac $a^1\,b^1$; item $a^3\,b\,c\,c$ idem cum $a^3\,b^1\,c^2$. Jngens adeo inter exponentem, & còëfficientem eſt discrimen; nam $4\,a$ ponitur loco $a + a + a + a$; at vero a^4 ſubſtituitur pro $aaaa$.

133. Termini quantitatis complexæ iisdem literis conſtantes dicuntur *ſimiles*, quamvis eorum còëfficientes, & ſigna diverſa ſint. Sic quantitas $2\,a\,b + b\,d - 2\,b\,d + b\,d\,d$ habet duos terminos ſimiles, $+ b\,d$ ſcilicet, & $- 2\,b\,d$.

DE OPERATIONIBUS ALGEBRAICIS.

Operationes, quæ in Algebra adhibentur, ſunt Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diviſio.

De Reductione.

134. Reductio conſiſtit in debito terminorum quantitatum Algebraicarum ordine, & ſimpliciſſima expreſſione, quorum utrumque ut habeatur, peracta quavis operatione, curandum.

135. Regula I. *Termini, & singulæ literæ ejusdem termini, quantum fieri potest, ordinem Alphabeti sequantur.* Hinc quantitas complexa $ab + c - b + ed + db - cba$ hunc in modum disponenda est: $ab - abc - b + bd + c + de$.

136. Regula II. *Termini similes, qui in eadem expressione occurrunt, reducendi sunt ad unicum, vel si alter elidat alterum, delendi.* Hæc regula triplicem casum complectitur.

I. *Termini similes eodem signo affecti reducuntur ad unicum ejusdem signi, cujus cöefficiens æquatur summæ cöefficientium omnium eorum terminorum.*

Sic loco $ab + ab - cd$ scribendum est $2ab - cd$. Quantitas complexa $aa + 2ac + 3ac$ concinnius exprimitur, si ponatur $aa + 5ac$; pro $bb - 3bc - bc + bd$ adhibetur $bb - 4bc + bd$.

137. II. *Si terminis similibus signa contraria sint præfixa, cöefficiens minor a majore subtrahendus est, & differentia cum signo majoris adhibenda.* Exemplo sit quantitas $3ab + 2abb - ab$, quæ reducitur ad $2ab + 2abb$. Item $ab + 4ad - add + 2ad + 3add - 4ad$ hoc artificio mutatur in $ab + 2ad + 2add$. Sic etiam ex quantitate $bd - 2bd + bdd - 3bdd$ fit $-bd - 2bdd$.

138. III. *Si terminorum similium & contrario signo affectorum cöefficientes sint æquales, hi termini prorsus omittuntur.* Ut si habeatur $aa + 2ab - 2ab + bb$, scribendum est tantummodo $aa + bb$; item omnes termini quantitatis $bd - bdf + 2bd + 2bdf - 3bd$ reducuntur ad bdf.

De Additione.

139. *Quantitatum Algebraicarum additio nil aliud requirit, quam ut omnes continua serie scribantur, proprio cujuslibet signo retento, ac postmodum debitæ reductiones fiant.*

G Sic

Sic quantitatum ab & bc additio abſolvitur ſcribendo $ab + bc$.

Summa ex $ab + c$ & $b - c$ eſt $ab + c + b - c$, & facta reductione (138) $ab + b$.

Ex $-b$ & a colligitur $a - b$.

Si $ab - ad + 3bd$ & $ad - bd$ addi debeant ad $ab - ad + dd$, scribatur primo $ab - ad + 3bd + ad - bd + ab - ad + dd$; dein reducatur ad $2ab - ad + 2bd + dd$.

De Subtractione.

140. *Subtractio fit, ſi cum quantitate, ex qua altera auferri debet, ſcribatur in eadem ſerie quantitas ſubtrahenda, mutato in hac ſigno + in —, & viciſſim — in +.*

Exempla. b ex a ſubtracta intelligitur, ſi scribatur $a - b$.

$b - c$ aufertur ex $a + c$, ſi ponatur $a + c - b + c$, & reducatur ad $a - b + 2c$ (136).

Differentia inter $ab - bc + dd$, & $ab + abb - dd$ eſt $ab + abb - dd - ab + bc - dd$, quæ reducitur ad $abb + bc - 2dd$.

141. Signum — mutatur in + in quantitate ſubtrahenda, ut debita compenſatio fiat. Etenim cum $b - d$ ex a ſubtrahi debet, & scribitur $a - b$, juſto plus ſubtrahitur ex a, quandoquidem non integra quantitas b auferri debuit, ſed quantitate d imminuta; quare dum ponebatur $a - b$, tota quantitate d plus ablatum eſt, quam oportuit. Ut igitur ſubtractio æqua ſit, quod ultra debitum ablatum eſt, rurſus ut ad differentiam obtentam addatur, eſt neceſſe, hoc eſt, ut ad $a - b$ quantitas d adjiciatur, scribaturque $a - b + d$.

Res in quantitatibus numericis clarius elucet. Si ex 6 auferenda ſint $5 - 3$, juxta expoſitam regulam scribendum eſt $6 - 5 + 3$, & obtinetur facta reductione differentia 4, quemadmodum hanc ipsam inveniri debere evidens eſt. At ſi poneretur $6 - 5 - 3$, ex 6 ſubtraherentur 8, quod faciendum haud quaquam erat propoſitum, quippe cum $5 - 3 = 2$, non niſi 2 ex 6 ſubtrahi debent.

De Multiplicatione.

142. Dum terminus Algebraicus per alterum multiplicandus eſt, operatio ad quatuor ſeſe extendit, ad ſigna scilicet, ad còéfficientes, ad literas, & ad exponentes.

Regula *pro ſignis* eſt, quod *productum ex ſignis iiſdem ſit ſemper poſitivum; ex contrariis ſemper negativum.*

Itaque $+ \times + = +$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$, & $- \times - = +$.

Regula pro *còéfficientibus*, ut *alter multiplicetur per alterum.*

Regula pro *literis*, ut *ſecundum Alphabeti ordinem alteri altera adjungatur nullo ſigno interpoſito.*

Regula pro *exponentibus*, ut *dum quantitas quæpiam literalis exponente prædita multiplicanda eſt per eandem itidem exponente affectam, ea quantitas in producto tantum ſemel ſcribatur cum exponente æquali ſummæ exponentium utriusque factoris.*

Exempla. Si $4\,b^2 c$ ducendum in $-3\,dd$, erit $+ \times - = -$, $4 \times 3 = 12$, $b^2 c \times dd = b^2 c\,d\,d$, adeoque factum $-12\,b^2 c\,d\,d$.

Sic quoque ſi $-3\,b\,b$ multiplicandum per $-b^3$, imprimis fiet $- \times - = +$, dein 3×1 (quippe (131) quivis terminus alio còéfficiente carens, unitatem habere intelligitur) $= 3$; $b\,b \times b^3$, vel $b^2 \times b^3 = b^5$, ac productum denique $+3b^5$, vel omiſſo ſigno, $3b^5$.

Eadem operandi ratione reperietur

$a \times b = ab$

$-bc^3 \times 3bd = -3b^2c^3d$

$3aac \times -2bc = -6a^2bc^2$

$a^3 \times a^4 = a^7$. Nam $a^3 = aaa$, & $a^4 = aaaa$; quare $a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$. ex quo regula pro exponentibus allata evidens fit.

$abc \times 3a^2b^3cd = 3a^3b^4c^2d$.

$4a^3b^5 \times -7a^2b^3cd^4 = -28a^5b^8cd^4$.

143. *Multiplicatio polynomiorum fit* ut in Arithmetica numerica, *dum prius producta partialia terminorum singulorum multiplicatoris in terminos singulos multiplicandi quæruntur* juxta regulas modo expositas (142), *dein hæc in unam summam colliguntur pro facto totali.* Illud solum discriminis est inter multiplicationem numerorum, & quantitatum polynomiarum, quod non necesse sit, quemadmodum in numeris, ut terminorum ordo propositus servetur, sed satis sit terminos singulos unius factoris in singulos alterius ducere, ut producta partialia reperiantur.

Exempli causa proponatur polynomium $a+3c-d$ ducendum in $2a-d$.

Terminis utriusque, ut in Arithmetica (47) præceptum est, dispositis ducatur a in $2a$, & factum $2aa$ subscribatur: dein multiplicetur $+3c$ per $2a$, fiet $+6ac$; ac ducto $-d$ in $2a$ habetur $-2ad$. Sumatur jam alter multiplicatoris terminus $-d$, qui ductus in a efficit $-ad$; per $+3c$ multiplicatus dat $-3cd$, ac denique ductus in $-d$ facit $+dd$.

$$
\begin{array}{l}
a+3c-d \\
\underline{2a-d} \\
2aa+6ac-2ad \\
\underline{-ad-3cd \quad dd} \\
2aa+6ac-3ad-3cd+dd
\end{array}
$$

Facta hæc partialia addantur in unam summam, adhibita reductione, habebitur productum totale $=2aa+6ac-3ad-3cd+dd$.

Exem-

Exempla alia.

$$\begin{array}{r} a^3 - 3ab^4 + bb \\ aabb - b^3 \\ \hline a^5bb - 3a^3b^6 + aab^4 \\ - a^3b^3 + 3ab^7 - b^5 \\ \hline a^5b^2 - a^3b^3 - 3a^3b^6 + a^2b^4 + 3ab^7 - b^5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a - 2b \\ 2a + 2b \\ \hline 4aa - 4ab \\ + 4ab - 4bb \\ \hline 4aa - 4bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline a^3 + 2aac - abc \\ - aab - 2abc + bbc \\ \hline a^3 - aab + 2aac - 3abc + bbc \end{array}$$

144. *Observa.* I. Quandoque, dum quantitates complexæ multiplicandæ ſunt, ne confuſio literarum oriatur, ſatis eſt multiplicationem tantum indicare, inter utrumque factorem (cui linea ſuperſcribitur) ſigno x interjecto, hunc in modum $\overline{a + 3c - dd} \times \overline{bb - 6dd}$, quod indicat $a + 3c - dd$ debere duci in $bb - 6dd$; alii omiſſo ſigno x ſingulos factores parentheſeos ſignis incluſos exhibent, ut $(a + 3c - dd)\ (bb - 6dd)$ Alii aliis expreſſionibus utuntur, quas uſus docebit.

145. II. *Demonſtratio regulæ pro ſignis datæ.* Demonſtrandum eſt, debere fieri $+ \times - = -$, & $- \times - = +$.

Primo. Dum a per $b - c$ multiplicandum eſt, & ponitur primo productum ex a in b, nempe ab, manifeſtum eſt, productum iſtud eſſe juſto majus, quandoquidem non integra quantitas b multiplicanda proponitur, ſed diminuta quantitate c: igitur in producto ab toties plus æquo continetur quantitas c, quoties in eodem reperitur b; atqui quantitas a exprimit, quoties b contineatur in ab, quare quantitas c toties auferri debet ex producto ab, quot a unitates habet, ſeu, quod idem eſt, ex ab ſubtrahendum $c \times a$, ſeu ac, & hinc factum ex a in $b - c$ eſt $ab - ac$.

In numeris. Dum multiplicando 5 per $6 - 4$ ab ini-

initio ponitur $5 \times 6 = 30$, factum 30 majus eſt, quam debeat, cum $6 - 4$ ſolummodo 2 valeant; & quidem exceſſus ille facti inde ortus eſt, quod numerus 4, quem ex 6 auferri oportuit, quinquies in eo contineatur: ut ergo factum debitum habeatur, ex 30 quinquies auferri debent 4, hoc eſt 20, reſiduum 10 erit productum quæſitum. Unde factum ex 5 in $6 - 4$ hunc in modum exhibendum eſt $30 - 20$.

Secundo. Cum $a - b$ in $c - d$ ducitur, patet ſane, factum ex $a - b$ in c, nempe $ac - bc$, eſſe majus, quam oporteat, quod quantitas c imminuta ſit quantitate d; quare ex facto illo $ac - bc$ toties ſubtrahi debet d, quoties in eodem continetur c; jam vero $a - b$ exprimit quoties c reperiatur in $ac - bc$, ergo auferenda eſt quantitas d per $a - b$ multiplicata, hoc eſt $ad - bd$. Fit autem ſubtractio quantitatis $ad - bd$ ex $ac - bc$, ſi ſcribatur $ac - bc - ad + bd$ (140); Unde manifeſtum fit, in multiplicatione $a - b$ per $c - d$ factum ex $-b$ in $-d$, debere eſſe $+ bd$, ut ſcilicet debita compenſatio habeatur. Si literis a, b, c, d ſubſtituantur numeri, ut 6, 4, 7, 3, eadem demonſtratio locum habet.

De Diviſione.

146. *Diviſio algebraica univerſim fit, ſi infra dividendum ducta linea diviſor ſcribatur.* Sic $\frac{a - bb + cc}{3ac + dd}$ denotat quotientem ex quantitate $a - bb + cc$ per $3ac + dd$ diviſa. Atque hinc conſtat, quantitatem algebraicam alteram per alteram dividere, nihil eſſe aliud, quam eam ſolita fractionum forma exhibere.

Verum cum fractiones ſemper reducendæ ſint ad expreſſionem ſimpliciſſimam; quemadmodum in multiplicatione fecimus, ita etiam pro diviſione binorum terminorum algebraicorum quatuor peculiares regulæ præſcribi poſſunt. I.

I. Regula pro ſignis: *quotiens ex duobus terminis eodem ſigno affectis, ſemper eſt poſitivus; ex terminis contraria ſigna habentibus ſemper negativus.*

II. Regula pro còëfficientibus: *Si alter per alterum ſine reſiduo dividi poteſt, uterque omittitur, & in loco majoris ſubſtituitur quotiens inventus; ſi diviſio ſine reſiduo fieri nequit, uterque còëfficiens retinetur, ut datus eſt, fractionis forma; ſi còëfficientes ſunt æquales, uterque deletur.*

III. Regula pro literis: *Infra literas dividendi ducta linea, ſubſcribuntur literæ diviſoris.*

IV. Regula pro exponentibus: *Si eadem litera tam in dividendo, quam in diviſore occurrat cum diverſis exponentibus, ea illic omittitur, ubi minorem habet exponentem, & ſiquidem in illo termino nulla adſit alia litera, ponitur* 1: *in altero vero termino loco exponentis majoris adhibetur exponentium differentia, at ſi exponentes æquales ſint, litera in utroque termino omittenda eſt, aut deficientibus aliis literis, unitas ſubſtituenda.*

Regulæ huic locus eſt, etiam cum nullus literis exponens adſcriptus eſt, quod tunc (132) unitatem habere pro exponente intelligantur.

Exempla. Si quantitas $4ac^3de^5$ dividenda per $-2bd^3e^3f$; erit $\frac{+}{-} = -$; & $\frac{4}{2} = 2$; igitur ſcribendum

$$-\frac{2ac^3de^5}{bd^3e^3f};$$ per regulam vero pro exponentibus datam, apparet, in dividendo omittendum eſſe d, & in diviſore loco d^3 ſubſtituendum d^2 vel dd; item in diviſore delendum e^3, relicto in dividendo e^2, vel ee,

ut adeo quotiens ſit $-\frac{2ac^3e^2}{bddf}$.

Sit

$\frac{+}{-}=-$, $\frac{12}{3}=4$; Sit dividendus $3a^3$, divisor $-12a^4b^3$; erit deletur itaque 3 in dividendo, & loco 12 in divisore adhibetur 4; ut sit $-\frac{a^3}{4a^4b^3}$: porro ex regula exponentium quantitati a^3 substitui debet unitas in dividendo, in divisore vero relinqui a^1, vel a: quare quotus habetur $-\frac{1}{4ab^3}$. Eodem modo invenitur $\frac{3abc}{3abc}=\frac{1}{1}=1$; $\frac{-4bd}{2bd}=-\frac{2}{1}=-2$; $\frac{3aab}{5ac}=\frac{3ab}{5c}$; $-\frac{12abd}{3a}=-\frac{4bd}{1}=-4bd$; $\frac{4a^3bbd}{4abd}=\frac{aab}{1}=aab$; &c.

147. Regulæ coëfficientium, & exponentium solummodo reductionem continent fractionum ad simplicissimam expressionem; & ea quidem, quæ exponentes concernit, huic innititur rationi, quod cum eadem quantitas in dividendo, & divisore occurrit, quotiens sit 1 (79), sive quod reduci possit ad $\frac{1}{1}$. Hinc cum $\frac{a^3}{a^5}$ sit idem ac $\frac{aaa}{aaa \times aa}$, liquet (76) esse $\frac{aaa}{aaa}=1$, vel $\frac{1}{1}$; unde substitui potest $\frac{1}{1 \times aa}$, seu $\frac{1}{aa}$, vel $\frac{1}{a^2}$. Ex quo apparet, per hanc reductionem, literæ, quæ majorem habuit exponentem, solum differentiam exponentium relinquendam esse; illi vero, cujus exponens minor erat, esse 1 substituendam.

148. Eædem regulæ, sive reductiones locum habent

bent in fractionibus polynomiorum, quando una pluresve notæ literales in ſingulis tam dividendi, quam diviſoris terminis reperiuntur eædem. Hac ratione $\frac{ax - 2abx}{ax + axx}$ reducitur ad $\frac{1 - 2b}{1 + x}$, deleto scilicet ax in ſingulis terminis, & ubi ſolum erat, unitate ſurrogata. Similiter $\frac{3xx}{3axx + 3bbxx}$ reducitur ad $\frac{1}{a + bb}$; & $\frac{4a^2xx + 3a^3bbx}{aax - aabx}$ fit $\frac{4x + 3abb}{1 - b}$; item $\frac{4abxx - 2ab}{2aabb + 4abb}$ $= \frac{2xx - 1}{ab + 2b}$.

149. Polynomiorum diviſio eadem omnino eſt, ac quæ in numeris adhibetur, quamvis in quantitatibus Algebraicis raro ſucceſſum habeat; ejus tamen periculum facere convenit, neque illico, quibusdam reductionibus factis, res abſoluta putanda eſt. Ipse uſus docebit, quandonam polynomium unum per alterum exacte dividi queat. Interim en exemplum:

Quæratur, utrum $aa + ab + ac + bc$ exacte per $a + c$ dividi poſſit: disponantur omnia, ut alias; & indagetur, quis ex aa (primo dividendi termino) per a (primum terminum diviſoris) fit quotiens? reperitur a, cum (146) $\frac{aa}{a} = a$; collocetur a in loco quotientis, ac per eundem multiplicato diviſore $a + c$, factum $aa + ac$ auferatur

$$\frac{aa + ab + ac + bc}{a + c} =$$
$$\underline{aa + ac}$$
$$\underline{ab + bc}$$
$$\underline{ab + bc}$$
$$0$$

 ex

ex dividendo; supererit facta reductione $ab + bc$. Tum ulterius est $\frac{+}{+} = +$, & $\frac{ab}{a} = b$; adjungatur itaque $+ b$ priori quotienti, & rursus per $+ b$ multiplicato divisore obtinetur productum $ab + bc$, quod e residuo $ab+bc$ subtractum nihil relinquit. Colligitur ergo, quotientem quaesitum esse $a+b$.

DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE
QUANTITATUM.

150. Quaevis quantitas considerari potest *primo* vel ut valorem alicujus rei simpliciter exhibet; *secundo*, vel tanquam summa, aut factum ex pluribus aliis ortum; *tertio*, vel instar differentiae aut quotientis aliarum. Ita 12 spectari potest, ut simpliciter quascunque res duodecim numero denotat; vel vero ut summa ex $3+9$, aut $2+10$, vel $4+8$ &c, aut etiam ut factum ex 3×4, vel 2×6 &c; aut denique velut differentia inter 15 & 3, inter 17 & 5 &c, vel ut quotiens ex $\frac{36}{3}$, vel $\frac{24}{2}$ &c.

Praecipuae Matheseos partes sunt, quantitates inter se comparare, componere & resolvere; sed de comparatione infra agemus.

151. Compositio plurium quantitatum in unam plerumque difficultate caret, cum seu additione, seu multiplicatione peragatur, quae operationes semper exacte fieri possunt; at vero resolutio non modo difficilis, sed etiam saepe impossibilis est, praecipue si valor in numeris integris petatur, utpote cum quantitates maxime ope divisionis resolvendae sint, quae raro quotientem exactum exhibet, quin quid praeterea remaneat.

152. Quantitas quælibet a, ut ſimplex, & non compoſita, ſpectata, *primi gradus* eſſe dicitur, aut *potentia prima* appellatur. At ſi ea ſemel in ſe ipsam ducatur, ſi bis, ter &c, productum ſit ſecundi, tertii, quarti gradus &c, ſeu dicitur ea quantitas ad ſecundam, tertiam, quartam &c potentiam elevata. Univerſim productum ſit quantitas illius gradus, ſeu talis potentia, qualem indicat exponens ex multiplicatione ortus. Sic aa, vel a^2, conſiderata ut factum ex $a \times a$, vocatur quantitas ſecundi gradus, ſeu ſecunda potentia quantitatis a. Similiter a^4, tanquam productum ex $a \times a \times a \times a$, eſt quarta potentia ejusdem quantitatis a.

153. Quantitas illa ſimplex, ſive quæ ſimplicis inſtar conſideratur, atque ad potentiam quandam elevatur, dicitur *radix* ejus potentiæ. In exemplo a eſt radix tertia potentiæ a^3, radix ſeptima potentiæ a^7 &c. Idem eſt in numeris; 20736 ſi ſpectetur ut quarta potentia numeri 12, viciſſim 12 eſt quarta radix numeri 20736.

154. Ex analogia ad dimenſiones corporis, ſolet quoque ſecunda potentia, ut b^2, vocari *quadratum* quantitatis b, tertia b^3, *cubus* ejusdem; alias etiam b^4 dicebatur *quadrato-quadratum*, & b^5 *quadrato-cubus*, b^6 *cubo-cubus* quantitatis b. Viciſſim b eſt radix quadrata de bb vel b^2, radix cubica de b^3, radix quadrato-quadrata de b^4 &c.

155. Compoſitio & reſolutio quantitatum ad hæc quatuor revocatur, *primo* ut ex pluribus fiat una, quod additio & multiplicatio præſtat; *ſecundo* ut reperiantur omnes quantitates, quarum multiplum eſt quantitas data, ſeu, quod idem, ut inveniantur omnes diviſores, quibus ſcilicet diviſio exacta, & ſine reſiduo, quantitatis datæ inſtitui poteſt. *Tertio* ut quantitas quævis ad potentiam datam elevetur.

Quarto ut extrahatur radix quælibet ex quantitate data, quæ tanquam potentia illius radicis ſpectatur.

Qua ratione omnes quantitatis datæ diviſores reperiantur.

156. I. Si quantitas data eſt numerus, tentetur ejus diviſio ſucceſſive per quosvis numeros primos, donec inveniatur quotiens ſine reſiduo; tum is quotiens rurſus dividatur, ſi fieri poteſt, per aliquem numerum primum, ac iidem numeri iterum adhibeantur dividendo ſecundo quotienti, donec tandem deveniatur ad quotientem unitate non majorem, ſive donec nullus alter reperiatur diviſor minor, quam quotiens præcedentis diviſionis. Scribantur omnes diviſores adhibiti, & multiplicentur imprimis bini quivis, tum terni, quaterni &c, facta cum ſingulis ſimplicibus erunt diviſores, quos quantitas data habere poteſt.

Exemplum. Quærantur omnes diviſores numeri 630. Dividatur primo per 2; quotiens 315 diviſionem per 2 non admittit; ſuccedit tamen diviſio per 3, & fit quotiens 105, qui item per 3 diviſus ſuppeditat tertium quotum 35; at hic nec per 2, nec per 3 accurate dividi poteſt, attamen per 5, quoto emergente 7. Jam vero 7 nullum ex præcedentibus diviſoribus habet, nec alium unitate majorem, qnam 7, ut poſtremus quotiens jam ſit 1. Sunt igitur diviſores adhibiti 2, 3. 3. 5, 7, quorum bini quivis inter ſe multiplicati dant $2\times3=6$, $2\times5=10$, $2\times7=14$. $3\times3=9$, $3\times5=15$, $3\times7=21$, $5\times7=35$. Facta e ternis ſunt $2\times3\times3=18$, $2\times3\times5=30$, $2\times3\times7=42$, $2\times5\times7=70$, $3\times3\times5=45$, $3\times3\times7=63$, $3\times5\times7=105$. Facta e quaternis $2\times3\times3\times5=90$, $2\times3\times3\times7=126$, $2\times3\times5\times7=210$, $3\times3\times5\times7=315$. Denique factum e quinis $2\times3\times3\times5\times7$ eſt 630. Ut adeo diviſores numeri dati ſint 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630.

Ratio intellectu facillima eſt. Cum enim numerus datus æqualis ſit facto ex quinque illis diviſoribus $2\times3\times3\times5\times7$, manifeſtum eſt, in eo contineri accurate omnia facta binorum, ternorum, quaternorum &c eorundem diviſorum.

II. Eadem lex in quantitatibus algebraicis tenenda. Detur exempli cauſa $bbdd+b^3d$, cujus diviſores inveniendi ſint. Dividatur primo per b, quotus primus erit $bdd+bbd$; hic rurſus per b diviſus, dat quotum alterum $dd+bd$, cujus ſi diviſio per

$b+d$

$b+d$ fiat, tertius quotus fit d, quo per femet diviso ad 1 perventum est. Quare divisores adhibiti sunt $b, b, b+d, d$; horum bini in se ducti suppeditant divisores compositos $bb, bb+bd, bd, bd+dd$; si terni quivis multiplicentur, acquiruntur præterea $b^3+bbd, bbd+bdd, bbd$; denique e quaternis habetur $b^3d+bbdd$. Sunt igitur divisores quæsiti $1, b, b+d, d, bb, bbd, bd, bb+bd, bd+dd, b^3+bbd, bbd+bdd, b^3d+bbdd$.

Quomodo quantitates ad potentiam datam eleventur.

157. Quoniam prima potentia quantitatis a est a vel a^1, in qua a non est multiplicata; secunda vero a^2, sive $a \times a$, tertia a^3, aut $a \times a \times a$, quarta a^4 seu $a \times a \times a \times a$, facile sequens regula universalis deducitur.

158. *Ut quantitas quæpiam ad potentiam datam elevetur, per se ipsam multiplicanda est tot vicibus dempta una, quot exponens illius potentiæ unitates continet.* V. g. Si 9 elevanda sint ad tertiam potentiam, is numerus bis in se ipsum ducatur; nempe $9 \times 9 = 81$, $81 \times 9 = 729$. Eodem modo quadratum de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; ejus cubus $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$, quarta potentia $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$ &c. Sic etiam quadratum de $\frac{1}{10}$ est $\frac{1}{100}$, cubus $\frac{1}{1000}$, quarta potentia $\frac{1}{10000}$ &c.

159. Hinc autem patet simul, *potentiam alicujus fractionis fieri quantitatem eo minorem respectu unitatis ad eandem potentiam elevatæ, quo fractio minor pars unitatis est, & quo potentia, ad quam elevatur, est altioris gradus.* Verum quia plerumque in quantitatibus algebraicis satis est, si indicentur modo eæ potentiæ, sine actuali multiplicatione, dicendum jam, qua id ratione præstetur.

160. I. *Ut monomium ad potentiam quamvis elevetur, omnibus ejus literis exponens illius potentiæ adscribendus est.* Sic quinta potentia de abc est $a^5 b^5 c^5$; potentia m

quan-

quantitatis $\frac{ab}{cd}$ fit $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$; cubus ex $\frac{2ab}{5fg}$ vero $\frac{8a^3b^3}{125f^3g^3}$. Etenim $\frac{2ab}{5fg} \times \frac{2ab}{5fg} = \frac{4aabb}{25ffgg}$ & $\frac{4aabb}{25ffgg} \times \frac{2ab}{5fg} = \frac{8a^3b^3}{125f^3g^3}$.

161. II. *Si in quantitate data habeantur jam literæ cum affixis exponentibus, hi exponentes multiplicandi ſunt per exponentem potentiæ, ad quam tota ea quantitas elevari debet.* v. g. Si a^3b^2 elevari debeat ad quartam potentiam, fiat $a^{3\times4}b^{2\times4} = a^{12}b^8$. Eſt enim $a^3b^3 \times a^3b^2 \times a^3b^2 \times a^3b^2 = a^{12}b^8$. In genere quantitatis $\frac{a^3 b^n}{c\, d^q}$ potentia m eſt $\frac{a^{3m} b^{mn}}{c^m d^{mq}}$.

162 III. Ut indicetur, polynomium eſſe ad potentiam quandam elevatum, omnibus ejus terminis linea continua ſuperne adſcribitur, cujus extremo ad partem dextram exponens illius potentiæ adjungitur. Hunc in modum $\overline{aa-bc}^m$ denotat potentiam m binomii $aa-bc$. Alii utuntur ſequente expreſſione $(aa-bc)^m$.

Verum potentiarum polynomiorum natura, præcipue quadratorum & cuborum; non nihil accuratius perpendenda eſt.

163. Itaque ſi *primo* $a+b$, vel $-a-b$, elevetur ad quadratum, reperitur $aa+2ab+bb$; & ſi fiat quadratum ex $a-b$, vel $-a+b$, obtinetur $aa-2ab+bb$. Unde manifeſtum eſt, *quadratum binomii conſtare ex quadrato termini primi, ex quadrato termini ſecundi, & ex fa-*

facto dupli primi in terminum secundum. Quod si terminus uterque binomii idem habeat signum, omnes partes quadrati sunt positivæ; si signa terminorum sint contraria, factum ex duplo primi in secundum est negativum.

164. *Secundo.* Ex binomio quovis si cubus fiat, e. g. ex $a+b$, reperitur $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Hinc autem colligitur, *cubum omnem binomii componi ex cubis utriusvis termini, ex factis tripli quadrati cujusvis termini in alterum terminum.*

Quod si eodem modo polynomium elevetur ad alias successive potentias, semper facile observare licebit, quibusnam quævis partibus constet.

Variæ potentiarum, & radicum expressiones.

165. Jllud facile intelligitur, quantitatem quamvis, velut a, ad eas successive attolli potentias, quas numerus unitatum ejus exponenti additarum indicat: sic cum a^1 sit prima potentia, erit a^{1+1}, seu a^2, secunda; a^{2+1}, vel a^3, tertia, a^{3+1}; seu a^4, quarta &c.

Atque hic potentias concipiendi modus si cum ea, quam habet, amplitudine sumatur, perspicuum est, *universim quantitatis cujuslibet tot posse esse potentias, quot ei exponentes tribui possunt, hoc est, quot numeri dantur seu integri, seu fracti; positivi, aut negativi.*

Et quamvis si aliæ potentiæ videantur plerumque concipi, quam quarum exponentes sint numeri integri, ut est potentia a^m, nihilominus tamen licet etiam cogitare, $a^{\frac{m}{n}}$, a^{-m}, $a^{\frac{-m}{n}}$ &c, imo etiam a^0, quæ totidem diversas potentiarum species exhibent, quarum natura intelligi potest, si referantur ad expressionem a^m.

166. I. Ut igitur a^0 revocetur ad expressionē a^m, facile apparet, a^0 ñ posse mutari in a^m, nisi a^0 multiplicetur per a^m; erit enim factum (142) $a^{0+m} = a^m$. Ergo a^0 debet esse factor, qui in quantitatem quampiam ductus eam nec augeat, nec minuat, id, quod soli unitati proprium est; quare $a^0 = 1$. Aliter: $a^0 = a^{m-m}$; est vero (146) $a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$; consequenter $a^0 = 1$. Quare universim *quantitas quævis elevata ad potentiam, cujus exponens est zerus, æqualis est unitati.*

167. II. Ut $a^{\frac{m}{n}}$ transmutetur in a^m, necesse est, ut $a^{\frac{m}{n}}$ elevetur ad potentiam n; quod fit (161) ducto exponente $\frac{m}{n}$ in n; habebitur enim $a^{\frac{m \times n}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$. Unde a^m est potentia n quantitatis $a^{\frac{m}{n}}$; & vicissim $a^{\frac{m}{n}}$, est radix n potentiæ a^m, seu $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Et in genere, *quantitas elevata ad fractionem, est radix habens pro exponente fractionis denominatorem, potentiæ illius, cujus exponens est ejusdem fractionis numerator,* v. g. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{aa}$ &c.

168. III. Ut a^{-m} fiat a^m, patet, a^{-m} duci debere in a^{2m}; ita enim transformabitur in $a^{2m-m} = a^m$. Quare

(56) $\frac{a^m}{a^{2m}} = a^{-m}$. Eſt autem $\frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$ (146); igitur

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Atque hinc generatim conſtat, *quantitatem elevatam ad potentiam exponentis negativi integri, nil aliud eſſe, quam unitatem diviſam per potentiam poſitivam ejus quantitatis, cujus exponens eſt numerus ille integer.* Sic $a^{-2} = \frac{1}{aa}$; $ab^{-5} = \frac{a}{b^5}$.

169. IV. Hinc porro manifeſtum fit, eſſe $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

170. *Coroll.* I. Ex allatis hucusque intelligitur ratio, expreſſiones radicum (quas *radicalia* appellant) forma potentiarum exhibendi, vel etiam in alias quantitates radicales æquivalentes convertendi. Exempli cauſa $\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a}{b}}$ idem eſt ac $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ vel etiam $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$.

171. *Coroll:* II. Potentiæ & radices easdem operationes admittunt, quas numeri integri, & fracti.

172. Deinceps cum voce *potentia* utemur, ſemper intelligemus ejusmodi potentiam, cujus exponens eſt numerus integer poſitivus; per *potentiam negativam* ſignificabimus talem, cujus exponens eſt numerus integer negativus; *potentiam exponentis fracti* vocabimus, quæ fractionem poſitivam habet pro exponente; *potentiam exponentis fracti negativi* dicemus, cujus exponens ſit fractio valoris negativi. Porro nomine *potentiæ perfectæ* indicabimus eam, cujus radix numero aliquo, ſeu integro, ſeu fracto exprimi poteſt: cujus vero radix nullo numero exhiberi poteſt, eam *potentiam imperfectam* vocabimus. In ſequentibus apparebit, plurimos numeros eſſe potentias imperfectas.

De Extractione Radicum.

173. I. *Radix quævis ex monomio dato extrahitur, ſi ſingularum literarum monomii exponentes dividantur per exponentem radicis.* Hac igitur operatione exponentes literarum fiunt fractiones; & ſiquidem eæ reduci poſſint ad numeros integros, extractio radicis perfecta cenſeri debet; ſecus, ſolummodo indicatur.

Sit exempli cauſa extrahenda radix quadrata ex $a^2 b^6$; juxta legem expoſitam fiet $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{6}{2}}$, & adhibita reductione erit radix vera, quæ quærebatur ab^3. Nam $ab^3 \times ab^3 = a^2 b^6$ (142).

Ut extrahatur radix cubica ex $a^6 b$. ſcribendum eſt $a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{1}{3}}$, facta reductione habetur $a^2 b^{\frac{1}{3}}$, quare extractio ex parte imperfecta eſt. In genere radix m potentiæ $\frac{a^p\, b^q}{c\; d^n}$ eſt $\frac{a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{m}}}{c^{\frac{1}{m}}\, d^{\frac{n}{m}}}$. Æquivalet enim hæc expreſſio ſequenti $\sqrt[m]{\frac{a^p\, b^q}{c\; d^n}}$.

174.

174. II. Si monomio præfixus sit coefficiens, etiam ex hoc radix juxta regulas pro numeris præscribendas extrahi debet.

175. III. Radix ex polynomio extrahi nequit, nisi si polynomium sit reipsa potentia ex multiplicatione illius radicis facta, quod rarum admodum est; atque hinc plerumque satis est, extractionem indicare, terminis polynomii linea superne adscripta, & præfixo signo radicali $\surd$ cum exponente radicis inter crura hujus signi collocato, vel exponente fracto ad finem lineæ ex dextra parte posito. Hunc in modum radix quadrata quantitatis $aa - bb$ indicatur per $\surd\,\overline{aa - bb}$, vel $\overline{aa - bb}^{\frac{1}{2}}$; alii scribunt $\surd(aa - bb)$ vel $(aa - bb)^{\frac{1}{2}}$. Ut denotetur radix cubica polynomii $\dfrac{aa - 3b + c}{cc - dd}$, adhiberi potest hæc expressio

$$\sqrt[3]{\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}} \text{ vel } \frac{\sqrt[3]{aa - 3b + c}}{\sqrt[3]{cc - dd}}, \text{ vel } \frac{\overline{aa - 3b + c}^{\frac{1}{3}}}{\overline{cc - dd}^{\frac{1}{3}}},$$

$$\text{vel } \left(\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ vel denique } \frac{(aa - 3b + c)^{\frac{1}{3}}}{(cc - dd)^{\frac{1}{3}}}.$$

Extractio radicum e potentiis hunc in modum indicata nunquam peragi solet, nisi postquam numeri in literarum Algebraicarum locum sunt substituti.

176. Qui frequentiore usu calculum Algebraicum sibi familiarem reddiderit, facile advertet, an polynomium propositum sit potentia perfecta radicis, quam extrahere cupit, atque adeo an ipsa extractio facienda sit, vel satis sit eam indicare. En autem

 me-

methodum, qua explorari poſſit, utrum radix quadrata e polynomio dato extrahi queat.

177. Detur polynomium $aa + 2ax + xx$; poterit quisque hunc in modum ſecum ratiocinari: quoniam quantitas propoſita polynomia eſt, ejus radix plures habet terminos, quam unum. Ponantur eſſe duo; igitur in polynomio dato contineri debent (163) quadratum termini primi, quadratum ſecundi, ac factum ex duplo primi in terminum ſecundum. Et quia occurrit reipsa quadratum aa, ejus radicem a (173) aſſumo pro termino primo quæſito, atque ſeparatim ex dextra parte ſcribo, ejus vero quadratum aa ex polynomio dato ſubtraho, remanentibus $2ax + xx$. Jam in reſiduo hoc adeſſe debet factum ex duplo termini primi a in alterum terminum radicis quæſitæ; quare nequit obtineri alter ille terminus, niſi reſiduum

$$\begin{array}{rrl}
aa + & 2ax + xx & (a + x \text{ Radix} \\
- aa & & \\
\hline
& + 2ax + xx & \\
\hline
& 2a + x & \\
& x & \\
\hline
& 2ax + xx & \\
& - 2ax - xx & \\
\hline
& 0 &
\end{array}$$

$2ax + xx$ per duplum a, ſive $2a$, dividatur; quandoquidem (56) diviſione utendum eſt ad inveniendum alterum factorem, ſi alter ſit datus. Divido itaque $2ax + xx$ per $2a$, & quotientem $+x$ adjungo priori parti radicis: quod ſi $+x$ ſit alter terminus quæſitus, neceſſe eſt, ut factum ex eo in $2a$, una cum ejusdem quadrato, ſit æquale reſiduo $2ax + xx$. Unde diviſori $2a$ adjungo $+x$, totumque $2a + x$ multiplico per hunc ſecundum terminum x (factum enim æquale eſſe debebit ſummæ ex producto $2a$ in x, & quadrato termini x); obtineo autem productum

$2ax$

$2ax + xx$, quod cum ſubtractum a reſiduo $2ax + xx$ nihil relinquat, manifeſtum eſt, polynomii $aa + 2ax + xx$ radicem quadratam eſſe $a + x$, quippe cum per operationes hactenus inſtitutas eadem quantitas reſoluta ſit in partes, ex quibus compoſita eſt.

178. Eadem omnino methodus adhibetur, quando radix quadrata ex numeris extrahenda eſt; & quoniam ſingularum operationum rationes jam reddidimus, dum radicem ex $aa + 2ax + xx$ quæſivimus, ſolummodo ipſas operationes faciendas in numeris præſcribemus.

Ac imprimis quidem notæ eſſe debent radices quadratæ omnium numerorum quadratorum, qui 100 non adæquant, ut hic videre eſt.

Quadrata - - -	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Radices - - - -	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

179. Hinc porro apparet, *numerum ſimplicem non poſſe habere quadratum, cujus plures ſint notæ, quam duæ;* quandoquidem 10, qui eſt primus numerus eorum, qui e pluribus notis componuntur, quadratum habet 100, quod eſt numerus minimus omnium tribus notis conſtantium. Si eodem modo ad alios numeros tranſeamus, manifeſtum quoque erit, *numeri e duabus notis compoſiti quadratum non poſſe habere plures notas, quam quatuor;* etenim 100 (qui eſt minimus eorum, qui tres notas habent) ad quadratum elevatus, eſt 10000, quo nullus datur numerus minor quinque notis conſtans. Univerſim: *nullius quadratum plures notas habere poteſt, quam ſit duplus notarum ſuarum numerus.*

Quæratur itaque radix quadrata numeri 1764,

qui

qui cum quatuor notis conſtet, ejus radix duas notas habere debet: ſeparentur igitur binæ quævis notæ interpoſita virgula, initio a dextra parte facto; quæratur in primo a ſiniſtris membro quadratum hunc in modum: radix quadrata de 17, eſt paulo major, quam 4; collocetur 4 a latere, & quadratum illius 16 ſubtrahatur ex 17; remanet unitas, cui verſus dextram adjungatur proxime ſequens membrum 64; accipiatur duplum radicis inventæ 4, nempe 8, atque notæ 6 ſubscribatur, primæ ſcilicet novi membri; dividatur 16 per 8; erit quotiens 2, qui radici jam inventæ adjungatur, ſimulque diviſori 8; multiplicetur 82 per novam hanc radicis partem 2, & factum 164 auferatur ex reſiduo 164; quoniam nihil remanet, radix quæſita eſt 42.

17,64(42
16 (
1,64
82
164
0

Si deſideretur radix quadrata numeri 389489, ſecetur interpoſitis virgulis in tria membra, quibus ſingulis binæ notæ respondent, initio a dextris facto: quæratur radix quadrati primo membro 38 proxime æqualis, quæ eſt 6, & scribatur a latere, illius vero quadratum ſubtrahatur a primo membro; manet reſiduum 2. Adjungatur huic membrum ſecundum 94, & scribatur duplum radicis inventæ 12 ita, ut 2 ſint infra 9: dividatur 29 per 12, & quotus 2 tam diviſori 12, quam radici inventæ 6 verſus dextram adjungatur: ſi per 2 multiplicetur 122, & factum 244 auſeratur ex 294, habebitur reſiduum 50, cui tertium conjungatur membrum 89, & utraque nota 62 huc usque reperta conſide-

38 94,89(624
36 (
294
122
244
50,89
1244
4976
113

ſideretur tanquam pars prima radicis binomiæ; ideoque ejus duplum 124 ita ſubſcribatur reſiduo priori novo membro aucto, ut nota 4 infra 8 collocetur, primam ſcilicet notam novi membri. Diviſo 508 per 124, obtinetur quotus 4, qui tam radici inventæ, quam diviſori verſus dextram adſcriptus, & in 1244 ductus, ſuppeditat factum 4976, quod ſubtractum ex 5089 relinquit 113. Quoniam nullum reſtat membrum numeri propoſiti huic reſiduo adjungendum, erit radix quadrata veræ proxima 624 numeri dati 389489, qui ſi 113 minueretur, foret numerus perfecte quadratus.

180. Quando calculus ſingularem accurationem non deſiderat, reſidua, quæ peracta, ut modo expoſuimus, extractione ſuperſunt, negligi poſſunt; at ſi etiam horum rationem habere oporteat, notis integris adjungendæ fractiones decimales inveniri debent, toties ſcilicet notis remanentibus, novi membri inſtar, adſcriptis binis zeris, quot notarum fractio deſideratur, atque extractione continuata: notæ enim inde inventæ erunt totidem decimales.

Exemplum: addantur ſuperiori reſiduo 113 duo zeri, & radix reperta 624 ſpectetur tanquam pars prima binomiæ: adeoque ejus duplum 1248 ſcribatur infra 11300 ut 8 reſpondeat primo zero: dividatur 11300 per 1248 quotus eſt 0, qui adjungatur ſimul diviſori, ſimul radici inventæ; ducatur quoque in 12480; factum 0 ſubtractum ex 11300 relinquit 11300. Novo reſiduo rurſus adjungantur duo zeri, ut altera nota decimalis acquiratur; radix 6240 iterum pro prima parte radicis binomiæ habeatur, & reſiduo ſubſcribatur ejus duplum 12480 ita, ut 0 ſit infra penultimum zerum reſidui; inſtituta diviſione reperitur quotiens 9 priori radici, & ipſi diviſori verſus dex-

tram

tram apponendus; & ſi is ducatur in 124809, atque productum 1123281 ex 1130000 ſubtrahatur, remanet 6719. Si radicem 624,09 pro ſatis accurata habere velim, negligendum eſt poſtremum reſiduum; at ſi propius ad radicem veram accedere lubeat, rurſus duo zeri adſcribendi ſunt, atque eadem operatio repetenda, donec tot habeantur notæ decimales, quot viſum fuerit.

38,94,89 (624,0905 &c.
36
294
122
244
5089
1244
4976
11300
12480
0
1130000
124809
1123281
671000
1248180
0
67190000
12481805
62409025 &c.
4780975

181. *Obſerva.* Quando radix fractionis petitur, ea ex ſingulis ejus terminis, numeratore ſcilicet, & denominatore, ſeparatim extrahenda eſt. v.g. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, cum $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; item $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Verum ſi ejus termini non ſint numeri quadrati, ſatis eſt, toti fractioni ſignum radicale præfigere, aut etiam fractio reduci poterit ad decimalem, indeque radix eodem modo extrahi, quem adhibendum eſſe diximus, dum numeri perfecta quadrata non ſunt, ſed aliquid reſidui relinquunt.

De præcipuis proprietatibus potentiarum in numeris.

182. Theorema I. *Factum ex potentia perfecta alicujus numeri in potentiam imperfectam ejusdem gradus alterius numeri, non poteſt eſſe potentia perfecta illius gradus.*

Demonstratio. Si a^3 cubus perfectus, & b cubns imperfectus; erit $a^3 b$ cubus imperfectus. Etenim si ponatur esse perfectus, ejus radix vera, & sine residuo, fiet $a b^{\frac{1}{3}}$ quæ si dividatur per a, radicem veram cubi a^3, habebitur $b^{\frac{1}{3}}$ vera quoque radix cubi b, & hinc nequit b esse cubus imperfectus, contra hypothesin.

183. Coroll: *Nequit fieri, ut numerus quadratus, sit duplus, triplus, quintuplus &c alterius numeri quadrati,* cum 2, 3, 5 &c sint quadrata imperfecta. Eodem modo *numerus cubicus non potest esse duplus, triplus, quadruplus* &c *alterius numeri cubici*, quia 2, 3, 4 &c sunt cubi imperfecti. Et universim: *potentiæ perfectæ nequeunt esse multiplæ aliarum ejusdem gradus, nisi eæ sint potentiæ perfectæ.*

184. Theorema II. *Numerus per certos numeros primos divisibilis, ad quamcunque potentiam elevetur, non acquirit numeros primos alios pro divisoribus.*

Demonstratio. Manifestum enim est, quod si v. g. abc non alios admittat numeros primos, quibus exacte dividi possit, quam a, b, c, neque alios fore divisores quadrati $aa\,bb\,cc$, vel cubi $a^3 b^3 c^3$ &c, qui sint numeri primi.

185. Coroll: *Duo numeri, qui non habent communem divisorem* (præter unitatem, in omnibus numeris integris contentam, de qua sermo non est, cum proprie per eam numerus non dividatur), *etiam ad quamcunque potentiam ejusdem nominis elevati non acquirent communem divisorem.* Etenim divisores accurati nequeunt esse nisi vel numeri primi, vel primorum multipli; jam vero numeri, qui non habent communem divisorem, nec habent numeros primos pro communibus divisoribus; ergo nec elevati ad eandem quamcunque potentiam acquirunt numeros primos pro divisoribus communibus; multo minus vero eorum multiplos; consequenter nullum.

186. Theorema III. *Numeri integri & fracti ad simplicissimam expressionem reducti summa, nequit fieri numerus integer, ad quamcunque potentiam elevetur.*

Demonstratio. Fractio ad simplicissimam expressionem reducta est, cujus termini non habent communem divisorem; quod si jam fractio ejusmodi addatur numero integro, ut summa fiat nova fractio, termini novae fractionis non habebunt communem divisorem; si quis enim esset communis divisor hujus novae fractionis, ejus denominator (qui idem est tam ante reductionem, quam postea) debuisset fieri minor, & hinc prior fractio contra hypothesin non fuisset ad simplicissimam expressionem reducta; igitur fractionis ex numero integro & fracto ad minimos terminos reducto ortae, termini nequeunt communem divisorem habere; adeoque neque si ad quamvis eleventur potentiam. Quoniam itaque nulla fractio reduci potest ad numerum integrum, nisi denominator sit simul divisor communis numeratoris, manifestum est, summam ortam ex integro & fracto ad minimos terminos reducto non posse fieri numerum integrum, ad quamcunque potentiam elevetur.

187. Coroll: *Nullo numero assignabili potest exprimi vera radix alicujus numeri, qui non sit perfecta potentia ejusdem exponentis cum radice.* Nam si numerus, cujus radix petitur, sit integer, supponamus ejus radicem veram constare ex integro & fractione: igitur si haec radix elevetur ad eandem potentiam, debet is ipse numerus integer obtineri, qui dabatur, quod fieri non posse demonstravimus. Idem est, si supponamus numerum datum, cujus radix petitur, esse fractionem, aut constare ex integro & fracto ejusmodi, ut si ad eundem denominatorem reducti colligantur in unam fractionem, non uterque terminus sit potentia perfecta ejusdem gradus cum radice quaesita: potest enim tunc uterque terminus separatim spectari ut numerus integer, cujus radix assignari nequit.

188. Expressiones radicales numerorum, qui non sunt perfectae potentiae, vocantur *incommensurabilia.* Ejus generis sunt $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$ &c.

De Extractione Radicis Cubicae.

189. Si quis ad naturam polynomiorum ad potentias evectorum animum advertat, eodem modo regulas in extractione radicum cubicarum, immo aliarum etiam, observandas deteget, ut superius fecimus, cum de radice quadrata ageremus. Verum hae

hæ regulæ eo magis ſemper complicatæ erunt, quo altiores ſient potentiæ.

Proponatur extrahenda radix cubica ex $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$. Apparet illico, radicem hujus quantitatis eſſe polynomiam. Supponatur itaque binomia, cujus conſequenter cubus conſtat (164) e cubis ſingulorum terminorum, & factis ex triplo quadrato cujuslibet termini in terminum alterum.

His poſitis, habetur imprimis cubus primi termini a^3, cujus radix ſeparatim ſcribatur, ipse vero ſubtrahatur e quantitate data: remanent $6aab + 12abb + 8b^3$.

Porro in hoc reſiduo adeſſe debet factum ex triplo quadrato primæ partis radicis a in partem alteram, quæ jam invenienda eſt: quare elevetur a ad quadratum aa, & per ejus triplum $3aa$ dividatur reſiduum: fiet $\frac{6aab}{3aa} = 2b$; collocetur hic quotiens penes priorem partem radicis. Quod ſi $+2b$ ſit pars radicis quæſita, erit ſumma ex productis $3aa$ in $2b$, & $12bb$ in a, una cum cubo $8b^3$ æqualis reſiduo; quoniam igitur reipsa ſumma expoſita reſiduo æquatur, ſequitur, radicem cubicam quæſitam eſſe $a + 2b$.

190. Ut extractio fiat in numeris, noti ſint oportet cubi perfecti decem primorum numerorum.

Cubi ...	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000
Radices..	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10

Præterea illud iſthic obſervandum eſt, nullius numeri cubum poſſe habere plures notas, quam ſit triplus numerus notarum radicis: nam numeri 10, qui eſt minimus eorum, qui duabus notis conſtant, cubus eſt 1000, minimus nempe e 4 notis compoſitorum. 100 (minimus tribus notis conſtantium) habet cubum 1000000, minimum numerorum 7 notarum &c. Et univerſim per inductionem conficitur: *numerum habentem notas* n, *ſi elevetur ad potentiam* p, *non poſſe habere plures notas, quam* pn.

Sit extrahenda radix cubica e numero 74088; dividendus itaque eſt hic numerus interjectis virgulis in membra ternis notis conſtantia, initio a dextris facto; dein cum radix cubica primi membri a ſiniſtris ſit proxime 4, ſcribatur 4 e latere, & ejus cubus 64 ſubtrahatur e primo membro 74, erit reſiduum 10.

 Hu-

Huic ad dextram adscribatur membrum alterum numeri dati 088. Elevetur 4 (cujus valor reipsa eſt 40, cum uno loco præcedat notam alteram radicis, quam quærimus) ad quadratum, nempe 1600, ducatur in 3 operatione ſeparatim inſtituta, ut videre eſt in adſcripto exemplo, & per factum 4800 (quod reſiduo altero membro aucto ſubſcribitur) dividatur 10088, erit $\frac{10088}{4800}$ = 2; quotus hic priori radicis parti jungatur, ſimulque in diviſorem ducatur, factum 9600 ſcribatur infra 4800. Fiat e 2 quadratum 4, quod ſeparatim multiplicetur primo per 40, ſeu primam radicis partem, & factum 160, ducatur ſecundo in 3, fiet 480, quod collocetur infra 9600 Denique fiat cubus ſecundæ hujus partis radicis, nempe 8, & ſubſcribatur priori facto 480: colligantur duo illa facta cum cubo ſecundæ partis in unam ſummam 10088, quæ cum æqualis ſit reſiduo 10088, nec aliud ſuperſit membrum numeri propoſiti, patet, radicem cubicam ex 74088 eſſe 42 accurate.

$$
\begin{array}{r}
74{,}088\,(42 \\
64 \quad\;\; \\
\hline
10088 \\
4800 \\
\hline
9600 \\
480 \\
8 \\
\hline
10088 \\
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1600 \\
3 \\
\hline
4800 \\
4 \\
40 \\
\hline
160 \\
3 \\
\hline
480
\end{array}
$$

Exemplum alterum: Quæratur radix cubica numeri 5305472, qui conſequenter in ſua membra dividatur, ternas notas cuivis tribuendo. Radix proxima primi membri eſt 1 a latere ſcribenda, cujus cubus 1 ſubtractus e primo membro 5 relinquit 4. Huic reſiduo adjungatur membrum ſecundum 305, ut fiat 4305. Quia pars jam inventa radicis 1 præcedit notam ſequentem, quam quærimus, uno loco, ejus reſpectu valet 10: elevetur itaque 10 ad quadratum 100, & per ejus triplum 300 dividatur 4305; continetur quidem 3 in 43 decies & quater, ſed quoniam nunquam quotus major, quam 9 adhiberi poteſt, & in præſente caſu etiam 9 eſt juſto major, ut patebit, ſi reliquæ operationes ex præſcripto fiant; poſtquam extractio ſecundæ partis fruſtra per 9 & 8 tentata fuerit, intelligetur, quotum non poſſe majorem adhiberi, quam 7. Adſcribitur itaque 7 parti jam inventæ radicis, ſimulque in 300 ducitur; productum eſt 2100. Dein $7 \times 7 = 49$; & $49 \times 10 = 490$; denique $490 \times 3 = 1470$, quod poſtremum ponitur infra 2100. Supereſt $7 \times 7 \times 7 = 343$ numero 1470 ſubſcribendum. Addantur jam 2100, 1470 & 343, ac ſumma 3913 auferatur ex 4305, relinquentur 392, quæ adjuncto membro tertio fient 392472. Binæ partes radicis

17 in-

17 inventæ jam unius inſtar conſiderentur, cujus valor reſpectu ejus, quæ adhuc quæritur, eſt 170, cujus quadrati 28900 triplum eſt 86700: dividatur per hoc 392472, & per quotum 4 (qui adjungitur ad 17, ſeu partem jam repertam radicis) multiplicetur diviſor; factum 346800 ſcribatur infra lineam. Tum ſumatur $4 \times 4 = 16$; & $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod ultimum collocetur infra 346800; denique cubus de 4, ſive 64, una cum prioribus duobus factis addatur, & ſumma 355024 ſubtrahatur ex 392472; ſupererunt 37448. Cum nullum ſuperſit membrum dati numeri huic reſiduo adjungendum, erit radix cubica quæſita 174; verum ut numerus datus ſit cubus perfectus, minui debebit poſtremo hoc reſiduo 37448.

Si calculi accuratio poſcat, ut etiam reſidui habeatur ratio, toties terni zeri, ſeu 000, inſtar novi membri, adjungendi ſunt, quot notæ decimales deſiderantur cum prioribus integris; continuata enim operatione, & notis inventis ſpectatis inſtar primæ partis radicis binomiæ, ſemper poterit alia nova, tanquam pars ſecunda radicis, reperiri. Exempli annexi forma rem per ſe illuſtrat. Operationum, quæ iſthic inſtituendæ ſunt, longitudo facit, ut plerisque Mathematicorum ſatis videatur, radices cubicas, vel ope logarithmorum, vel methodo ſequente extrahere.

5,305,472 (174,41 &c.
1
———
4305
300
———
2100
1470
343
———
3913
———
392472
86700
———
346800
8160
64
———
355024
———
37448000
9082800
———
36331200
83520
64
———
36414784
———
1033216000
912460800
———
912460800
52320
1
———
912513121
———
120702879 &c.

Me-

Methodus universalis extrahendi radicem per approximationem e potentiis quadrato altioribus.

191. In Mathesi practica, cum radices extrahendæ sunt e potentiis secunda altioribus, non sine compendio laboris logarithmi adhibentur (343); verum contingit non nunquam, ut major poscatur notarum decimalium numerus radici adjungendus, quem ope logarithmorum, qui passim prostant, invenire non possumus. At si utamur sequentibus formulis, quas ab Halleyo habemus, is facile reperietur.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}aa \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6aa}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{25}aa \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}aa \pm \frac{b}{21a^5}\right)} \text{ \&c.}$$

Ut res exemplo plana fiat, petatur radix quinta numeri 161900, quæ annexas habeat 12 notas decimales. Dividatur logarithmus numeri 161900, qui est 5,2092468, per 5; habebitur 1,0418494, logarithmus numeri 11,012, qui est radix veræ propinqua. Ponatur $11{,}012 = a$, & elevetur ad quintam potentiam, ut sit $a^5 = 161931{,}378732020728832$, qui numerus excedit datum 161900 quantitate $31{,}378732020728832$. Vocetur hic excessus b; erit $a^5 - b = 161900$; igitur si adhibita for-

formula $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)}$ substituantur numeri, nempe $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = 8.259 +$

$$\sqrt{\left(7{,}579009 - \frac{31{,}378732020728832}{13353{,}607537280}\right)}$$

$= 8{,}259 + \sqrt{(7{,}579009 - 0{,}002349831828824315932711)} =$ $8{,}259 + \sqrt{(7{,}5766591681711756840684067289)}$ $= 8{,}259 + 2{,}752573190338 = 11{,}011573190338$, habetur radix quaesita.

Calculus ad inveniendas ipsas formulas expeditus est, quo tabula facile ultra septimam potentiam extendi potest, seu id fiat per inductionem, juxta legem, quam formulae propositae observant, seu methodo, quam sequens exemplum docebit, uti quis velit.

Esto $\sqrt[5]{(a^5 + b)} = a + d$, ubi d denotat fractionem; erit igitur $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd + 10aad^3 + 5ad^4 + d^5$. Et quia (159) fractionis valor eo magis semper minuitur, quo ad altiorem potentiam elevatur; quantitates, quae per potentias secunda altiores fractionis d multiplicatae sunt, velut exiguae admodum spectari possunt, consequenter negligi. Et hinc poni potest $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd$; seu $b = 5a^4d + 10a^3dd$. Si omnia dividantur per $10a^3$, habetur $\frac{b}{10a^3} = \frac{1}{2}ad + dd$; consequenter (225) est $\sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}\right)}$

$= \frac{1}{4}a + d$; addito utrique parti $\frac{3}{4}a$, fit $\frac{3}{4}a +$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}\right)} = a + d = \sqrt[5]{(a^5 + b)}.$$

For-

Formula generalis elevandi binomium quodvis $a \pm b$ ad potentiam quamcunque datam, vel inde extrahendi radicem.

192. Formula eſt ſequens: . . . .

$$(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.\ 2.} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.} a^{m-3} b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} a^{m-4} b^4 \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} a^{m-5} b^5 + \&c.$$

Nam ſi fiat ſeries potentiarum ſucceſſive crescentium binomii $a \pm b$, habebitur:

$$(a \pm b)^1 = 1\, a^1 \pm b^1$$

$$(a \pm b)^2 = 1\, a^2 \pm 2\, a^1 b^1 + 1\, b^2$$

$$(a \pm b)^3 = 1\, a^3 \pm 3\, a^2 b^1 + 3\, a^1 b^2 \pm 1\, b^3$$

$$(a \pm b)^4 = 1\, a^4 \pm 4\, a^3 b^1 + 6\, a^2 b^2 \pm 4\, a^1 b^3 + 1\, b^4$$

$$(a \pm b)^5 = 1\, a^5 \pm 5\, a^4 b^1 + 10\, a^3 b^2 \pm 10\, a^2 b^3 + 5\, a^1 b^4 \pm 1\, b^5$$

$$(a \pm b)^6 = 1\, a^6 \pm 6\, a^5 b^1 + 15\, a^4 b^2 \pm 20\, a^3 b^3 + 15\, a^2 b^4 \pm 6\, a^1 b^5 + 1\, b^6 \ \&c.$$

Ut formula generalis habeatur pro potentia quavis, invenienda eſt imprimis lex, quam obſervant exponentes terminorum ſeſe ordine ſequentium; tum etiam illa, qua crescunt vel decrescunt coefficientes. Atque illa quidem, quæ ad exponentes pertinet, citra difficultatem deprehenditur: ſunt enim exponentes numeri naturales ab unitate, qui in quantitate b crescunt usque ad illum, qui indicat ipſam potentiam; in a vero ab hoc usque ad 1 decrescunt, ut conſequenter præciſis coefficientibus lex exponentium ſequente ſerie infinita exhibeatur - - -

$$a^m \pm a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 \pm a^{m-3} b^3 + a^{m-4} b^4 \pm \&c.$$

Lex

Lex coefficientium est, quod eorum primus (qui afficit terminum secundum potentiæ binomiæ) sit exponens primi termini seriei quantitatis *a* divisus per exponentem termini primi seriei *b*; secundus factum exponentium duorum primorum seriei *a* divisum per factum exponentium primorum duorum seriei *b*; tertius factum exponentium trium primorum seriei *a* divisum per factum trium primorum exponentium seriei *b*; quartus factum exponentium quatuor primorum seriei *a* divisum per factum quatuor primorum exponentium seriei *b*, & sic deinceps. V. g. in potentia sexta binæ exponentium quantitatum *a* & *b* series sunt

$$6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$$
$$1,\ 2,\ 3.\ 4,\ 5,\ 6.$$

Unde si fiat $\frac{6}{1}$, $\frac{6.5}{1.2}$, $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3}$, $\frac{6.\ 5.\ 4.3}{1,\ 2.\ 3.4}$,

$$\frac{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5},\ \frac{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}$$

reducanturque omnia ad expressionem simplicissimam, habebuntur ordine coefficientes sextæ potentiæ binomii $a \pm b$, primo nempe spectante ad terminum secundum potentiæ (primi enim termini coefficiens semper est 1). Hinc autem sequitur legem coefficientium exhiberi hac serie infinita $1, \frac{m}{1}, \frac{m.m-1}{1.\ 2.}$

$$\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.},\ \frac{m.m-1.m-2\ m-3}{1.\ 2,\ 3.\ 4.},$$ &c. Utraque jam serie inter se combinata formula generalis binomii obtinetur.

Eadem formula cuivis polynomio applicari potest, $p + q + r - s$, posito nempe $p + q + r = a$, & $s = b$. Imo eadem etiam adhiberi potest extrahendis radicibus quibuscunque, si exponenti generali *m* substituatur exponens fractus radicis extrahendæ

Denique hæc formula illic terminatur semper, ubi in coefficiente est *m* mulctatum exponente potentiæ quæsitæ. Sic in potentia sexta formula desinit in termino septimo, cum in termini octavi coefficiente jam sit $m - 6$, uti etiam in omnibus se-

 quen-

quentibus, qui propterea omnes evanescunt, utpote ducti in $m-6=0$.

Calculus incommenſurabilium.

Paucæ ſunt æquationes, in quibus non deveniatur ad quantitates incommenſurabiles, hoc eſt, ad radices potentiarum imperfectarum, in quibus tamen omnes operationes inſtitui debent, quas ſolutionis æquationum regulæ præscribunt. Duplex autem eſt id genus calculus; alter *radicalium* dicitur, dum ſignum radicale relinquitur terminis præfixum, quorum radices denotantur; alter *calculus potentiarum per earum exponentes* appellatur, quando loco ſigni radicalis adhibentur exponentes negativi vel fracti.

Calculus Potentiarum per earum Exponentes.

193 Qui naturam exponentium potentiarum probe perſpectam habuerit, nullam in earum calculo habebit difficultatem.

Nam ſi binæ potentiæ addendæ ſint, jungitur altera alteri propriis ſervatis ſignis; ſi ſubtrahenda ſit una ex altera, coefficientium (non vero exponentium) ſubtrahendæ ſigna mutantur in contraria; quando multiplicari debent, & ſint termini ſimiles, exponentes adduntur; ſecus vero multiplicator conjunctim scribitur cum multiplicando nullo ſigno interpoſito. In diviſione, ſi termini ſint ſimiles, exponens diviſoris ſubtrahitur ab exponente dividendi; at ſi termini diſſimiles ſint, scribuntur forma fractionis. Ut eleventur ad potentiam quamvis datam, vel ut radix data extrahatur, tantum opus eſt, ut exponens multiplicetur, vel per exponentes potentiæ, ad quam elevari debet; vel per exponentem fractum radicis, quæ petitur.

Exempla. Summa ex a^n & $a^{\frac{1}{m}}$ eſt $a^n + a^{\frac{1}{m}}$; differentia $a^n - a^{\frac{1}{m}}$; factum $a^{n+\frac{1}{m}}$, quotiens $a^{n-\frac{1}{m}}$; potentia p earundem quantitatum eſt a^{pn} & $a^{\frac{p}{m}}$; radix q ſive potentia $\frac{1}{q}$, tandem $a^{\frac{n}{q}}$, $a^{\frac{1}{qm}}$.

Sum-

Summa quantitatum a^n & b^{-m} est $a^n + b^{-m}$, differentia $a^n - b^{-m}$; factum $a^n b^{-m}$, sive $\frac{a^n}{b^m}$, cum (168) $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$; quotiens ob eandem rationem $\frac{a^n}{b^{-m}}$ vel $a^n b^m$ (binæ hæ expressiones probe notandæ sunt). Si elevandæ sint ad potentiam m, fiet a^{mn}, b^{-mm}; si extrahenda radix p, habebitur $a^{\frac{n}{p}}$, & $b^{-\frac{m}{p}}$ sive $\frac{1}{b^{\frac{m}{p}}}$.

De Calculo Radicalium.

194. Compendii gratia regularum loco solummodo formulas adferemus, ex quibus id etiam emerget commodi, ut rem longe clarius ponant ob oculos, quam præceptorum utcunque prolixa expositio. Has formulas, qui familiares sibi reddiderit, non modo methodum exercendi calculum facile animo retinebit, sed ei præterea vel ipsæ demonstrationes sponte sese offerent, attentionem nonnullam adhibenti, vel ubi exponentes signis radicalibus substituerit, citra negotium advertet, operationes, quæ in radicalibus instituuntur, cum iis consentire, quæ in potentiis per earum exponentes fiunt.

Imprimis autem illud observandum est, quod si occurrat quantitas incommensurabilis, ejusmodi, ut quæ sub signo radicali continentur, possint accurate dividi per aliquam potentiam ejusdem exponentis cum signo radicali, ea quantitas simpliciore forma exprimi possit, si nempe radix illius divisoris, instar coefficientis, præponatur signo radicali, solo quotiente sub hoc signo relicto.

Exempli causa hujus generis expressio est $\sqrt{aab}$, in qua per quadratum de a dividi possit quantitas contenta sub signo radicali aab: quare loco $\sqrt{aab}$ scribi potest $a\sqrt{b}$. Eodem modo $\sqrt[3]{432}$ continet quantitatem, quæ sine residuo per cubum de 3, nempe 27, dividi potest, uti etiam per cubum de 6, sive 216,

 vel

vel per cubum de 2, sive 8; nam $\frac{432}{27}=16$, $\frac{432}{8}=54$, & $\frac{432}{216}=2$: itaque $\sqrt[3]{432}$ reduci potest ad quamlibet ex his tribus ejusdem valoris expressionibus, $3\sqrt[3]{16}$, $2\sqrt[3]{54}$. $6\sqrt[3]{2}$. Sic etiam in $\sqrt[4]{a^5b^4}$ quantitas a^5b^4 admittit divisionem exactam per quartam potentiam de ab; igitur pro $\sqrt[4]{a^5b^4}$ potest substitui $ab\sqrt[4]{a}$. Non absimili ratione reperitur - - - - - - -

$$\sqrt{\frac{b^3d}{aag}}=\frac{b\sqrt{bd}}{a\sqrt{g}};\ \frac{a\sqrt{48bcc}}{2\sqrt[3]{16dg^4}}=\frac{4ac\sqrt{3b}}{4g\sqrt[3]{2dg}}=\frac{ac\sqrt{3b}}{g\sqrt[3]{2dg}}\ \&c.$$

195. *Quantitatem quamvis* $\frac{p}{q}$ *ducere in radicale* $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ *quin radicalis valor mutetur.*

FORMULA . . . $\frac{ap}{bq}\sqrt[n]{\frac{cq^n}{dp^n}}$; vel $\frac{aq}{bp}\sqrt[n]{\frac{cp^n}{dq^n}}$. - - - - - -

$$\text{Nam } \frac{q}{p}\sqrt[n]{\frac{p^n}{q^n}}=\sqrt[n]{\frac{q^n p^n}{p^n q^n}}=1.$$

196. *Tollere coefficientem* $\frac{a}{b}$ *quantitatis radicalis* . . .

$$\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}.$$

FORMULA . . . . . . $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}$.

197.

197. *Fractionem* $\frac{c}{d}$ *sub signo radicali* $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ *positam*, *exhibere forma quantitatis integræ.*

FORMULA.... $\frac{a}{bd}\sqrt[n]{cd^{n-1}}$. Nam $\frac{a}{bd}\sqrt[n]{\frac{cd^n}{d}} =$ $\frac{a}{bd}\sqrt[n]{cd^{n-1}}$.

198 *Duo Radicalia* $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & $\frac{y}{z}\sqrt[v]{\frac{c}{d}}$, *ad eundem exponentem reducere.*

FORMULA.... $\frac{p}{q}\sqrt[nv]{\frac{a^v}{b^v}}$ & $\frac{y}{z}\sqrt[nv]{\frac{c^n}{d^n}}$.

Si plura dentur, reductio in binis quibusvis successive instituitur.

199. Additio radicalium fit, si propriis retentis signis alterum alteri jungatur. At quando signi radicalis exponens communis est, & præterea quantitas sub signo radicali contenta utrobique eadem, uti si addi deberet $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ad $\frac{y}{z}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, sufficit coefficientes addere; hinc summa foret $\frac{pz+qy}{qz}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

200. In subtractione radicalium mutatur signum coefficientis quantitatis radicalis subtrahendæ. At si utriusque radicalis non modo sit idem exponens, sed etiam eadem quantitas sub signo contenta; coefficientium differentia accipienda est.

Sic $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - \frac{y}{z}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{pz-qy}{qz}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

201.

201 *Radicale multiplicare per radicale, ut* $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *per* $\frac{y}{z}\sqrt[v]{\frac{c}{d}}$.

FORMULA.... $\frac{py}{qz}\sqrt[nv]{\frac{a^v c^n}{b^v d^n}}$

202. *Radicale dividere per radicale, ut* $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *per....* $\frac{y}{z}\sqrt[v]{\frac{c}{d}}$.

FORMULA . . . $\frac{pz}{qy}\sqrt[nv]{\frac{a^v d^n}{b^v c^n}}$.

203. Radicale quodvis $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ elevare ad potentiam quamlibet $\frac{u}{s}$.

FORMULA . . . $\sqrt[\frac{ns}{v}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$. Quod ſi enim loco ſigni radicalis adhibeantur exponentes, formula hæc fit $\frac{a^{\frac{nv}{ns}} c^{\frac{v}{ns}}}{b^{\frac{nv}{ns}} d^{\frac{v}{ns}}}$, & radicale datum $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ abit in $\frac{a^{\frac{n}{n}}c^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}d^{\frac{1}{n}}}$, cujus potentia $\frac{v}{s}$ eſt $\frac{a^{\frac{nv}{ns}}c^{\frac{v}{ns}}}{b^{\frac{nv}{ns}}d^{\frac{v}{ns}}}$ Si ponatur $\frac{v}{s}=n$, formula fit $\frac{a^nc}{b^nd}$; nam tunc exponens $\frac{ns}{u}$, qui nihil aliud eſt, quam n diviſum per $\frac{u}{s}$, erit idem, ac n diviſum per n, quod eum ad unitatem reducit. Jam vero omnis quantitas, cujus potentiæ, vel radicis, exponens eſt 1, eſt quantitas ſimplex.

204. Radicem quamlibet $\frac{v}{s}$ e radicali dato $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ extrahere.

Formula ... $\sqrt[\frac{nv}{s}]{\frac{a^nc}{b^nd}}$; cujus eadem, ac præcedentis, demonſtratio.

Poſtquam juxta formulas hasce operatio quæpiam peracta eſt, ſemper reductiones ſuperius præscriptæ, ſi quæ locum habeant, adhibendæ ſunt.

205. Formulæ allatæ eadem facilitate quantitatibus numericis, ac literalibus applicantur. Nam *primo* cum in earum conſtructione quantitates forma fractionum adhibitæ ſint, omnis difficultas ſublata eſt, quam fractiones creare poſſent. *Secundo* cum quivis numerus integer haberi poſſit pro fracto, cujus denominator ſit 1 (80), æque numerorum integrorum ſubſtitutio expedita erit *Tertiò* ſi radicalia data careant coefficiente, ſubintelligi ſemper poteſt coefficiens. $\frac{1}{1}$. *Quarto* ſi dentur quantitates complexæ, arbitraria ſubſtitutione ad operationes adhiberi poſſunt incomplexæ, itaque formularum applicatio ſemper carebit difficultate; ut ſubjecta exempla docebunt.

Sit

Sit quantitas $4\sqrt{\frac{2-b}{3ad}}$ multiplicanda per $\frac{1}{3}\sqrt[4]{aa+bb}$; reducatur utraque ad formam $\frac{4}{1}\sqrt[2]{\frac{2-b}{3ad}}$, & $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{aa+bb}{1}}$, & adhibitis radicalibus N. 201, fiat $4=p$, $1=q$, $2=n$, $2-b=a$, $3ad=b$; tum etiam $1=y$, $3=z$, $4=v$, $aa+bb=c$, $1=d$; his ſubſtitutis formula articuli citati $\frac{py}{qz}\sqrt[nv]{\frac{a^v a^n}{b^v d^n}}$ mutatur in $\frac{4\times 1}{1\times 3}\sqrt[2\times 4]{\frac{\overline{2-b}^4\times\overline{aa+bb}^2}{\overline{3ad}^4\times 1^2}}$ ſive facta reductione in $\frac{4}{3}\sqrt[8]{\frac{\overline{2-b}^4\times\overline{aa+bb}^2}{81a^4d^4}}$.

Sit $4\sqrt{5}$ dividenda per $\sqrt{\frac{3}{7}}$: reducantur prius ad has æquivalentes $\frac{4}{1}\sqrt[2]{\frac{5}{1}}$ & $\frac{1}{1}\sqrt[2]{\frac{3}{7}}$. Dein ſumantur radicalia num: 202, & ponatur $4=p$, $1=q$, $2=n$, $5=a$, $1=b$; item $1=y$, $1=z$, $2=v$, $3=c$, $7=d$. Facta ſubſtitutione formula $\frac{pz}{qy}\sqrt[nv]{\frac{a^v d^n}{b^v c^n}}$ abit in hanc $\frac{4\times 1}{1\times 1}\sqrt[2\times 2]{\frac{5^2\times 7^2}{1^2\times 3^2}}$, quæ iterum reduci poteſt ad $4\sqrt[4]{\frac{1225}{9}}$, & ſi extrahatur radix quadrata e ſingulis terminis ſub ſigno radicali contentis, ad $4\sqrt{\frac{35}{3}}$.

DE ÆQUATIONIBUS ſive DE ANALYSI.

206. Analyſis eſt ars reſolvendi per calculum Algebraicum problemata, quæ de magnitudinibus proponi poſſunt.

207.

207. *Problema proponere* nil aliud eſt, quam petere, ut inveniatur valor unius pluriumve quantitatum incognitarum: exiſtimatur autem hoc fieri non poſſe, niſi cum problema proponitur, ſaltem rationes quædam incognitarum ad quantitates cognitas dentur, quæ propterea *data* appellantur in problemate.

208. Rationes, quas quantitates datæ ad incognitas habent, dicuntur *conditiones problematis*, quoniam ex iis cognoscitur; quibusnam poſitis conditionibus æqualitas inter nota, & ignota habeatur.

209. Expreſſio itaque Algebraica ejusmodi conditionis vocatur *æquatio*.

210. Unde ſequitur, æquationem eſſe terminos algebraicos quantitatibus datis, & inognitis conſtantes, & ex utraque parte ſigni $=$ diſpoſitos.

211. Solent autem quantitates datæ primis Alphabeti literis denotari: incognitæ poſtremis, velut x, y, z, ut ex primo aſpectu nota ab ignotis facile diſtingvantur.

212. Termini, qui ſunt ex ſiniſtra parte ſigni $=$, dicuntur *primum membrum* æquationis; qui dextram partem occupant, *membrum ſecundum* conſtituunt.

213. Univerſim *æquatio* dicitur *primi gradus*, in qua quantitas incognita eſt primi gradus; ſi hæc elevata ſit ad ſecundam potentiam, æquatio vocatur *ſecundi gradus*, ut $xx - ax = b$; $aayy + bzz = c$, &c ſunt æquationes ſecundi gradus. Si quantitatis incognitæ maxima potentia ſit cubus, ut $ax^3 - bx = c$, æquatio eſt *tertii gradus*; idem de aliis gradibus dicendum.

214. *Problema ſolvere*, eſt invenire valorem ſingularum quantitatum incognitarum, quæ continebantur in problemate; ſeu etiam oſtendere, fieri non

M poſ-

posse, ut earum valor inveniatur, id, quod contingit, dum rationes datæ problematis, sive conditiones, contradictionem involvunt. In sequentibus exempla occurrent.

215. *Invenitur autem valor quantitatis incognitæ*, quando ea quantitas sola in alterutro æquationis membro continetur, in altero vero meræ quantitates cognitæ.

216. Quare ut quantitates incognitæ alicujus problematis reperiantur, variæ in æquationibus adhibendæ sunt operationes, prout variæ sunt ejusmodi quantitatum affectiones. Operationes porro, quibus utendum est, sunt Transpositio, Divisio, Multiplicatio, Extractio radicum, & substitutio; quarum quando quævis opportune adhibenda sit, ut noscas, en regulas!

I. Si sit unica quantitas incognita, *vel ea in alterutro membro cum aliis cognitis constituit summam vel differentiam aliquam*, ut $a + x - b = c$, & tum utendum est transpositione. Vel *continetur in producto quopiam cum una pluribusve cognitis*, ut $ax + bx = cd$, & adhibenda est divisio. Vel *reperitur in fractione cum aliis cognitis*, velut $\frac{ax}{b} = cd$, aut $\frac{a + b}{x} = c$, & usum habet multiplicatio. Vel denique *incognita elevata est ad quandam potentiam*, ut $ax - xx = c$, & opus est extractione radicum.

II. Si habeantur plures quantitates incognitæ, ut problema solvi possit, necesse est, ut etiam plures æquationes idem problema exprimant, in quibus eædem incognitæ reperiantur; uti si ejusdem problematis sint hæ duæ æquationes $x - ay = b$, & $bx + cy = d$. Et tunc quidem substitutio necessaria est.

Ita-

Itaque in quovis casu accurate dispiciendum erit, cuinam e sequentibus quinque operationibus reipsa locus sit in æquatione proposita ad solvendum, ut valor incognitæ quantitatis reperiatur.

De Transpositione.

217. Transpositione terminus transfertur ex uno membro æquationis in alterum, servata utriusque membri æqualitate. Ut rite fiat, *terminus ille in membro, in quo occurrit, deleatur, & in altero cum signo contrario scribatur.*

Exemplum, ut transponatur quantitas ac in æquatione $ac + x = b$, ea omittenda in membro sinistro; sed in dextro ponenda cum signo contrario, nempe $-ac$, & fiet æquatio $x = b - ac$. Cum enim membrum $ac + x$ æquale sit alteri b, si ab utroque auferatur ac, residua erunt æqualia (17). Habebitur itaque $ac + x - ac = b - ac$, & reductione adhibita $x = b - ac$.

218. Coroll: I. *Quilibet igitur terminus per transpositionem potest ex negativo fieri positivus, & vicissim.*

219. II. *Ope transpositionis valor cujuslibet termini exprimi potest*, si scilicet cœteris transpositis is solus in altero æquationis membro relinquatur.

220. Observandum autem probe est, aliud nobis esse valorem alicujus termini exprimi; aliud, ejusdem valorem inveniri. Ut *valor alicujus termini, seu quantitatis literalis, exprimatur*, sufficit, si ea reperiatur sola in altero æquationis membro, ex quibuscunque membrum alterum quantitatibus componatur, seu cognitis, seu incognitis; at *ut valor inveniatur*, præterea necesse est, ut membrum alterum non nisi quantitates cognitas contineat (215).

De Divisione.

221. Per divisionem quantitates cognitæ ab incognitis, per quas multiplicatæ sunt, liberantur; seu universim factores alicujus producti a se invicem separantur. Hunc in finem igitur *omnes utriusque membri æquationis termini per quantitates cognitas, in quas ductæ sunt incognitæ, dividi debent*, seu in genere, *divisio omnium terminorum instituenda est per eos factores, a quibus alii separandi sunt.* Æqualitatem inter utrumque æquationis membrum non amitti, manifestum est (17).

Ut v. g. a quantitate b incognita separetur in æquatione $bx - ac = bd - cd$, omnia dividatur per b, nempe $\frac{bx}{b} - \frac{ac}{b} = \frac{bd}{b} - \frac{cd}{b}$; erit per reductionem $x - \frac{ac}{b} = d - \frac{cd}{b}$.

222. *Observa* I. Quando eadem litera in pluribus terminis quantitatis complexæ occurrit, ea cum summa aliarum literarum, seu coefficientium, qui reperiuntur in his terminis, tanquam factor, unicum productum constituit. Sic $ax - bx + 3x$ est factum ex $a - b + 3$ in x. Unde si x in æquatione $ax - bx + 3x = d$ liberari debeat a coefficientibus, faciendum est $x = \frac{d}{a - b + 3}$. Similiter ut in æquatione $ax - x = b$ separata habeatur quantitas x, fiat $x = \frac{b}{a - 1}$ quippe cum $ax - x$ sit productum ex $a - 1$ & x.

223. II. Quando eadem litera in singulis æquationis terminis reperitur, per eam tota æquatio dividenda est, quæ hac ratione simplicior evadet. v. g. ex

$a\,b$

$abb - bxx = bd$ fit $ab - xx = d$. Eodem modo $aac - aa = aabd$ divisione per aa reducitur ad $c - 1 = bd$.

De Multiplicatione.

224. Multiplicationis usus est, ut æquationes ab occurrentibus fractionibus liberentur. *Omnes igitur æquationis termini multiplicantur per factum ex denominatoribus fractionum, quæ tolli debent.* Æqualitatem per hanc operationem non turbari, patet (17). Sic $a + \frac{b}{x} = dx$ mutatur in $ax + b = dxx$, si nempe omnia ducantur in x; fit enim $ax + \frac{bx}{x} = dxx$, quæ reducitur ad $ax + b = dxx$.

Item æquatio $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} = abc - bcd$ liberatur a fractionibus, si omnes termini multiplicentur per bx, fit enim $\frac{abx}{x} + \frac{bxx}{b} = abbcx - bbcdx$, & adhibita reductione $ab + xx = abbcx - bbcdx$.

De extractione radicum, & æquationibus secundi gradus.

225. Quando quantitas incognita æquationis elevata est ad quadratum . . . . .

I. Advertendum est, an non sit vel multiplicata per aliam, vel cum alia fractionem constituat? Nam liberanda est ab alia quantitate, in primo quidem casu per divisionem; in altero per multiplicationem.

II. Attendendum, utrum quadratum incognitæ sit positivum, an negativum? si negativum sit, per transpositionem fieri debet positivum. Nullum enim qua-

quadratum esse potest negativum, cum $-xx$ sit factum ex $+x$ in $-x$, omne autem quadratum sit factum ex eadem quantitate in seipsam ducta; quare radix de $-xx$ nec esset $+x$, nec $-x$, si foret quadratum quantitatis realis.

III. Omnes termini, in quibus reperitur incognita, ad idem membrum æquationis ponendi sunt, reliquis, in quibus ea non habetur, ad alterum transpositis.

IV. Dispiciendum est, utrum hoc membrum contineat quadratum perfectum. Contingit autem hoc tantummodo, quando incognita reperitur in unico termino (uti si habeatur $xx = a - b$); quod si præter quadratum incognitæ adsit unus, pluresve termini, ex multiplicatione incognitæ per alias quantitates cognitas orti, (v. g. $xx - 2ax = b$), quadratum est incompletum, & propterea compleri debet *addendo utrique membro æquationis quadratum dimidiæ quantitatis cognitæ, per quam incognita est multiplicata.*

V. Extrahenda est radix quadrata ex utroque æquationis membro, quo facto valor incognitæ facile reperitur.

Exemplo sit æquatio $\frac{aa - xx}{b} = 2a - b$. *Primo* tollatur fractio; fiet $aa - xx = 2ab - bb$. *Secundo* fiat $-xx$ positivum transpositione, nempe $aa = xx + 2ab - bb$. *Tertio* ponatur xx solum ad unum membrum, ut sit $aa - 2ab + bb = xx$. *Quarto* quia xx solum habetur, quadratum est completum. *Quinto* extrahatur radix ex utrovis membro; obtinetur $a - b = x$.

Detur altera æquatio $a + 2xx = b$. Liberetur quadratum incognitæ a 2; erit $\frac{a}{2} + xx = \frac{b}{2}$. Transpositione collocetur quadratum incognitæ ad unum membrum, $xx = \frac{b-a}{2}$. Extrahatur radix, eritque $x = \sqrt{\frac{b-a}{2}}$.

Proponatur solvenda æquatio $ax - \frac{xx}{2} + dd = c$. Sublata fractione habetur $2ax - xx + 2dd = 2c$; & facta transpositione, ut quadratum incognitæ fiat positivum, omnesque termini, in quibus incognita continetur, sint in eodem membro æquationis soli, obtinetur $2dd - 2c = -2ax + xx$. Apparet autem illico, dextrum membrum non esse quadratum perfectum radicis binomiæ, cum non adsit, nisi quadratum xx secundæ partis radicis, cum facto ex x in $2a$, ut adeo facile intelligatur, $2a$ esse duplum primæ partis, ipsamque primam partem fore a, cujus quadratum, aa desit in hoc æquationis membro. Ut igitur compleatur quadratum, addendum est aa (nempe quadratum dimidii $2a$, quæ quantitas cognita multiplicat incognitam in termino $2ax$); & ne æqualitas tollatur, idem aa addi quoque debet membro alteri, ut æquatio fiat $aa + 2cdd - 2c = aa - 2ax + xx$, cujus radices sunt $\sqrt{aa + 2dd - 2c} = a - x$.

Sit ulterius æquatio $9abxx - 3bbx = ad$; in hac si liberetur quadratum incognitæ ope divisionis ab aliis, fit $xx - \frac{bx}{3a} = \frac{d}{9b}$, & addito utrique membro quadrato de $\frac{b}{6a}$ (quod est dimidium factoris $\frac{b}{3a}$, per quem

quem multiplicata eſt incognita x in ſecundo termino), nempe $\frac{bb}{36aa}$, completur quadratum membri 1mi

$$xx - \frac{bx}{3a} + \frac{bb}{36aa} = \frac{d}{9b} + \frac{bb}{36aa}$$: & extracta radice habetur $\frac{b}{6a} - x = \sqrt{\frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}}$.

Sic quoque æquatio $x - xx = a$ mutatur in $-a = xx - x$, quæ completa fit $\frac{1}{4} - a = xx - x + \frac{1}{4}$ (nam $-x$ habetur pro facto ex x in -1), extracta radice $\sqrt{\frac{1}{4} - a} = x - \frac{1}{2}$.

Si compleatur æquatio $xx + ax - x = aa$, abit in hanc $xx + ax - x + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$, cujus radix eſt - - - - - - - -

$$x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5aa - 2a + 1}}{2}.$$

226. *Obſerva.* Si quantitas incognita æquationis affecta ſit ſigno $\sqrt{}$, ut ſi ponatur $a - \sqrt{x} = b$, ut ab eodem liberetur, neceſſe eſt, ut primo transponatur ſola ad unum æquationis membrum, dein ut omiſſo hoc ſigno, alterum membrum elevetur ad quadratum. Unde in propoſito exemplo prius fieri debet $a - b = \sqrt{x}$, tum vero $aa - 2ab + bb = x$. Eodem modo æquatio $ax - \sqrt{x} = b$, ab initio reducenda eſt ad hanc $aaxx - 2abx + bb = x$. At ſi haberetur $xx + \sqrt{x} = b$, æquatio evaderet quarti gradus; fieret enim $x = bb - 2bxx + x^4$.

De Subſtitutione.

227. Suſtitutio eſt ea operatio, qua una, plures-

resve quantitates incognitæ, quæ in pluribus ejusdem problematis æquationibus occurrunt, tolluntur.

Exempli caufa dentur æquationes $ax + y = b$, & $x + by = a$, in quarum utravis duæ funt incognitæ x & y, quarum alterutra, v. g. y, tolli poteft, fi ope transpofitionis exprimatur valor quantitatis y in prima æquatione (219), & ea expreffio pro y in fecunda fubftituatur. Transponatur enim in prima æquatione ax, habebitur $y = b - ax$, hæc expreffio $b - ax$ adhibeatur in æquatione altera loco y, & quoniam multiplicata eft per b, ducatur pariter $b - ax$ in b; eritque $bb - abx = by$; unde facta fubftitutione fecunda æquatio abit in hanc $x + bb - abx = a$, in qua quantitas y non amplius reperitur.

Si libuiffet ex fecunda æquatione tollere quantitatem x, ejus expreffio in prima æquatione quæri debuiffet, transpofita quantitate $+ y$, ut nempe fuiffet $ax = b - y$, dein omnibus terminis per a divifis; tunc enim expreffio valoris quantitatis x fuiffet obtenta, scilicet $x = \frac{b-y}{a}$. Quod fi jam loco x fubftituta fuiffet expreffio $\frac{b-y}{a}$ in æquatione altera, ea abiviffet in $\frac{b-y}{a} + by = a$, in qua deeft quantitas x.

Dentur tres æquationes, $x + y + z = a$, $x + y - z = b$, $x - y + z = c$; poterunt binæ incognitæ ex fingulis tolli hunc in modum. Accipiatur in prima æquatione valor quantitatis x; qui erit (217) $x = a - y - z$; fubftituatur $a - y - z$ in duabus aliis æquationibus pro x; fient eæ $a - y - z + y - z = b$, & $a - y - z$

$-z-y+z=c$, seu adhibita reductione, $a-2z=b$, & $a-2y=c$, in quibus singulis unica tantum occurrit incognita. Quod si jam ex prima æquatione tollendæ sint y & z, ut sola incognita x remaneat; quæratur ex æquationibus nunc inventis expressio valoris y, & z; fiet enim transpositione imprimis $a-b=2z$, & $a-c=2y$; dein divisione per 2 obtinebitur $\frac{a-b}{2}=z$, ac $\frac{a-c}{2}=y$; substituantur hæ expressiones in prima æquatione pro y & z, acquiretur nova æquatio $x+\frac{a-c}{2}+\frac{a-b}{2}=a$.

De Resolutione Analytica Problematum.

228. Quando problema solvendum proponitur, ante omnia status quæstionis debita cum attentione expendatur, ut singulæ conditiones a singulis, ut nota ab ignotis rite distingvantur. Dein expressione utendum est generali, & non ad certam magnitudinum speciem restricta, id, quod literis obtinetur, quarum is tantum numerus adhibendus, quem necessitas exigit. Unde quantitates æquales, vel æqualium partes non sunt repræsentandæ per literas diversas, sed per easdem omnino, adhibitis solummodo denominatoribus, vel coefficientibus, si necesse sit. Denique singulæ conditiones problemati annexæ per singulas æquationes sunt exprimendæ. Atque ut solutio completa habeatur, tot necessariæ sunt æquationes, quot sunt quantitates incognitæ, quarum singularum valor per regulas superiores inveniendus est. Nos rem exemplis nonnullis declarabimus.

229. Exemplum I. *Parens quispiam id ætatis habet filium, ut si utriusque ætas jungatur, annos efficiat* 100; *fi-*

li-

lius autem 30 annis parente eſt junior. Quæritur ætas ſingulorum.

Ad quæſtionem iſtam ſi advertatur, duæ occurrunt quantitates datæ, nempe 100, & 30; duæ item incognitæ, ætas parentis, & ætas filii. Conditiones binæ ſunt additæ, altera, quod ſumma annorum ætatis utriusque ſit 100; altera, quod differentia ſit 30. Utraque ergo conditio per ſuam æquationem ſeparatim exprimenda eſt. Ponatur jam $100 = a$, $30 = b$, ætas Parentis $= x$, ætas filii $= y$, & reducatur problema ad hanc generalem quæſtionem: *datis ſumma & differentia duarum quantitatum, invenire ſingulas quantitates;* exprimatur vero in hunc modum:

Problematis enunciatio.	Problematis expressio algebraica.
Quæritur utriusque ætas - - - - -	x, y?
quæ junctim faciat ſummam $100 = a$	$x + y = a$
& habeat differentiam $30 = b$ - - -	$x - y = b$

Duæ itaque habentur æquationes $x + y = a$, & $x - y = b$, in quarum ſingulis duæ ſunt incognitæ, ac propterea per ſubſtitutionem valor alterutrius quærendus, v. g. quantitatis y: cum enim ſit $x + y = a$, erit (217) $x = a - y$; & ſi $a - y$ loco x in ſecunda æquatione adhibeatur, ea evadit $a - y - y = b$, ſive (136) $a - 2y = b$ & per transpoſitionem (217) $a - b = 2y$, tandem per diviſionem (221) reperitur $\frac{a - b}{2} = y$, ac quæſtio facile ſolvitur.

Eadem operandi ratione ſublata incognita y, quæri poteſt valor alterius x, qui erit $x = \frac{a + b}{2}$.

Quare problematis ſolutio adæquata habetur. Si enim pro a & b ſubſtituantur 100 & 30, fiet $x = \frac{100 + 30}{2}$ $= \frac{130}{2} = 65$; $y = \frac{100 - 30}{2} = \frac{70}{2} = 35$. Eſt igitur ætas Parentis 65 anni; filii 35.

230. Quoniam quæſtio particularis propoſita reducta fuit ad problema generale, ſequitur per æquationes $x = \frac{a+b}{2}$, & $y = \frac{a-b}{2}$ haberi ſolutionem itidem generalem. Nam cum per literas numeri quicunq; deſignari poſſint, evidens eſt, quod quotiescunque duarum quantitatum x & y ſumma a, & differentia b datur, utraque inveniri poſſit, & quidem quod major, quam x repræſentat, ſemper æqualis ſit ſemiſummæ quantitatum datarum a & b; minor vero per y indicata, earundem ſemidifferentiæ.

231. Æquationes, per quas habentur ſolutiones generales problematum, dicuntur *formulæ*, cum methodum univerſalem exhibeant, ſolvendi omnia problemata poſſibilia, quæ easdem cum propoſito conditiones habent. Proponatur exempli loco hæc quæſtio: *Petrus & Joannes erogarunt* 14 *ſolidos in pauperes; Petrus* 4 *ſolidis plures dedit, quam Joannes: quæritur, quot dederint ſinguli?*

Manifeſtum eſt, hujus problematis conditiones nihil differre ab iis, quas præcedens annexas habuit, cum eodem modo quærantur duæ quantitates, quarum ſumma 14, & differentia 4 dantur. Unde ſolidi eleemoſynæ nomine a Petro dati exhibentur per x, quos donavit Joannes, per y; ſumma 14 per a, differenferentia 4 per b; quibus positis reperitur $x = \frac{a+b}{2}$

$= \frac{14+4}{2} = 9$, & $y = \frac{a-b}{2} = \frac{14-4}{2} = 5$. Donavit igitur Petrus 9, Joannes 5 solidos.

232. *Formula verbis enunciata semper suppeditat regulam generalem.* v. g. Si formulæ $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$, seu $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, enuncientur, habetur regula generalis: *data summa & differentia duarum quantitatum incognitarum, ut inveniatur major, semisummæ addatur semidifferentia; ut reperiatur minor, semidifferentia a semisumma auferatur.*

Jllud quoque patet, *formulam semper posse forma theorematis enunciari.* Nam superiorum formularum enunciatio hunc in modum fieri potest: *duarum quantitatum, inæqualium inter se, major æquatur earum semisummæ plus semidifferentia; minor vero semisummæ minus semidifferentia.* Atque hunc in modum resolutis analytice particularibus problematis, affectiones generales magnitudinum deteguntur.

Quæ ad quæstionem propositam pertinebant, singula minutim explicuimus, ut ex hoc exemplo intelligatur, quæ in Problematum resolutione spectari debeant. Jn iis, quæ sequentur, brevitati magis consulemus.

Exemplum II. *Petrus & Joannes, cum simul haberent* 36 *libras, lusu perdiderunt* 10 *libras: & Petrus quidem perdidit partem tertiam suæ pecuniæ, Joannes vero quintam. Quæritur, quantum quisque & ante lusum habuerit, & per lusum amiserit?*

Quæstio proposita videri potest quatuor quantitates incognitas involvere, cum tamen reipsa tantum duæ ſint, quæ quærantur. Ubi enim conſtiterit, quantum pecuniæ Petrus habuerit ante luſum, tertia illius pars in luſu amiſſa jam non poterit ignorari; quare iſta quantitatem novam incognitam non conſtituit. Idem cenſendum de parte quinta a Joanne perdita. Unde illud hic loci obſervari meretur . - .

233. *Numerum quantitatum incognitarum non dependere a numero quæſitorum in problemate; ſed antequam hic ſtatuatur, videndum eſſe, an non ſolutio unius quæſiti ſuppeditet etiam ſolutionem alterius?*

Quæſtio verbis expreſſa.	Quæſtio algebraice propoſita.
Quæruntur duæ quantitates - - -	x, y?
quarum ſumma ſit 36, ſive a	$x + y = a$
Et pars tertia primæ cum parte quinta ſecundæ efficiat 10, ſeu b	$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = b$

Liberetur imprimis æquatio ſecunda a fractionibus (221), ut fiat $5x + 3y = 15b$, & ſi ex 1ma æquatione accipiatur valor de $x = a - y$ (217), & in æquatione $5x + 3y = 15b$ ſubſtituatur, habebitur $5a - 5y + 3y = 15b$; reducendo, & transponendo erit $2y = 5a - 15b$; dividendo denique (221) $y = \frac{5a - 15b}{2}$, ex qua æquatione ſolutio problematis habetur. Adhibitis enim ſubſtitutionibus, quas hæc formula poſcit, invenitur $y = 15$ lib. Unde Joannes ante luſum habuit 15 lib:, quarum 3 perdidit, partem nempe quintam ex 15. Petrus conſequenter ante luſum habere debuit 21, cum $15 + 21 = 36$, & 7 perdidiſſe, quæ ſunt tertia pars de 21. Quod ſi quis etiam formulam pro x deſideret, ſublata y facile reperiet $x = \frac{15b - 3a}{2}$.

Exem-

Exemplum III. *Parens quispiam hunc in modum filios suos hæredes scribit, ut natu maximo obtingant* 1000 *floreni cum sexta parte reliquæ totius massæ, alteri ætate proxime inferiori tribuantur* 2000 *floreni cum parte sexta residui, filius tertius* 3000 *florenos, & residuæ pecuniæ partem itidem sextam habeat, & sic singulis deinceps totidem obveniant florenorum milla cum sexta residui parte, quotus quisque ordine successerit: natu demum minimo id remaneat, quod fratrum portionibus ablatis superfuerit. Postquam hæreditas distributa est, constitit, omnes in partes æquas successisse. Quæritur, quot fuerint filii? quantum quisque acquisierit? quæ fuerit totius hæreditatis summa?*

Etsi primum videri possit alicui, tres hic esse quantitates incognitas, attamen si quæstio rite perpendatur, unica deprehendetur, nempe summa hæreditatis. Ubi enim hæc cognita fuerit, tantum opus est, ut ab ea demantur 1000 floreni, qui cum sexta residui parte efficient eam portionem, quæ singulis obtigit: quare si per hanc portionem dividatur summa totius hæreditatis, invenietur numerus partium æqualium, in quas distributa est, hoc est, numerus filiorum.

Sit igitur tota summa $= x$, 1000 floreni $= a$; manifestum est, tributis natu maximo 1000 fl. residuum fuisse $x - a$; hujus porro pars sexta, nempe $\frac{x - a}{6}$ addenda fuit; quare portio, quæ filio natu maximo obtigit, est $a + \frac{x-a}{6}$, seu reductione ad eundem denominatorem (80) $\frac{5a+x}{6}$. Dematur jam hæc portio

pri-

primi ex tota ſumma; relinquetur $x - \frac{5a-x}{6}$: ex hoc pro ſecundo filio auferantur imprimis $2a$; ſupererit $x - \frac{5a-x}{6} - 2a$, ſive $\frac{5x-17a}{6}$, dein hujus pars ſexta, ſcilicet $\frac{5x-17a}{36}$, addatur ad $2a$, habebitur portio ſecundi filii $2a + \frac{5x-17a}{36}$ ſeu $\frac{55a+5x}{36}$.

Quoniam autem peracta diſtributione ſingulis obtigerunt partes æquales, jam habetur æquatio $\frac{5a+x}{6} = \frac{55a+5x}{36}$: hinc ſublatis fractionibus, per transpoſitionem & reductionem, invenitur $6x = 150a$, & utroque membro per 6 diviſo, $x = 25a$.

Erat itaque tota hæreditas 25×1000, ſeu 25000 flor: portio ſingulorum 5000 floren: numerus filiorum 5.

Exemplum IV. *Invenire numerum, cujus quadruplum ab ejus quadrato ablatum relinquit* 21.

Æquatio eſt $xx - 4x = 21$, ſeu generice $xx - bx = a$. Ex iis, quae de extractione radicum diximus, facile apparet, æquationem hanc, ſi compleatur, fore $xx - bx + \frac{1}{4}bb = a + \frac{1}{4}bb$, conſequenter $x - \frac{1}{2}b = \sqrt{a + \frac{1}{4}bb}$; & ſubſtitutis 4 & 21 pro b & a, $x - 2 = \sqrt{21 + 4} = \sqrt{25}$; adeoque $x - 2 = 5$, & $x = 7$.

234. *Obſerva* I. Problema poſtremo loco poſitum, eſt ſecundi gradus, cum quantitas incognita elevata ſit ad quadratum. Horum autem problematum duplex ſemper eſt ſolutio; & univerſim, *quodvis problema*

ma determinatum tot habet solutiones, quot exponens potentiæ maximæ quantitatis incognitæ unitates.

Et, quod ad problemata secundi gradus, ratio est, quod omne quadratum duas habeat radices; exempli gratia radices quadrati xx sunt x & $-x$. Quando in præsente problemate extracta fuit radix, adhiberi etiam potuisset $-x + \frac{1}{2}b = \sqrt{a + \frac{1}{4}bb}$, unde fuisset $-x + 2 = 5$, & $x = -3$, quo pacto etiam problemati satis fit, cum quadruplum de -3, nempe -12, subtractum ex quadrato de -3, seu 9, relinquat $9 + 12 = 21$.

Simili ratione si quærantur duo numeri, quorum summa sit $= 17$ sive a, factum autem $= 60$ seu b, reperietur $x = 5$, & $y = 12$, ex æquationibus nempe $x + y = a$, $xy = b$; at simul invenietur $x = 12$, & $y = 5$. Est vero evidens, conditiones problematis impleri, seu sumatur $x = 12$ & $y = 5$; seu $x = 5$, & $y = 12$; quare sequitur, *omne problema, in quo arbitrarie hæc vel illa e duabus quantitatibus incognitis pro majore vel pro minore assumi potest, admittere duplicem solutionem, ideoque esse secundi gradus.*

235. II. Problema, in quo quantitates incognitæ unâ plures sunt, quam conditiones, dicitur *indeterminatum*; quod si numerus incognitarum numerum conditionum adhuc magis excedat, problema vocatur *plusquam indeterminatum*. In problematis indeterminatis ope regularum superius expositarum quantitates incognitæ non plures tolli possunt, quam ut in singulis æquationibus ad duas reducantur; quo facto necesse est, ut alterutrius valor assumatur, alterius vero ex assumto, & conditionibus problemati adjectis determinetur; ut adeo tot esse possint solutiones di-

versæ, quot diversi valores unius quantitatis incognitæ assumi possunt.

Exemplo sit problema: *invenire tres numeros* x, y, *&* z, *qui eandem habeant inter se differentiam, & simul sumti summam constituant* 105.

Conditiones hujus problematis non nisi per duas æquationes exhiberi possunt, scilicet $x + y + z = 105$, & $x - y = y - z$; quod si in secunda æquatione fiat $x = 2y - z$, & hic valor quantitatis x substituatur in prima, reperietur $y = 35$, & hinc $x + 35 + z = 105$, unde obtingit æquatio $x + z = 70$, ex qua nec quantitas x, nec z eliminari potest. Est itaque assumendus aliquis valor alterutrius, velut primæ x, ut z determinetur, ponendo v. g. $x = 10$; eritque $z = 60$, & numeri 10, 35 & 60 satisfacient problemati. At si ponatur $x = 12$, habetur $z = 58$, & numeri 12, 35, 58 aliam solutionem suppeditant.

Quin apparet etiam, problema præsens habere 69 solutiones in numeris integris & positivis, cum pro x omnes numeri ab 1 usque ad 69 successive substitui possint; at vero non plures, quod summa binarum incognitarum x & z reperta sit 70. Verum si assumatur pro x numerus quivis infra 70 cum fractione qualibet arbitraria, solutiones infinitæ erunt.

236. III. In problematis indeterminatis primi gradus, valor incognitæ unius est arbitrarius, modo ne ipse status quæstionis aliquos valores, qui alias assumi possent, excludat, v. g. Si quærendus esset numerus rerum, quæ divisionem non admittunt, adeoque per fractiones haberi nequeunt, uti hominum, equorum &c. Verum si in problematis secundi gradus determinari debeat valor incognitæ ad quadratum elevatæ, pro altera incognita talis assumen-

mendus est valor, ut quadratum alterius $\bar{n}$ fiat negativum: foret enim ejusmodi quadrati radix quantitas impossibilis.

Sic in æquatione $xx + y = b$ nequit quantitati y tribui valor major, quam b; secus enim fieret quadratum xx negativum, & impossibile (225).

237. Radices potentiarum impossibilium vocantur *radices imaginariæ*. Ita $\sqrt{-xx}$ est radix imaginaria. Et hinc dum ostenditur, omnes radices alicujus æquationis esse imaginarias, demonstratur, problema esse impossibile; *totidem vero casus impossibiles in problemate involvi, quot radices imaginarias ejus æquatio continet.*

His subjungimus problemata nonnulla, in quibus tiro exerceri possit.

I. *Petrus Parisios veniens, primo die expendit partem tertiam suæ pecuniæ; die altero partem quartam; die denique tertio partem quintam, ut ei solum remanerent* 26 *libræ. Quæritur, quantum pecuniæ secum Parisios attulerit?*

II. *Aurifaber emit vice quadam massam compositam ex* 3 *unciis auri, &* 5 *unciis argenti pretio* 318 *librarum, altera vice vero pro massa* 5 *unciarum auri, &* 7 *unciarum argenti dedit* 522 *libras. Quæritur valor unciæ auri, & unius unciæ argenti?*

III. *Petrus, Jacobus, & Joannes amiserunt in lusu omnem suam pecuniam. Petrus & Jacobus simul perdiderunt* 10 *libras, Petrus & Joannes simul* 11 *libras; denique Jacobus & Joannes simul* 9 *libras. Quæritur, quantum amiserint singuli?*

IV. *Asina clitellis onerata dicebat mulæ sociæ: si unus e saccis, quos ego porto, tibi imponeretur, onus utriusque æquale foret; at si e tuis unus adderetur mihi, meum onus foret duplum tui.*

V. *Cum Petrus & Joannes tantundem pecuniæ ad lu-*

ſum attuliſſent, Petro amiſſis 12 *libris quadruplo plus remanſit, quam Joanni, perditis* 57 *libris. Quæritur, quantum quisque ad luſum attulerit?*

VI. *Interrogatus quispiam, quot florenos haberet? reſpondit: ſi ad dimidium addas partem tertiam, & quartam, ſumma excedet numerum florenorum, quos habeo, unitate.*

VII. *Mercator aliquis emit tres equos; pretium primi cum dimidio pretio reliquorum duorum ſunt* 25 *aurei; pretium ſecundi cum parte tertia pretii aliorum duorum, ſunt aurei* 26: *denique tertii pretium cum dimidio pretio equorum reliquorum, ſunt* 29 *aurei. Quæritur ſingulorum equorum pretium?*

VIII. *Operarius quidam habet in ſuo peculio* 6 *libras, quibus addit mercedem* 5 *ſeptimanarum: ex hac ſumma ei poſt duas ſeptimanas remanet quarta pars; verum ubi huic quartæ parti adjungit mercedem duarum ſeptimanarum, reperit ſe habere* 21 *libras.*

De natura, & proprietatibus generalibus æquationum diverſorum graduum.

238. Ut regulæ ſolutionis æquationum omnium graduum commodius conſtituantur, moris eſt, omnes terminos in primo æquationis membro collocare, poſito in altero membro 0; & termini quidem in primo membro eo ordine disponuntur, quo exponentes potentiarum quantitatis incognitæ decreſcunt: atque id intelligitur, dum *ordinare æquationem* dicitur. Unde hunc in modum ſcribenda eſt æquatio quarti gradus ... $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x - 258 = 0$.

Æquatio *completa*, ſeu in *qua adſunt omnes termini*, ea vocatur, in qua exponentes potentiarum quantitatis incognitæ ordine numerorum naturalium ſine interruptione decreſcunt, & præterea adeſt terminus ex meris quantitatibus cognitis compoſitus, cujusmodi eſt æquatio paulo ante allata.

Hinc ſequitur, in æquatione completa terminorum numerum debere unitate excedere exponentem potentiæ maximæ incognitæ; v. g. in æquatione quarti gradus eſſe quinque terminos.

239.

239. Termini cujuslibet denominatio desumitur a loco, quem in æquatione completa, & ordinata occupat. Sic dicitur *primus terminus* is, in quo quantitas incognita elevata est ad maximam potentiam; *secundus terminus*, in quo incognitæ exponens unitate est minor; *terminus tertius*, ubi exponens rursus unitate decrescit &c; *terminus ultimus* denique, in quo quantitas incognita non amplius reperitur; adeo, ut si series exponentium incognitæ ordine naturali decrescentium interrumpatur, dicantur illi termini in æquatione incompleta deficere, qui in æquatione completa adessent in illis locis, ubi series interrumpitur. Exempli causa æquatio $x^5 - x^3 + xx - b = 0$, est incompleta, in qua termini secundus, & quintus deficiunt.

240 Deinceps supponemus *1mo*, terminum primum æquationis compositæ non esse multiplicatum per quantitatem quampiam cognitam, aut eum ab ejusmodi coefficiente ope divisionis esse liberatum. *2do* Æquationem compositam, esse factum e tot æquationibus primi gradus, quot exponens maximæ potentiæ quantitatis incognitæ habet unitates. Ut si ponatur $x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, & hæ tres æquationes in se invicem ducantur, habebitur $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$. Atque hinc pro theoria generali æquationum cujuscunque gradus possunt formulæ algebraicæ construi, in quibus quantitati x diversi valores tribuantur, prout signa diversimode inter se combinari possunt.

Exempli gratia pro tribus diversis valoribus quantitatis incognitæ combinationes signorum fieri possunt, ut vel omnes tres valores sint positivi, vel omnes tres negativi; vel unus positivus cum duobus negativis; vel denique duo positivi, & unus negativus. Ex his vero combinationibus orientur quatuor formulæ pro omnibus æquationibus tertii gradus, nempe...

$$\left.\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x - c = 0 \end{array}\right| x^3 - xx(a+b+c) + x(ab+ac+bc) - abc = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + a = 0 \\ x + b = 0 \\ x + c = 0 \end{array}\right| x^3 - xx(-a-b-c) + x(ab+ac+bc) + abc = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-a=0 \\ x-b=0 \\ x+c=0 \end{array}\right| x^3-xx(a+b-c)+x(ab-ac-bc)+abc=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{array}\right| x^3-xx(a-b-c)+x(-ab-ac+bc)-abc=0.$$

Jd genus formulas etiam pro omnibus casibus æquationum quarti, quinti &c graduum constructas interim supponimus. Quod si eas attente consideremus, animadvertemus, *hasce necessarias consecutiones e constructione æquationum, quæ e facto diversorum valorum realium* (non imaginariorum) *ejusdem quantitatis incognitæ oriuntur, deduci.*

241. THEOREMA I. *Gradus cujusvis æquationis exprimitur numero valorum quantitatis incognitæ.* Et quoniam æquatio algebraica est formula continens proprietatem generalem magnitudinis alicujus (231, 232), sequitur, *cujusvis æquationis esse tot radices, quot unitates sunt in numero gradum æquationis definiente.*

242. THEOREMA II. *Coefficiens secundi termini æqualis est summæ radicum æquationis: coefficiens termini tertii æquatur summæ factorum ex binis quibusvis radicibus, coefficiens termini quarti est summa factorum ex ternis radicibus &c; Terminus ultimus est factum ex omnibus radicibus.* Dicimus autem hic *coefficientem* eam quantitatem cognitam, quæ signis parentheseos continetur, atque per incognitam cujusvis termini multiplicatur.

243. THEOREMA III. *Quando in æquatione ordinata, & completa, termini alterni afficiuntur signis contrariis, omnes radices sunt positivæ: dum eodem omnes notantur signo, radices sunt omnes negativæ. Universe tot sunt æquationis radices positivæ, quot signorum permutationes occurrunt, si quisque terminus cum sequente comparetur; & tot radices negativæ, quoties idem signum in binis terminis contiguis recurrit.*

244. THEOREMA IV. *Quando in æquatione summa radicum sit æqualis* o, aut *si summa radicum positivarum æquatur summæ radicum negativarum; secundus terminus debet deficere.* Quæcunque enim quantitas ducatur in zerum, semper factum est = o. Et universim *si in æquatione deficiat aliquis terminus, radi-*

radices non poſſunt idem omnes ſignum habere. Etenim cum coefficiens oriatur ex ſummâ plurium factorum, non aliter fieri poteſt, ut evaneſcat, niſi ſi per negativa elidantur poſitiva; ad hoc autem requiritur, ut quantitates, ex quibus ea facta naſcuntur, habeant ſigna contraria.

245. Theorema V. *In æquatione, cujus ſecundus terminus eſt negativus, ſumma radicum poſitivarum excedit ſummam negativarum; ſi ſecundus terminus ſit poſitivus; ſumma radicum negativarum excedit ſummam poſitivarum.*

246. Theorema VI. *Si numerus radicum poſitivarum æquationis eſt par, terminus ultimus eſt poſitivus; ſi vero is numerus impar eſt, terminus ultimus eſt negativus, & viciſſim.*

247. Theorema VII. *Æquatio, in qua terminus ultimus deeſt, eſt gradus proxime inferioris, quam indicet exponens potentiæ maximæ quantitatis incognitæ.* Tum enim incognita in omnibus terminis reperta ope diviſionis (223) tolli poteſt, quo fiet, ut quisque terminus ad gradum inferiorem deprimatur. Sic æquatio $x^3 - ax^2 + bx = 0$ non eſt reipsa, niſi ſecundi gradus, cum ſinguli ejus termini exacte poſſint per x dividi, & æquatio reduci ad hanc $xx - ax + b = 0$.

248 Theorema VIII. *Si in æquatione pro incognita ſubſtituatur aliquis ejus valor, tota æquatio reducitur ad* 0. Exempli cauſa, ſi in prima formula (240) adhibeatur a^3, a^2, a loco x^3, x^2, x, ea fiet $a^3 - aa(a+b+c) + a(ab+ac+bc) - abc = 0$, & reductione facta habebitur $a^3 - a^3 - aab - aac + aab + aac + abc - abc$.

Coroll: *Quantitas incognita æquivalet indifferenter ſingulis æquationis radicibus.* Verum itaque alicujus radicis valorem inventum eſſe, ex eo cognosci poteſt, ſi eo valore pro quantitate incognita ſubſtituto tota æquatio reducitur ad 0.

De Æquationibus habentibus Radices imaginarias.

249. Manifeſtum eſt, radices quadratas quantitatis a eſſe $+\sqrt{a}$, & $-\sqrt{a}$, quarum factum $+\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -a$, uti productum ex $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, aut $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a}$ eſt $= a$. Ob eandem cauſam radices de $-a$ debent eſſe quantitates imaginariæ $+\sqrt{-a}$, & $-\sqrt{-a}$, ita ut factum ex - - - $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ ſit $= +a$, & factum ex $+\sqrt{-a}$ $\times +$

$\times+\sqrt{-a}$, vel $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}$ fit $=-a$. Ex quo universe intelligitur, *factum e quantitatibus imaginariis posse haberi sub forma quantitatis realis, ac propterea in æquatione composita posse dari radices imaginarias*. In præsens sermo nobis tantum est de iis quantitatibus imaginariis, quæ per radices quadratas quantitatum negativarum exprimuntur, ut quæ solæ sint, quarum usus est in æquationibus cujusvis gradus.

Jam autem in multiplicatione id genus radicalium signum radicale non tollitur; nisi binæ semper ejusmodi in se se ducantur, quæ easdem quantitates habent sub signo radicali. Sic $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-a$; at vero $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=a\sqrt{-a}$; & rursus $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=aa$; sed $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}\times-\ldots\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-aa\sqrt{-a}$ &c. Eodem modo est $\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$; $\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}=ab$; item $\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}=ab\sqrt{a}$ &c. *Itaque patet, factum e radicalibus imaginariis non posse exhiberi per quantitatem realem, nisi illæ numero pari inter se multiplicatæ sint.*

Unde dum in polynomio occurrit terminus, qui sit quantitas radicalis imaginaria, ut $x-a-\sqrt{-b}$, signum radicale tolli potest, dummodo polynomium hujusmodi ducatur in alterum, quod ab eo non nisi signo $+$ vel $-$ quantitati radicali præfixo differat. Ex hoc vero liquet, non nisi multiplicatione polynomii $x-a-\sqrt{-b}$ per $x-a+\sqrt{-b}$ signum radicale auferri posse existente facto $xx-2ax+aa+b$: etenim in nullo alio casu facta particularia quantitatis imaginariæ in terminos reales sese ob signorum contrarietatem mutuo elidunt. Illud etiam manifestum est, terminum b, qui est factum ex binis radicalibus $+\sqrt{-b}\times-\sqrt{-b}$, esse in hoc eodem casu necessario positivum. His positis. . . .

250. THEOREMA IX. *Radices imaginariæ, si quæ sunt in æquatione, semper sunt numero pari.*

251. THEOREMA X. *Si accipiantur quævis binæ radices imaginariæ alicujus æquationis, sub signo radicali eandem quantitatem habent, nec differunt, nisi signo $+$ vel $-$.*

252.

252. THEOREMA XI. *Quævis æquatio gradus imparis, saltem unam radicem realem habet.*

253. THEOREMA XII. *Quævis æquatio gradus paris ordinata, si ultimum terminum habet negativum, saltem unam radicem realem habet.* Nam factum reale radicalium imaginariorum, quæ sunt partes duorum polynomiorum in se se invicem ductorum, non potest esse, nisi quantitas positiva (249).

De reductione & transformatione Æquationum.

254. Ut operationes in æquationibus commodius instituantur, ad formulas, quantum fieri potest, simplicissimas reducuntur; uti formula prima generalis æquationum tertii gradus (240) reducitur ad sequentem, $x^3 - pxx + qx - r = 0$, posito scilicet $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$.

Porro facile intelligitur, posse quamvis æquationem datam *transformari* in aliam ejusdem gradus, in qua quantitas incognita æquationis datæ mutata sit alia quavis quantitate cognita, hoc est, in qua vel aucta, vel imminuta sit quavis data quantitate f; vel vero in qua incognita æquationis datæ sit multiplicata, vel divisa quantitate data f; vel denique ad cujus incognitam quantitas incognita æquationis datæ habeat rationem datam f ad g, seu dein f sit quantitas cognita aut determinata, seu sit incognita aut indeterminata. Hujusmodi enim ut transformatio fiat, satis est, si pro singulis id genus mutationibus ponatur $y + f = x$, vel $y - f = x$, vel $yf = x$, vel $\frac{y}{f} = x$ vel $\frac{fy}{g} = x$, atque valor assumtus substituatur. V. g. si fiat $y + f = x$ loco x^3 adhibeatur cubus quantitatis $y + f$; loco pxx factum ex p in quadratum de $y + f$: & pro qx accipiatur q in $y + f$ ductum. Ubi nova æquatio ordinata fuerit, reperietur $y^3 + yy(3f - p) + y(3ff - 3pf + q) + f^3 - pff + qf - r = 0$.

255. Patet hinc, quod si fuisset positum $f = \frac{1}{3}p$, 2dus terminus in nova æquatione evanesceret; esset enim $3f - p = 0$. Hæc observatio si applicetur formulis generalibus quascunque æquationes repræsentantibus, sequentem suppeditat regulam: *posse ex quavis æquatione tolli secundum terminum, si in aliam transforme-*

metur, in qua quantitas incognita augeatur, vel minuatur coefficiente secundi termini æquationis datæ per exponentem maximæ potentiæ ejusdem incognitæ diviso, prout scilicet secundus terminus æquationis datæ vel negativus, vel positivus fuerit.

Posset quidem ex eadem observatione inveniri nova æquatio, in qua tertius, quartus, vel quintus &c. terminus deficeret; verum ut reperiretur quantitas incognitæ y jungenda, solvi prius deberet alia æquatio secundi, tertii, quarti &c gradus. Etenim ex tertio novæ æquationis termino $y\ (3ff - 2pf + q)$ valor quantitatis f acquiri nequit, nisi æquatio secundi gradus $3ff - 2pf + q = 0$ solvatur.

Quomodo Æquationes compositæ in numeris solvendæ.

Maxima difficultas, quæ in resolutione problematum, quorum æquationes ad altiores gradus elevatæ sunt, occurrit, est, ut extrahantur radices sive algebraice, sive in numeris; hoc est, ut inveniantur singuli valores quantitatis incognitæ seu per formulam aliquam particularem algebraicam, seu in numeris. Et licet hac in re maxime occupetur algebra, nobis tamen fusioribus esse non licet, tum quod theoria ex tot inventis præsentem materiam spectantibus sit admodum intricata, tum etiam quod plures excogitatæ sint methodi, quam præfixa nobis brevitate complecti possimus. Unde de his alii libri Algebraici consuli poterunt, uti *Analysis demonstrata* P. Reynau, *Arithmetica universalis* Newtoni cum suo commentario &c.

Nobis in præsens satis fuerit duas afferre methodos, quibus radices æquationum cujusvis gradus in numeris reperiri possint: prior locum non habet, nisi dum radices reales sunt numeri integri; altera adhibenda est, quando his numeris junctæ sunt fractiones.

256. I. METHODUS. Primo: *quærantur omnes divisores ultimi termini æquationis* (156). Si radices reales sint numeri integri, necesse est, ut inter hos divisores sint, cum ultimus terminus (242) nihil sit aliud, quam factum ex omnibus radicibus. Et quoniam substituto radicis valore pro quantitate incognita tota æquatio reducitur ad o (248), *divisores inventi substituantur successive pro incognita, donec tota æquatio reducatur ad* o: *erit numerus, cujus substitutione æquatio evasit æqualis* o, *una e radicibus quæsitis.*

Pro-

Proponatur exempli causa æquatio $x^4 - 8x^3 + 15xx - 24x + 36 = 0$. Divisores ultimi termini 36 sunt 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36, -36. His numeris aliis post alios substitutis loco x, invenitur radix 2, cum æquatio fiat $16 - 64 + 60 - 48 + 36 = 0$.

Secundo: *Dividatur æquatio data, per æquationem simplicem, quæ sit ex radice jam inventa* (in præsente exemplo per $x - 2 = 0$), erit divisio exacta, & quotus, æquatio uno gradu inferior. Et in nostro quidem casu habebitur $x^3 - 6x + 3x - 18 = 0$. Quærantur rursus divisores ultimi termini hujus novæ æquationis, qui sunt 1, -1, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18. *Substituantur successive pro quantitate incognita in nova æquatione, donec reducatur ad* 0 (non autem necesse est adhibere eos divisores, quorum substitutione prior æquatio non potuit ad 0 reduci); reperietur altera radix; apud nos scilicet 6, æquatione abeunte in $216 - 216 + 18 - 18 = 0$.

Tertio. *Æquatio, quæ divisione per primam radicem inventa fuit, dividatur iterum per æquationem simplicem ex secunda radice ortam;* erit divisio exacta, & quotus nova æquatio rursus uno gradu inferior. *Hic operandi modus continuetur, donec vel in quoto deveniatur ad æquationem simplicem, vel saltem secundi gradus, cujus solutio per se sit facilis.* Sic æquatione $x^3 - 6xx + 3x - 18 = 0$ per $x - 6 = 0$ divisa, reperitur $xx + 3 = 0$, quæ est secundi gradus, cujus radices imaginariæ extractu faciles sunt, $-\sqrt{-3}$, & $+\sqrt{-3}$. Ex his autem liquet, methodum adhibitam nil aliud esse, quam operationes iis contrarias, quibus ostendimus (240) æquationem formari. Eadem applicari potest æquationibus mere Algebraicis, quarum eadem sit forma, ac formularum generalium superius (240) repertarum.

257. II. Methodus. Detur æquatio $x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0$. *Primo*: Substituantur quantitati incognitæ successive numeri 1, 2, 3, 4, &c, donec in quantitate, ad quam æquatio reducitur, mutetur signum: erit radix numerus positivus, minor, quam cujus substitutione signum mutatum est, sed major immediate præcedente.

In exemplo propoſito fiet

$$
\begin{array}{llllllll}
1 \ldots & 1+ & 2- & 36+ & 5- & 116 & = & -144 \\
2 \ldots & 16+ & 16- & 144+ & 10- & 116 & = & -218 \\
3 \ldots & 81+ & 54- & 324+ & 15- & 116 & = & -290 \\
4 \ldots & 256+ & 128- & 576+ & 20- & 116 & = & -288 \\
5 \ldots & 625+ & 250- & 900+ & 25- & 116 & = & -116 \\
6 \ldots & 1296+ & 432- & 1296+ & 30- & 116 & = & +346
\end{array}
$$

Continetur itaque una e radicibus poſitivis inter 5 & 6.

Secundo. Fractio addenda numero 5, ut obtineatur radix veræ proxima, vocetur d; habebitur $x = 5 + d$: (potuiſſet etiam poni $6 = a$, & $x = 6 - d$). Subſtituatur jam $5 + d$ pro x in æquatione data; mutabitur in:

$$
\begin{array}{rcl}
+ \quad x^4 & = & +625 + 500d + 150d^2 + 20d^3 + d^4 \\
+ \quad 2x^3 & = & +250 + 150d + 30d^2 + 2d^3 \\
- \quad 36x^2 & = & -900 - 360d - 36d^2 \\
+ \quad 5x & = & +25 + 5d \\
-116 & = & -116 \\
\hline
& & -116 + 295d + 144d^2 + 22d^3 + d^4
\end{array}
$$

Habetur itaque nova æquatio, in qua valor quantitatis d deſignat fractionem quæſitam. Jam vero cum (159) potentiæ fractionum eo minores conſtituant quantitates, quo & ipſæ fractiones minores ſunt, & earum potentiæ altiores; poterunt imprimis $22d^3 + d^4$ negligi, ſeu poni $= 0$, & valor quantitatis d quæri ex æquatione ſecundi gradus $-116 + 295d + 144dd$; & reperietur in decimalibus $d = 0,33758$; ideoque $x = 5,33758$ fere.

Sed quoniam fractio d in ſe non adeo parva eſt, ut citra errorem ſenſibilem poni poſſit $22d^3 + d^4 = 0$, calculo iterato opus eſt, atque valor 5,337 loco incognitæ x in æquatione data ſubſtituendus; fiet ea (ſi notæ decimales non ultra ſex adhibeantur) $+ 811,313703 + 304,033616 - 1025,408484 + 26,685 - 116 = 0,623835$. Quemadmodum autem ex eo, quod in prima ſubſtitutione numeri 6 pro incognita x æquatio reducta

cta fuerit ad quantitatem poſitivam $+346$, patuit, valorem 6 eſſe juſto majorem; ita hic quoque, cum ex ſubſtitutione 5,337 pro x redigatur æquatio ad $+0,623835$, colligitur radicem $x = 5,337$ eſſe majorem vera. Unde rurſus ponatur $x = 5,337 - d$, atque ut ſuperius, in æquatione data ſubſtituatur, neglectis terminis, in quibus d ultra ſecundam potentiam elevatur, obtinebitur . . . .

$$\begin{array}{rcrl}
+ \; x^4 & = & +\;811,313703 & -\;608,067231\,d \\
 & & & +\;170,901414\,dd \\
+\;2x^3 & = & +\;304,033616 & -\;170,901414\,d \\
 & & & +\;32,022000\,dd \\
-\;36x^2 & = & -\;1025,408484 & +\;384,264000\,d \\
 & & & -\;36,000000\,dd \\
+\;5x & = & +\;26,685000 & -\;5,000000\,d \\
-116 & = & -\;116 & \\
\hline
 & & +\;0,623835 & -\;399,704645\,d \\
 & & & +\;166,923414\,dd
\end{array}$$

En novam æquationem ſecundi gradus, ex qua eruitur $d = 0,001562$; ſubducatur hic valor ex 5,337, habebitur radix veræ multo propior $x = 5,335438$. Eadem methodo reperiri poſſunt radices negativæ, ſubſtitutis ſcilicet pro x numeris -1, -2, -3, -4, -5 &c. Imo etiam quæri ſic poſſunt radices, quæ ſunt meræ fractiones, ſi pro x ſurrogentur decimales 0,1, 0,2; 0,3, &c, aut etiam $-0,1$; $-0,2$; $-0,3$ &c.

258. Dum in æquatione radices dantur, quæ haud plus unitate inter ſe differunt, numeri, qui ex ſubſtitutione 1, 2, 3 &c oriuntur, plerumque ſignum non mutant; at iidem, ubi decreverunt, & mutationi ſignorum jam videntur vicini, rurſus creſcere incipiunt. Uti ſi in æquatione $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$, ſubſtituatur 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c, obtingent numeri $+32$, $+13$, $+2$, $+5$, $+28$, $+77$ &c. Hiſce in caſibus numerus minimus, atque mutationi ſigni viciniſſimus, eum indicat, qui valori vero alicujus radicis eſt proximus. In allato exemplo, $+2$, qui ex ſubſtitutione 3 obvenit, indicio eſt, numerum integrum valori radicis cujuſpiam viciniſſimum, eſſe 3. Quare, ut antea, is valor accuratius indagatur, adhibita in æquatione quantitate

$3+d$

$3+d$, ut in alteram transformetur, in qua d fractionem numero 3 adjungendam suppeditat.

Postquam exposita adhuc methodo una e radicibus inventa est, æquatio per eandem dividitur, ut ad inferiorem gradum deprimatur; & tum denuo substituuntur alii numeri, quam qui jam sunt adhibiti. Sic exempli caussa æquatio proposita reducetur ad $x^3 + 7,33544 x^2 + 3,13777 x + 21,74137 = 0$.

DE COMPARATIONE MAGNITUDINUM, SEU TRACTATUS

DE RATIONIBUS & PROPORTIONIBUS.

259. *Ratio*, seu *relatio*, universim dicitur duarum quantitatum comparatio, seu modus ille, quo altera sese habet ad alteram.

Comparantur vero duæ quantitates inter se, ut sciatur, utrum æquales sint, vel quantum alteram altera excedat, aut quoties una in alia contineatur. Exempli causa potest 4 comparari cum 12, ut detegatur, num $4 = 12$, vel quantum 4 excedatur a 12, vel quoties 4 in 12 reperiatur.

Primus terminus eorum, qui comparantur, dicitur *antecedens*; alter *consequens*.

260. Plerumque comparari non solent, nisi quantitates inæquales, vel quarum æqualitas adhuc latet. Atque hinc reapse nonnisi duplex rationum species datur: dum scilicet collatio quantitatum fit eum in finem, ut innotescat, quantum altera ab altera superetur, hæc comparatio dicitur *relatio*, vel *ratio Arithme-*

rithmetica; dum vero quæritur, quoties una in altera contineatur, comparatio appellatur *relatio*, vel *ratio Geometrica*.

Illud autem facile intelligitur, quod omnis ratio consistat in quantitate exprimente modum, quo antecedens se habet ad consequens suum. Unde sequitur . . . .

261. I. Rationem Arithmeticam consistere in differentia antecedentis a consequente, vel consequentis ab antecedente; rationem vero Geometricam constituendam esse in quotiente, qui fit antecedente per consequens diviso, seu consequente per antecedens.

262. II. *Duorum terminorum eandem esse rationem, ac aliorum duorum, seu rationes esse æquales, quando vel differentiæ, vel quotientes sunt æquales.* Sic cum excessus numeri 7 supra 3 sit idem, ac excessus numeri 9 supra 5, scilicet 4, manifestum est, rationem Arithmeticam 7 ad 3 esse eandem cum ratione 9 ad 5; seu esse 7 ad 3 in eadem ratione Arithmetica, ac 9 ad 5. Similiter cum 3 toties contineatur in 12, quoties 2 in 8, atque adeo quotiens rationis numeri 3 ad 12 sit idem cum quotiente rationis duo ad 8, sequitur esse 3 ad 12 in eadem ratione Geometrica, ac 2 ad 8, sive has rationes esse æquales.

263. Si quotientes æquales duarum rationum Geometricarum inter se comparatarum obtineantur eodem operandi ordine, hoc est, si oriantur ex divisione antecedentis per suum consequens in utraque ratione, aut ex divisione consequentis per suum antecedens in utraque ratione, quemadmodum in superiore exemplo; eæ *rationes Geometricæ* dicuntur *directæ*. Sic 3 est ad 12 in ratione directa 2 ad 8, quia diviso numero 3 per 12 obtinetur idem quotus, qui fit diviso numero 2 per 8, nempe $\frac{1}{4}$. At si quoti æqua-

quales fiant per operationes ordine inverſo inſtitutas, exempli cauſa diviſo in prima ratione antecedente per conſequens, & in ſecunda diviſo conſequente per antecedens, termini harum duarum rationum dicuntur eſſe *in eadem ratione inverſa*, ſeu *in ratione reciproca*. E. g. numeri 12 & 3 ſunt in eadem ratione reciproca Geometrica cum numeris 2 & 8: Et quidem eſſe eos in ratione eadem, inde manifeſtum eſt, quod idem ſit utriusque rationis quotiens 4; quod vero hæc ratio ſit inverſa, patet, cum quotus obtineatur, ſi in prima ratione dividatur antecedens per conſequens; in ſecunda conſequens per antecedens. Hinc infertur . . .

Quatuor terminos, qui ſunt in ratione inverſa eadem, poſſe etiam ita ordinari, ut ſint in ratione eadem directa, ſi nempe duo alterutrius rationis termini inter ſe permutentur.

264. III. Sequitur ex dictis, *inæqualitatem diverſarum rationum, quæ inter ſe comparantur, conſiſtere in inæqualitate differentiarum vel quotientium.* Ut autem lege certa hæc inæqualitas determinetur, prius ſtatuendus eſt ordo tenendus in operationibus, quæ ad reperiendas differentias, vel quotientes adhiberi debent, ut is in ſingulis rationibus idem omnino ſit.

265. Quando quatuor termini duarum rationum ſunt in ratione directa, *proportionem* conſtituunt, quæ vel Arithmetica, vel Geometrica erit, prout rationes æquales terminorum vel ſunt Arithmeticæ, vel Geometricæ. Atque hinc quatuor termini 7, 3, 9, 5 faciunt proportionem Arithmeticam; id ipsum vero ut indicetur, ſequente ratione ſcribendi utimur 7.3:9.5. Eodem modo quatuor numeri 3, 12, 2, 8 efformant proportionem Geometricam, quæ exprimitur his ſignis 3.12::2.8; vel 3:12::2:8; vel 3:12 = 2:8; vel denique 3 | 12 || 2 | 8.

266

266. Terminus primus, & ultimus alicujus proportionis dicuntur *extrema*; secundus & tertius *media*.

267. Contingit sæpius, ut consequens primæ rationis simul sit antecedens secundæ, v. g. potest dari hæc proportio Arithmetica $a.\,b : b.\,c$, vel hæc Geometrica $a{:}b{::}b{:}c$. Hujus generis proportiones dicuntur *continuæ*. Proportio Arithmetica continua sic designari solet $\div\, a.b.c$; Geometrica vero hoc modo $\ddot{\div}\, a.b.c$. Terminus 2dus solet tum dici *medius proportionalis*.

268. Dum plures duabus rationibus æqualibus continenter scribuntur, efformatur *series quantitatum proportionalium*. Hunc in modum $7.3{:}9.5{:}11.7$ exprimit seriem quantitatum Arithmetice proportionalium, & $3{:}12{::}2{:}8{::}5{:}20{::}7{:}28$ seriem quantitatum Geometrice proportionalium. At vero si rationes, ex quibus series consurgit, ejusmodi sint, ut consequens cujusvis præcedentis simul sit antecedens in sequente; series dicitur *progressio*. Sic $3.6{:}6.9{:}9.12{:}12.15$ est progressio Arithmetica, quæ ut compendio exprimatur, scribi solet $\div\, 3.\,6.\,9.\,12.\,15$. Eodem modo $32{:}16{::}16{:}8{::}8{:}4{::}4{:}2{::}2{:}1$ exhibet progressionem Geometricam, quæ compendiosius sic efformatur $\ddot{\div}\, 32.\,16.\,8.\,4.\,2.\,1.$

269. Universim igitur *progressio Arithmetica est series terminorum, quorum singulorum ab immediate sequentibus est eadem differentia; & progressio Geometrica est series terminorum, quorum singulorum per immediate sequentes divisorum est idem quotus.*

Proprietates Rationum, Proportionum, & Progressionum Arithmeticarum.

270. Theorema I. *Quævis ratio Arithmetica ad unam e sequentibus formulis revocari potest* $a.\,a \pm d$; vel $b.\,b \pm d$; vel $c.\,c \pm d$ *&c*, seu (nam idem est) *consequens cujusvis ra-*

rationis Arithmeticæ ſemper æquatur antecedenti plus vel minus eorum differentia.

Demonſtratio. Quævis quantitas per a exprimi poteſt, atque antecedens eſſe in ratione quapiam Arithmetica; jam vero ſi a ſit antecedens, vel majus eſt, vel minus ſuo conſequente; ſi majus eſt, excedit ſuum conſequens quantitate, vel differentia, quam poſſumus vocare d: igitur in hoc caſu conſequens erit $a - d$; ſi a minus eſt ſuo conſequente, ab hoc exceditur quantitate, quæ poteſt d dici; & in hoc caſu erit conſequens $a + d$. Quare *in omni ratione Arithmetica conſequens æquatur antecedenti plus vel minus eorum differentia:* (deſignatur autem plus vel minus per $\pm$); igitur quælibet ratio Arithmetica exhiberi poteſt hac formula $a . a \pm d$.

Eodem modo demonſtratur, quod ſi quantitas quævis alia dicatur b, & d ejus differentia ab altera qualibet, ratio Arithmetica inter eas quantitates ſit $b . b \pm d$. Item ſi antecedens appellatur c, & differentia a conſequente f, formula rationis ſit $c . c \pm f$ &c.

271. Theorema II. *Omnis proportio Arithmetica poteſt repræſentari per* $a . a \pm d : b . b \pm d$.

Demonſtratio. Jn duabus rationibus Arithmeticis, quæ æquales ponuntur, differentia literâ eadem exprimi debet, velut d; ſi itaque a & b generatim exhibeant terminos antecedentes binarum rationum Arithmeticarum æqualium, neceſſe eſt, ut conſequentes repræſententur per $a \pm d$, & $b \pm d$ (270). Quare $a . a \pm d : b . b \pm d$ univerſe quatuor terminos duarum rationum Arithmeticarum æqualium, ideoque quamlibet proportionem Arithmeticam deſignat.

272. Theorema III. *Jn omni proportione Arithmetica ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ mediorum.* Patet id manifeſte in proportione $a . a \pm d : b . b \pm d$, cum ſumma extremorum ſit $a + b \pm d$; mediorum vero $a \pm d$

$+b$, idemque sit $a+b\pm d$, ac $a\pm d+b$. Hinc autem constat, quod etiamsi singuli proportionis termini designentur per alias literas, ut $a.b:c.d$, nihilominus tamen semper sit $a+d=b+c$.

273. Coroll: I. *In proportione continua summa extremorum æqualis est duplo termini medii;* idem enim est, seu scribatur $\div a.b.c$, seu $a.b:b.c$; igitur $a+c=2b$.

274. Coroll: II. *Quod si unus terminus proportionis Arithmeticæ sit incognitus, facile reperitur.* Etenim si ejus loco sumatur x, ac terminis debito ordine dispositis fiat æquatio summæ extremorum cum summa mediorum, valor quantitatis x sine negotio invenitur.

Exempli causa si cognitis tribus primis terminis proportionis Arithmeticæ quæratur quartus, fiat $a.b:c.x$; erit (272) $a+x=b+c$, & adhibita transpositione $x=b+c-a$, ex qua formula habemus: *quartum terminum proportionis Arithmeticæ æquari differentiæ termini primi à summa mediorum.*

Si inveniendus sit medius Arithmetice proportionalis inter a & b, ponatur $\div a.x.b$; hinc vero $a+b=2x$, & divisione per 2, $x=\frac{a+b}{2}$; hoc est: *semisumma extremorum æqualis est termino medio Arithmetice proportionali.*

275. Theorema IV. *Quælibet progressio Arithmetica potest reduci ad hanc* $\div$ a . a $\pm$ d a $\pm$ 2 d . a $\pm$ 3 d . a $\pm$ 4 d . a $\pm$ 5 d . a $\pm$ 6 d . a $\pm$ 7 d &c *in infinitum.*

Demonstratio. Quoniam (269) progressio Arithmetica est series terminorum, qui ordine accepti inter se se eandem habent differentiam, sequitur, quod si differentia primi a, & secundi $a\pm d$ sit d, differentia inter secundum & tertium sit itidem $\pm d$: quare tertius terminus necessario erit $a\pm d\pm d$, hoc est $a\pm 2d$.

Eodem modo cum differentia inter terminum tertium & quartum ſit rurſus $\pm d$, manifeſtum eſt, terminum quartum fore $a \pm 2d \pm d$, ſeu $a \pm 3d$, & ſic de reliquis.

276. *Obſerva.* Hæc formula generalis tam progreſſionem Arithmeticam creſcentem, quam decreſcentem, exhibere poteſt. Nam pro creſcente erit $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d$ &c; pro decreſcente habebitur $\div a . a - d . a - 2d . a - 3d . a - 4d$ &c.

277. Coroll: I. *In omni progreſſione Arithmetica ſumma terminorum ab extremis æquidiſtantium ſemper conſtans eſt*, id eſt, *æquatur ſummæ extremorum, vel etiam ſummæ aliorum duorum ab extremis æquidiſtantium; vel denique duplo termini medii, ſi numerus terminorum progreſſionis ſit impar.*

Sic in progreſſione formulæ 7 terminis conſtante, ſumma termini tertii & quinti, ſcilicet $a \pm 2d + a \pm 4d$, ſeu $2a \pm 6d$, æqualis eſt ſummæ extremorum, qui ſunt a, & $a \pm 6d$, ſive $2a \pm 6d$; & ſumma ſecundi, & ſexti termini eſt itidem $2a \pm 6d$; aut denique duplo termini medii $a \pm 3d$.

278. II. *In progreſſione Arithmetica, quivis terminus æqualis eſt ſummæ ex termino primo, & facto differentiæ in numerum terminorum, qui eum terminum præcedunt.* Nam ſextus v. g. terminus $a \pm 5d$, qui in progreſſione creſcente eſt $a + 5d$, æquatur ſummæ termini primi a, & facti ex differentia d in 5, qui eſt numerus terminorum ſextum præcedentium. Pariter in progreſſione decreſcente ſextus terminus $a - 5d$, quæ itidem eſt ſumma ex a, & $-5d$, ſive facto differentiæ $-d$ in 5, numerum terminorum, qui ſextum præcedunt.

279. III. *In progreſſione Arithmetica differentia inter terminum primum & ultimum eſt æqualis differentiæ communi*

in

in numerum terminorum totius progressionis unitate mulctatum ductæ. Sic in allata (275) progressione manifestum est, differentiam inter a & $a \pm 7d$ esse $\pm 7d$.

280. IV. *Summa omnium terminorum progressionis Arithmeticæ æqualis est dimidio facto ex summa extremorum in terminorum numerum ducta*, seu *æqualis est facto ex summa extremorum in numerum terminorum dimidium ducta;* seu *facto ex semisumma extremorum ducta in terminorum numerum*, seu *facto e termino medio* (si numerus terminorum sit impar) *in numerum terminorum*. Omnia eodem redeunt, eodemque modo demonstrantur. Itaque si $2a \pm 6d$ (nimirum summa extremorum progressionis superius relatæ) multiplicetur per 7, numerum terminorum, fiet $14a \pm 42d$, cujus dimidium est $7a \pm 21d = a + a \pm d + a \pm 2d + a \pm 3d + a \pm 4d + a \pm 5d + a \pm 6d$; Si enim in hac æquatione alterum membrum reducatur, fit $7a \pm 21d$.

281. Theorema V. *In progressione Arithmetica potest esse terminus, qui sit æqualis* 0.

Demonstratio. Nam inter 0 & numerum quemvis differentia semper habetur æqualis illi numero.

282. *Coroll* Hinc progressio decrescens ultra quosvis limites continuari potest, si habeatur v. g. $\div 16 . 12 . 8 . 4 . 0$, poterit ulterius continuari in hunc modum $\div 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . -4 . -8 - 12 - 16$ &c. Pariter in progressione $\div 11 . 6 . 1$. terminorum numerus augetur, si fiat $\div 11 . 6 . 1 - 4 . - 9 . - 14 . - 19$ &c.

283. Observa. *Zerus reapse talis rationem Geometricam ingredi non potest*, utpote cum nec continere terminum alterum, nec in eo vere contineri possit.

284. *Scholium.* Ex allatis progressionum Arithmeticarum proprietatibus facile eruuntur formulæ pro solutione sequentis problematis generalis: *si dentur tria ex his quinque: terminus primus* = a; *terminus ultimus* = ω; *differentia communis terminorum* = d; *numerus terminorum* = n; *summa omnium terminorum* = s, *invenire alterum ex reliquis duobus*. Suppona-

namus enim progreſſionem creſcere (poteſt autem quævis decreſcens progreſſio inſtar creſcentis tractari, ſi pro primo termino ſumatur ω; & pro ultimo a); & *primo* quod Coroll. III. dictum eſt, exhibeatur algebraice; erit $\omega - a = dn - d$; in hac æquatione ſi ſucceſſive ſubſtituantur valores quantitatum ω, a, d, & n, habebuntur quatuor particulares formulæ. *Secundo* repræſentetur etiam algebraice Corollarium IV, dabitur æquatio $an + \omega n = 2s$, ex qua rurſus quatuor aliæ formulæ naſcentur. *Tertio.* In poſtrema æquatione ſubſtituatur valor de $\omega = a + dn - d$ ex priore æquatione erutus, mutabitur ea in $2an + dnn - dn = 2s$, quæ quatuor alias formulas ſuppeditabit.

Quarto. Si in eadem æquatione $an + \omega n = 2s$ ſubſtituatur valor de $a = \omega - dn + d$, acceptus ex prima, obtinetur $2\omega n - dnn + dn = 2s$, ex qua quatuor novæ formulæ profluunt.

Quinto. Denique ſi in æquatione $an + \omega n = 2s$ ſubſtituatur valor de $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$ ex prima, fiet $2s = a + \omega + \frac{\omega\omega - aa}{d}$, & hinc adhuc quatuor orientur peculiares formulæ. Jam vero ope 20 harum formularum omnes caſus poſſibiles problematis ſuperius enunciati ſolventur.

285. Problema. *Inter duos terminos datos invenire numerum m mediorum Arithmetice proportionalium, ut progreſſio oriatur.*

Reſolutio. Differentia inter duos terminos datos dividatur per $m + 1$, quotiens erit differentia communis terminorum in progreſſione quæſita. v. g. Si inter 7 & 13 inveniendi ſint termini 4 medii, differentia terminorum communis progreſſionis eſt $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$; unde erit progreſſio $\div 7 . 8\frac{1}{5} . 9\frac{2}{5} . 10\frac{3}{5} . 11\frac{4}{5} . 13$.

Quod ſi enim inter 7 & 13 ponantur 4 medii, oritur progreſſio ſex terminorum, & hinc quinque differentiæ æquales; ſed manifeſtum eſt, has quinque differentias ſimul ſumptas reperiri in differentia termini primi 7, & ultimi 13; quare ut una ex illis quin-

quinque (quæ nempe ſit communis inter ſingulos terminos) inveniatur, neceſſe eſt, ut differentia termini primi & ultimi per 5 dividatur.

De Rationibus, Proportionibus, & Progreſſionibus Geometricis.

286. In omni magnitudinum genere ſæpiſſime rationes Geometricæ in conſiderationem veniunt. Atque hinc, quando voces *Ratio*, *Proportio*, Analogia, *Progreſſio* ſine alio addito proferuntur, eæ ſemper de Geometricis ſumuntur.

In ſequentibus vero ſupponemus, quod quotiens in ratione directa ſemper oriatur ex diviſione conſequentis per antecedens.

287. Hinc vero, & ex ipſa rationis Geometricæ notione, ſequitur, quamvis fractionem eſſe rationem Geometricam, in qua numerator ſit conſequens, & denominator antecedens.

288. *Ratio numeri ad numerum* eſt, in qua quotiens eſt quantitas, quæ numeris exprimi poſſit, ſive non incommenſurabilis; *ratio irrationalis*, ſeu *ratio ſurda* dicitur, cujus quotiens nullis numeris, ſeu fractis, ſeu integris, poteſt exprimi accurate. Sic ratio 7 ad 11, item $4\frac{2}{7}$ ad $\frac{11}{17}$ &c eſt ratio numeri ad numerum, cum in utraque quotientes ſint accurate $\frac{11}{7}$, $\frac{77}{510}$ &c. At vero rationes 4 ad $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ad 8 &c ſunt ſurdæ, quia nullus numerus integer vel fractus inveniri poteſt, qui valorem accuratum de $\frac{\sqrt{3}}{4}$; vel de $\frac{8}{\sqrt{5}}$ exhibeat (187).

At enim hinc inferri nequit, duarum quantitatum incommenſurabilium rationem ſemper eſſe ſurdam, cum altera poſſit accurate eſſe dupla, tripla &c alterius, quacum comparatur.

289. Quando conſequens in ſuo antecedente accurate continetur bis, ter &c, eorum ratio dicitur *dupla*, *tripla* &c; dum autem antecedens continetur accurate bis, ter &c in ſuo conſequente, ratio vocatur *ſubdupla*, *ſubtripla* &c E. g. ratio numerorum 48 ad 6 eſt ratio *octupla*; ea vero, quæ habet 4 ad 12, eſt *ſubtripla*.

290. Si plurium rationum datarum termini cor-

respondentes inter ſe multiplicentur, hoc eſt antecedens per antecedens, & conſequens per conſequens, facta conſtituunt *rationem compoſitam* ex ſingulis rationibus datis. Exempli cauſa dentur tres rationes $a:d$, $b:e$, $c:f$; ratio ex his compoſita erit $abc:def$, & quævis ex tribus rationibus datis, dicitur ratio *componens*, ſeu etiam *radix compoſitæ*.

291. Ratio, quæ componitur ex rationibus æqualibus, eſt *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata* &c, ſi componentes, ſeu radices, ſint duæ, tres, quatuor &c. Itaque ſi componantur rationes æquales 2:4, 6:12, 3:6, oritur ratio triplicata 36:288.

292. Theorema Fundamentale. *Quævis ratio Geometrica poteſt reduci ad hanc formulam* a:aq, *ſeu etiam ad hanc* b:bq &c; ſeu (idem eſt) *conſequens in omni ratione Geometrica eſt æquale facto ex antecedente in quotientem rationis.*

Demonſtratio. Cum quotiens rationis obtineatur diviſione conſequentis per antecedens, evidens eſt (54), conſequens (utpote dividendum) æquari facto ex quotiente ducto in antecedens (ſeu diviſorem). Univerſim igitur quævis ratio Geometrica, in qua antecedens ſit a, quotus q, habebit conſequens aq, ideoque recte exhibebitur per $a:aq$; & quævis ratio Geometrica, in qua antecedens b, quotus q, ob eandem rationem rite exprimetur per $b:bq$, &c.

293. *Obſerva* I. Si ſupponeretur, quotientem rationis ſemper oriri ex diviſione antecedentis per conſequens; ut rationes Geometricæ revocari poſſent ad easdem formulas $a:aq$, $b:bq$ &c, neceſſe foret, quotientem ſumere $\frac{1}{q}$, qua expreſſione ñ modo fracti, ſed etiam integri numeri deſignari poſſunt.

294. II. Quando antecedens majus eſt conſequen-

quente, quotiens q eſt fractio unitate minor; ex oppoſito dum antecedens minus eſt ſuo conſequente, q eſt numerus unitate major. In exemplo: in ratione 4 ad 12 eſt $q = 3$, & quia antecedens $= 4$, erit conſequens $4 \times 3 = aq$. Sed in ratione 12 ad 4, eſt $q = \frac{1}{3}$, hinc cum antecedens $a = 12$, erit conſequens $12 \times \frac{1}{3} = 4 = aq$.

295. Theorema II. *Quævis proportio Geometrica poteſt ad hanc formulam revocari* $a : aq :: b : bq$.

Demonſtratio. Si quatuor termini duarum rationum æqualium ordine ponantur, efformant proportionem (265); jam vero duæ rationes æquales debent eundem quotientem habere, qui proinde eadem litera, velut q, exprimendus eſt: ſi itaque a & b ſint termini antecedentes duarum quarumvis rationum æqualium, aq, & bq earundem ut ſint conſequentes, neceſſe eſt: & hinc formula generalis $a : aq :: b : bq$ ad quamlibet proportionem Geometricam pertinebit.

296. Theorema III. *Valor rationis* (ſeu ipſa ratio) *non mutatur, ſi uterque ejus terminus per eandem quantitatem multiplicetur, vel dividatur.* Aliter. *Producta, vel quotientes duarum quantitatum inæqualium per eandem quantitatem tertiam, ſunt in eadem ratione, ac quantitates illæ inæquales.*

Demonſtratio. Ratio duarum quantitatum conſiſtit in quotiente; quodſi ergo ratio quævis $a : aq$ multiplicetur per quamlibet quantitatem m, ratio factorum $am : amq$ rurſus conſiſtet in quotiente eodem q, ut ante multiplicationem: quare am & amq ſunt in eadem ratione, ac a & aq. Eodem modo oſtendetur eſſe $\frac{a}{m}$ & $\frac{aq}{m}$ in eadem ratione a ad aq. Ergo eſt $a : aq :: am : amq :: \frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$, &c.

R *Scho-*

Scholium. Cum ratio Geometrica & fractio idem ſint, facile intelligitur, *fractionis valorem non mutari, ſeu uterque ejus terminus multiplicetur, ſeu dividatur per eandem quantitatem* (78).

297. *Coroll:* Hinc ſequitur, *duas quantitates eſſe in eadem ratione, ac earum dupla, tripla, quadrupla* &c; *item ac earum ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla* &c; (ſive quod idem eſt) *fractiones eſſe inter ſe, ſi habeant eundem denominatorem, ut earum numeratores.* Sic $a:b::\frac{a}{2}:\frac{b}{2}::\frac{a}{3}:\frac{b}{3}::\frac{a}{p}:\frac{b}{p}$; &c.

298. Theorema IV. *Ratio duplicata æqualis eſt rationi quadratorum duorum quorumvis terminorum unam e rationibus componentibus, ſeu radicem aliquam, conſtituentium. Et ratio triplicata æquatur rationi cuborum binorum terminorum, qui conſtituunt rationem aliquam e componentibus;* idem eſt de aliis potentiis.

Demonſtratio I. Sint duæ rationes æquales $a:aq$, $b:bq$; erit ratio duplicata earum $ab:abqq$. Eſt autem manifeſtum, eſſe $ab:abqq::aa:aaqq::bb:bbqq$, utpote cum idem ſit omnium harum rationum exponens qq.

II. Dentur tres rationes æquales $a:aq$, $b:bq$, $c:cq$; erit ratio triplicata $abc:abcq^3$: porro liquet, ut prius, eſſe $abc:abcq^3::a^3:a^3q^3::b^3:b^3q^3::c^3:c^3q^3$.

Obſerva. Quia rationes quadratorum, cuborum &c, ſunt rationes duplicatæ, triplicatæ &c, rationes radicum quadratarum, cubicarum &c, dictæ ſunt rationes *ſubduplicatæ, ſubtriplicatæ &c.*

299. Theorema V. *Si duo termini ſint in ratione reciproca duorum aliorum, cum iisdem rationem directam conſti-*

stituere possunt, modo, servato eodem terminorum ordine, termini alterutrius rationis forma fractionum exhibeantur, quarum numerator sit 1, *vel quævis quantitas eadem.*

Demonstratio. Ratio $bq:b$ est reciproca rationis $a:aq$; ut igitur habeatur directa, ponendum erit $b:bq::a:aq$, vel $bq:b::aq:a$. Sed dico, si v. g. rationis $bq:b$ termini fractionum forma scribantur, quarum numerator idem sit 1, fore etiam $\frac{1}{bq}:\frac{1}{b}::a:aq$. Etenim quotiens ex $\frac{1}{b}$ per $\frac{1}{bq}$ diviso, est q, quemadmodum si aq per a dividatur.

Eodem modo ostendetur esse $bq:b::\frac{1}{a}:\frac{1}{aq}$; vel $\frac{m}{bq}:\frac{m}{b}::a:aq$, &c.

Proprietates Proportionum Geometricarum.

300. Theorema VI. *In omni proportione Geometrica factum extremorum æquale est facto mediorum.*

Patet ex ipso proportionis $a:aq::b:bq$ intuitu.

301. Coroll: *Quod si itaque proportionis termini singuli diversis literis exprimantur* v.g. a, b, c & d; sive *si ponatur* $a:b::c:d$; *erit nihilominus* $ad = bc$.

302. Theorema VII. *Ex factoribus duorum productorum æqualium semper potest fieri proportio, si factores unius sumantur pro extremis; factores alterius pro terminis mediis proportionis.*

Demonstratio. Cum enim (300) semper habeatur æquatio ex productis mediorum & extremorum proportionis; in quavis æquatione duorum productorum poteſt alterum conſiderari tanquam factum mediorum, alterum tanquam factum extremorum: quare factores unius producti ſpectari poſſunt tanquam termini medii proportionis; factores vero alterius, tanquam extremi, ut adeo ex omnibus proportio formari poſſit.

303. *Coroll:* I. Quælibet ergo æquatio mutari poteſt in proportionem; e. g. ex $ad = bc$ fit $a:b::c\ d$. Æquatio $ad - bd = cg + c$ ſuppeditat analogiam ſequentem $a - b : g + 1 :: c : d$; item $1 - xx = a$, reducitur ad, $1 - x : a :: 1 : 1 + x$; & $xx - yy = 1$, dat proportionem continuam $\div\ x + y . 1 . x - y$, &c.

304. Coroll: II. *Quatuor cujusvis proportionis termini* a:b::c:d *poſſunt ſeptem aliis modis ordinari, ut ſemper maneat proportio directa.* Cum enim hæc proportio ſuppeditet bina facta $ad = bc$, poſſunt poni a & d pro extremis, b & c pro mediis, vel b & c pro extremis; a & d pro mediis, ſequentibus octo modis.

$a:b::c:d.$	$b:a::d:c.$	$c:a::d:b.$	$d:b::c:a.$
$a:c::b:d.$	$b:d::a:c.$	$c:d::a:b.$	$d:c::b:a.$

Quin poſſunt etiam quotcunque aliæ proportiones efformari, ſi iidem termini ope additionis, vel ſubtractionis connectantur, modo in utravis ratione eædem operationes, eodemque ordine adhibeantur, ita, ut factum extremorum, & mediorum reducatur ad idem factum, quod in æquatione prima habebatur $ad = bc$. Sic fieri poſſunt:

$a + b : b :: c + d : d.$	$a - b : b :: c - d : d.$
$a : a + b :: c : c + d.$	$a : a - b :: c : c - d.$
$a + b : a - b :: c + d : c - d.$	$a - b : a + b :: c - d : c + d.$ &c.

305. *Obſerva.* Ex 24 permutationibus quatuor terminorum proportionis a:b::c:d, dantur octo, in quibus termini ſunt

in

in ratione directa, ut superius diximus; octo, in quibus est ratio inversa; & octo, in quibus termini nec directe, nec reciproce sunt proportionales. Combinationes, in quibus ratio est reciproca, sunt:

a b d c	*b a c d*	*c a b d*	*d b a c*
a c d b	*b d c a*	*c d b a*	*d c a b*

Nam si e. g. fiat $a : b :: \frac{1}{d} : \frac{1}{c}$, facta extremorum & mediorum erunt $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, & sublatis fractionibus $ad = bc$. Reliquae octo permutationes sunt:

a d b c	*b c a d*	*c b a d*	*d a b c*
a d c b	*b c d a*	*c b d a*	*d a c b*

Patet autem, debere unum terminum ex singulis rationibus transponi, ut proportionem directam constituant.

306. Theorema VIII. *In omni proportione Geometrica si antecedens unius rationis est majus, aequale, vel minus suo consequente, etiam in altera ratione erit antecedens majus, aequale, vel minus consequente; & si antecedens primae rationis est majus, aequale, vel minus antecedente secundae rationis; etiam consequens primae rationis erit majus, aequale, vel minus consequente secundae.*

Demonstratio. Pars prima Theorematis ex ipsa notione proportionis evidens est; pars altera non minus erit evidens, si cogitetur, quod (304) antecedens secundae rationis possit fieri consequens in prima ratione, & vicissim, quin propterea proportio turbetur.

307. Theorema IX. *Si termini duarum, pluriumve proportionum homologi inter se multiplicentur, vel dividantur, etiam facta, vel quotientes erunt proportionales.*

Demonstratio. *Primo.* Si duarum proportionum $a:aq::b:bq$ & $c:cp::d:dp$, termini homologi inter se mul-

ti-

tiplicentur, antecedentes per antecedentes, consequentes per consequentes, manifestum est, facta $ac:acpq::bd:bdpq$ constituere proportionem, cum idem utriusque rationis sit quotiens pq.

Secundo. Si termini proportionis $a:aq::b:bq$ dividantur per homologos alterius $c:cp::d:dp$, eodem modo liquet, fore $\frac{a}{c}:\frac{aq}{cp}::\frac{b}{d}:\frac{bq}{dp}$, cum rursus in utraque ratione sit quotiens $\frac{q}{p}$.

308. Coroll: *Potentiæ eædem quantitatum proportionalium sunt proportionales; & radices eædem quantitatum proportionalium sunt proportionales.* Exemplum. Detur proportio $a:b::c:d$. Quadrata, cubi &c, horum terminorum nil aliud sunt, quam facta terminorum homologorum ejusdem proportionis bis, ter &c positæ. Quod si jam supponamus, per a, b, c, d designari quatuor potentias ejusdem gradus inter se proportionales, uti quatuor cubos, posito nempe $a = r^3, b = s^3, c = t^3, d = u^3$, erit $r^3:s^3::t^3:u^3$, hoc est, habebuntur facta proportionalia terminorum correspondentium proportionis $r:s::t:u$ ter positæ, atqui r, s, t, u, sunt radices cubicæ terminorum r^3, s^3, t^3, u^3, seu per hypothesin a, b, c, d: igitur etiam radices cubicæ quantitatum proportionalium a, b, c, d sunt proportionales. Idem est de quibusvis aliis radicibus, quas, alias constat, non esse nisi potentias exponentis fracti (173).

309. Theorema X. *Si terminorum correspondentium duarum, pluriumve proportionum summæ vel differentiæ accipiantur, eæ proportionales non sunt, nisi si* primo *in proportionibus datis sit idem quotiens; vel* secundo *antecedentes termini proportionis unius sint proportionales cum antecedentibus proportionis alterius; vel* (quod idem est) *consequentes uni-*

unius sint in eadem ratione cum consequentibus alterius proportionis.

Demonstratio. Ut sumtis summis terminorum correspondentium in proportionibus $a:aq::b:bq$, & $c:cp::d:dp$, inferri possit, esse $a+c:aq+cp::b+d:bq+dp$, necesse est, ut ostendatur haberi hanc aequationem $abq+adp+bcq+cdp=abq+bcp+adq+cdp$, sive, ablatis utrinque aequalibus, $adp+bcq=adq+bcp$. Atqui evidens est, inter haec haberi veram aequationem 1mo, si $p=q$, cum hoc posito reduci possit ad $adp+bcp=adp+bcp$. Secundo si $ad=bc$: substitutione enim tunc fiet $adp+adq=adp+adq$. Habetur autem $ad=bc$, quando est $a:b::c:d$ (301), sive quando est $aq:bq::cp:dp$, quia in posteriore hac hypothesi est $adpq=bcpq$, quae aequatio reducitur (223) ad $ad=bc$. Eadem demonstrandi ratio applicabitur, si in duabus proportionibus sumantur differentiae terminorum homologorum. Igitur si accipiantur summae vel differentiae &c.

310. Theorema XI. *Si detur series terminorum proportionalium, erit summa antecedentium ad summam consequentium, ut est quodvis antecedens ad suum consequens.*

Demonstratio. Dentur $a:aq::b:bq::c:cq::d:dq$, erit exempli causa $a+b+c+d:aq+bq+cq+dq::b:bq$. Etenim consequens primae rationis $aq+bq+cq+dq$ idem est ac $\overline{a+b+c+d}\times q$; est autem evidens, esse $a+b+c+d:\overline{a+b+c+d}\times q::b:bq$. &c.

Proprietates Progressionum Geometricarum.

311. Theorema XII. *Quaevis progressio Geometrica potest ad hanc formulam revocari* $\dot{\div}$ a . a q . a q^2 . a q^3 . a q^4 . a q^5 . a q^6 . &c.

De-

Demonstratio. Progressio Geometrica est series terminorum, qui alternatim agunt antecedens & consequens ejusdem rationis, sive qui semper eundem habent quotientem (269); atqui talem seriem recte exhiberi per $a.aq.aq^2.aq^3.aq^4.$ &c evidens est, cum quilibet terminus per proxime anteriorem ex parte sinistra, sive per antecedens suum, divisus det quotientem eundem q.

312. *Scholium.* Quoniam exponentes terminorum in progressione sese consequentium evidenter constituunt seriem numerorum naturalium crescentium, & ab o incipientium, liquet porro, formulam generalem progressionis Geometricæ posse etiam sic exhiberi $\div aq^0.aq^1.aq^2.aq^3.aq^4.$ &c. Et certe si dividatur aq per aq^0, habebitur $\frac{aq^1}{aq^0} = q^{1-0} = q$ (146). Hinc autem infertur esse $aq^0 = a$, consequenter $q^0 = 1$. Nam aq^0 denotat a toties acceptum, quot in q^0 sunt unitates (43); quod si igitur hoc factum nihilominus manet $= a$, non potest a nisi semel accipi, atque adeo debet esse $q^0 = 1$. Quare universim: *potentia exponentis* o *cujusvis quantitatis æqualis est unitati;* id, quod probe notandum.

313. Theorema XIII. *Quivis progressionis Geometricæ terminus est æqualis facto ex termino primo ducto in quotientem elevatum ad eam potentiam, cujus exponens designat numerum terminorum præcedentium*

Demonstratio. Patet hoc ex primo progressionis $\div a.aq.aq^2.aq^3.aq^4.aq^5.aq^6$ &c intuitu, cum illico appareat, quintum v. g. terminum aq^4 esse factum primi a in quotientem q elevatum ad quartam potentiam.

Formula generalis hujus Theoremmatis esse potest . . $m = aq^{n-1}$, in qua m exhibet terminum quæsitum, n vero indicat, quotus is sit in progressione.

314. Coroll: I. *Series potentiarum alicujus quantitatis ſucceſſive creſcentium conſtituit progreſſionem Geometricam.*

Ponatur enim $a = 1$, & q repræſentet quamlibet quantitatem, progreſſionis formula mutabitur in hanc $\div 1.q.q^2.q^3.q^4.q^5.q^6$ &c Sunt igitur potentiæ quantitatis q ſerie naturali ſeſe excipientes progreſſio Geometrica.

Verum aliter res habet in radicibus ſeſe conſequentibus, quæ ſcilicet ſunt potentiæ exponentium fractorum $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c, qui non conſtituunt progreſſionem Arithmeticam.

315. Coroll: II *Summæ, vel differentiæ terminorum proxime ſeſe in progreſſione Geometrica conſequentium, ſunt in progreſſione Geometrica.* Nam progreſſionis $\div$ $a.aq.aq^2.aq^3.aq^4.aq^5.aq^6$ ſummæ, vel diferentiæ terminorum expoſitæ ſunt $a \pm aq.aq \pm aq^2.aq^2 \pm aq^3.aq^3 \pm aq^4.aq^4 \pm aq^5.aq^5 \pm aq^6$. Atqui nemo non videt, hosce terminos eſſe in progreſſione Geometrica, cum ſinguli æquentur primo ducto in quotientem elevatum ad eam potentiam, cujus exponens indicat numerum terminorum præcedentium. v.g. quintus $aq^4 \pm aq^5$ eſt factum ex $a \pm aq$ in q^4.

316. Theorema XIV. *In omni progreſſione Geometrica facta extremorum, & terminorum ab extremis æquidiſtantium, ſunt inter ſe æqualia, vel etiam quadrato termini medii, ſi numerus terminorum ſit impar.*

Demonſtratio. Opus ſolummodo eſt, ut progreſſionis formula conſideretur, $\div a.aq.aq^2.aq^3.aq^4.aq^5.aq^6$; evidens enim eſt, facta primi termini in ultimum aaq^6; ſecundi in penultimum $aq \times aq^5$ ($= aaq^6$); tertii aq^2 in antepenultimum aq^4, nempe aaq^6; quadratum medii aq^3, ſeu a^2q^6, omnia inter ſe æquari.

Coroll: *In proportione Geometrica continua factum extremorum æquale eſt quadrato medii.* Talis enim proportio eſt progreſſio trium terminorum.

317. Theorema XV. *Si in progreſſione quavis Geometrica* $\div$ a.aq.aq^2.aq^3 &c *ſit* $q = 2$ *vel* $\frac{1}{2}$, *differentia inter terminum primum & ultimum æqualis eſt ſummæ omnium terminorum dempto maximo. Si* $q = 3$, *vel* $\frac{1}{3}$, *differentia inter primum & ultimum æqualis eſt duplæ ſummæ omnium ter-*

 mi-

minorum dempto maximo. Si $q = 4$, *vel* $\frac{1}{4}$, *differentia primi & ultimi eſt tripla ſummæ omnium dempto maximo* &c. Poſito enim $q = 2$, progreſſio ∺ $a . aq . aq^2 . aq^3$ &c mutatur in hanc ∺ $a . 2a . 4a . 8a$ &c: jam vero ſi ſumatur differentia termini primi & ultimi hujus progreſſionis $8a - a$, habetur $7a = a + 2a + 4a$, quæ eſt ſumma omnium terminorum maximum præcedentium. Ponatur $q = 3$, fiet progreſſio prior ∺ $a . 3a . 9a . 27a$, in qua extremorum differentia $27a - a = 26a$ eſt dupla ſummæ $a + 3a + 9a = 13a$. Eodem modo demonſtratio procedit, ſi $q = \frac{1}{2}$, vel $q = \frac{1}{3}$.

318. Theorema XVI. *In omni progreſſione Geometrica eſt terminus primus ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum ſecundi; primus ad quartum, ut cubus primi ad cubum ſecundi; & ſic deinceps.*

Univerſim: *duo quilibet termini certo intervallo a ſeſe diſtantes ſunt inter ſe, ut duo quivis contigui ad eam potentiam elevati, cujus exponens deſignat locum, quo alter terminus ab altero diſtat.* Exempli cauſa, tertius terminus eſt ad nonum, ut ſexta potentia cujuslibet termini ad ſextam potentiam immediate ſequentis.

Demonſtratio. In progreſſione ∺ $a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5 . aq^6 . aq^7 . aq^8$, manifeſtum eſt, eſſe $a : aq^2 :: a^2 : a^2 q^2$, cum utriusque rationis quotiens ſit q^2. Similiter eſt $a : aq^3 :: a^3 : a^3 q^3$, cum rurſus quotiens in utravis ratione habeatur idem q^3 &c.

Sic etiam liquet, cum terminus nonus a tertio ſit ſexto loco poſitus, eſſe $aq^2 \; aq^8 :: \overline{aq^5}^{\,6} : \overline{aq^6}^{\,6}$; ſeu etiam $aq^2 : aq^8 :: a^6 q^9 \times^6 : a^6 q^6 \times^6$; nam quotiens utriusque rationis eſt q^6.

Generatim ſi aq^m, & aq^r exhibeant duos quosvis terminos inter ſe comparandos; locus, quo alter ab altero diſtat, ſi $r - m$; terminus quivis alius ſit aq^n, adeoque hunc immediate ſequens aq^{n+1}, ſemper erit . . . . .

$$a q^m : a q^r :: a^{r-m} q^{nr - nm} : a^{r-m} q^{(n+1)(r-m)}$$

quod quotiens in utraque ratione ſit idem q^{r-m}.

319.

319. Theorema. XVII. *Termini, quorum literæ eædem, & exponentes ſunt in proportione, vel progreſſione Arithmetica, ſunt in proportione, vel progreſſione Geometrica.*

Demonſtratio. Equidem clarum eſt, terminos aq^5, aq^9, aq^2, aq^6 conſtituere proportionem Geometricam $aq^5 : aq :: aq^2 : aq^6$, cum utriuslibet rationis quotiens ſit q^4. Pariter eſt $\div\!\div\, aq^2 \,.\, aq^{3\frac{1}{2}} \,.\, aq^5 \,.\, aq^{6\frac{1}{2}} \,.\, aq^8$; eſt enim quotus terminorum communis $q^{1\frac{1}{2}}$.

Varia Problemata de proportionibus & Progreſſionibus Geometricis.

320. Problema I. *Datis tribus quibusvis terminis proportionis invenire quartum.*

Reſolutio. Terminus incognitus dicatur x, & cum reliquis datis ordine debito diſponatur: fiat ex factis extremorum & mediorum æquatio, in cujus alterutro membro erit x; dividatur jam per alterum factorem hujus membri tota æquatio; habebitur valor incogniti x, cum membrum alterum meris quantitatibus datis conſtet. Unde ſequens deducitur regula univerſalis: *terminus quivis proportionis Geometricæ æqualis eſt vel facto extremorum per unum e mediis diviſo; vel facto mediorum diviſo per unum ex extremis.*

Exemplum: dentur primi tres termini a, b, c, & quæratur quartus: habebitur $a:b::c:x$; & hinc $ax = bc$, & (221) $x = \dfrac{bc}{a}$. ſi datis primo, tertio & quarto, x ſit ſecundus, erit proportio $a:x::b:c$; æquatio $ac = bx$;

& $x = \frac{ac}{b}$. Regula generalis in ſolutione contenta appellari ſolet *regula trium.*

321. *Obſerva* I. Jn uſu regulæ trium Arithmetici præcipiunt, ut dispiciatur, an tres termini dati ſint in ratione directa, an vero in reciproca cum quæſito, quod ex quæſtionis ſtatu colligitur. In priore caſu regulam trium vocant directam, quando nempe terminus quæſitus tanto debet eſſe major vel minor tertio, quanto ſecundus eſt major vel minor primo: & tum x erit quartus terminus proportionis, formulaque adhibenda $x : \frac{bc}{a}$, quæ ſic enunciatur: *Regula trium directa eſt, quando terminus ſecundus multiplicatur per tertium, & factum diviſum per primum exhibet quæſitum.*

322. Terminum incognitum eſſe in ratione reciproca cum tribus datis inde intelligitur, quando per ſtatum quæſtionis tanto debet eſſe major tertio, quanto ſecundus minor eſt primo, vel tanto minor tertio, quanto ſecundus eſt major primo. Et tunc regula dicitur inverſa, x ſecundo, aut tertio loco poſito, utendumque formula $x = \frac{ac}{b}$, cujus enunciatio eſt: *In regula trium inverſa multiplicetur terminus primus datus per tertium, & factum dividatur per ſecundum datum; erit quotiens quartus quæſitus.*

EXEMPLUM I. 36 hexapedæ operis ſtruendi conſtant 60 libris; quot conſtabunt hexapedæ 48? Manifeſtum eſt, regulam trium directam hic adhibendam eſſe, cum pretium quæſitum tanto debeat eſſe majus, quam 48; quanto pretium 60 librarum majus eſt, quam 36. Hinc ex formula $x = \frac{bc}{a}$ habebitur $x = 80$ libr:

EXEMPLUM II. 20 operæ perfecerunt uno die 45 hexapedas; ut 81 hexapedæ ſtruerentur, quis operarum numerus adhiberi debuiſſet?

Liquet, terminos 20, 45, 81 cum quarto incognito x non poſ-

poſſe eſſe in ratione directa; quæſitus enim operarum numerus non debet tantum excedere numerum 81, quantum 45 major eſt, quam 20: immo vero apparet, paucioribus operis pro 81 hexapedis opus eſſe, quam 81, quemadmodum etiam pro 45 hexapedis non requirebantur 45 ſtructores. Igitur terminorum ordo adhibendus eſt ſequens $20 : 45 :: x : 81$, & formula $x = \frac{ac}{b}$, ex qua fit $x = 36$.

323. II. Regula trium non eſt inverſa, niſi quando termini problematis male ſunt diſpoſiti. Nam ſi quæſtio præcedens rite enuncietur, hic debet eſſe terminorum ordo: ſi ad 45 hexapedas operis, neceſſarii ſunt ſtructores 20; ad 81 quot requirentur?

324. III. Subinde problemata magis complicata proponuntur, quorum ſolutiones dicuntur *regulæ ſocietatis;* ſed pro hisce nova regula opus non eſt, cum ſolvi poſſint pluribus proportionibus adhibitis, quarum ope termini incogniti directe reperiuntur.

Exemplum III. 20 operæ intra 15 dies ſtruunt 160 hexapedas, quot hexapedas facient 30 homines intra dies 12?

Hoc problema reducendum ad ſequentia duo: 20 operæ tempore dato faciunt 160 hexapedas; quot hexapedas facient tempore eodem operæ 30? reperientur 240.

Tempore 15 dierum numerus datus operarum facit 240 hexapedas; intra 12 dies quot faciet? Invenientur 192.

Vel vero problema propoſitum reducatur ad hæc duo: intra 15 dies a dato operarum numero fiunt 160 hexapedæ; quot fient intra dies 12? Reperientur 128. Operæ 20 dato tempore abſolvunt 128 hexapedas, quot abſolvent operæ 30? invenientur 192.

Quin de regulis hujusmodi proportionum ſolliciti ſimus, mediocri attentione animi adhibita id genus quæſita independenter ab omni proportione reſolvi poſſunt. Enimvero in hoc exemplo ſatis eſt imprimis quærere, quantum operis unus homo die uno faciat, dicendo 160 orgyæ per 15 dies dant pro uno die $\frac{160}{15}$, cujus pars vigeſima, ſive $\frac{160}{15 \times 20}$, præſtatur ab uno. His ita habentibus 30 operæ per diem facient

30

$30 \times \frac{160}{15 \times 20}$, five $\frac{30 \times 160}{15 \times 20}$; & hinc intra dies 12 efficient

$$\frac{12 \times 30 \times 160}{15 \times 20} = 192 \text{ org:}$$

Eodem modo fi proponatur quæſtio (quam Arithmeticus *regulam ſeptem* appellarit): 10 ſesquimodii tritici, ſinguli ponderis 240 librarum, alebant 525 milites diebus 4; 17 ſesquimodii, appendentes ſinguli 320 libras, quot diebus ſufficient 217 militibus? Quæratur primo, quantum requiratur die uno pro milite uno, inferendo, decies 240 libræ intra 4 dies abſumptæ, dant annonam diei unius $\frac{10 \times 240}{4}$, cujus pars 525ta eſt alimentum militis unius diurnum, id eſt $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$. Quod ſi ita ſit, decies ſepties 320 libræ diviſæ in 217 portiones, ſeu $\frac{17 \times 320}{217}$ exhibet, quantum a milite uno, numero dierum quæſito conſumatur, ita, ut ſi hæc quantitas dividatur per $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$ (quod indicat victum diurnum unius), obtineatur numerus dierum quæſitus $\frac{17 \times 320 \times 4 \times 525}{10 \times 240 \times 217} = 21\frac{33}{62}$.

EXEMPLUM IV. Tres mercatores contulerunt ſummam 12000 librarum: Petrus nempe 2000, Jacobus 4000, & Joannes 6000 libr. Damnum commune paſſi ſunt 2400 lib. Quæritur damnum ſingulorum?

Solvitur hoc problema totidem proportionibus, quot ſunt termini incogniti; eſt enim ſumma tota communis ad damnum totum commune, ut pars ſingulorum ad damnum ſingulorum; atque hinc regula trium ter adhibita reperietur damnum Petri 400, Jacobi 800, & Joannis 1200 libr.

325. IV. Id genus quæſtiones ſolvi etiam poſſunt per *regulam falſi*, ſive *falſæ poſitionis*, quæ in eo conſiſtit, quod terminis incognitis ſubſtituantur interim arbitrarie aſſumti, qui tamen

men incognitis sunt proportionales, ut dein horum ope adhibita regula trium ipsi incogniti reperiantur. Exemplo sit problema superius hunc in modum propositum: partiendum est damnum 2400 librarum ex summa collata a Petro, Jacobo, & Joanne: fuit autem portio Joannis æqualis summæ portionum reliquorum duorum; & Petrus dedit dimidium illius, quod contribuit Jacobus.

Quoniam non datur quantitas a singulis mercatoribus collata, sed solum ratio partium, substituantur interim quantitates proportionales, ponaturque Petrus dedisse 10 libras, Jacobus 20, Joannes 30, quarum summa est 60 libr: tum fiant hæ proportiones: ut 60 lib: sunt ad damnum totum 2400 libr: ita 10 lib., 20 libr., 30 libr. sunt ad damna partialia 400 libr: 800 libr. 1200 libr:

Si pars Petri assumta fuisset 3 libr.: portio Jacobi fuisset 6, & Joannis 9 libr: quarum summa 18 lib: itaque ineunda proportio: ut 18 libr. ad 2400 libr. ita sunt 3, 6, 9 libr: ad 400, 800, & 1200 libr:

326. PROBLEMA II. *Datis termino primo, & quotiente progressionis, invenire terminum quemvis.*

Formula $m = aq^{n-1}$ (313). Itaque si petatur terminus v. g. undecimus progressionis, cujus terminus primus $= 1$, quotiens $= 4$, erit $a = 1$, $q = 4$, $n = 11$, terminus quæsitus $= m$: facta substitutione habebitur $m = 1 \times 4^{10} = 4^{10} = 1048576$.

327. Problema III. *Datis termino primo* a, *ultimo* ω, *& quotiente* q *progressionis Geometricæ, invenire summam* s.

Resolutio. In progressione Geometrica quivis terminus est antecedens rationis, excepto ultimo; & quilibet est etiam consequens rationis ejusdem, præter primum. Igitur summa omnium antecedentium æqualium rationum est $s - \omega$; & summa omnium consequentium $s - a$: est autem (310) $s - \omega : s - a :: a : aq$, ergo $aqs - aq\omega = as - aa$, seu (223) $qs - q\omega = s - a$; & $sq - s = q\omega - a$: denique

$$s = \frac{q\omega - a}{q - 1}.$$

328.

328. PROBLEMA IV. *Datis termino primo* a, *terminorum numero* n, *& quotiente* q, *invenire summam* s.

Formula $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, vel $s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$.

DEMONSTRATIO. Terminus ultimus progressionis est aq^{n-1}; habetur igitur; ut prius $s - aq^{n-1} : s - a :: a : aq$; hinc $saq - aaq^n = sa - aa$, & divisis omnibus per a habetur $sq - aq^n = s - a$; unde $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$.

329. PROBLEMA V. *Datis quotiente* q, *numero terminorum* n, *& summa* s, *invenire singulos terminos progressionis.*

Formula $a = \frac{sq - s}{q^n - 1}$ vel $a = s\frac{q - 1}{q^n - 1}$. Hæc formula ex æquatione præcedentis problematis eruta præbet terminum primum; & si hic multiplicetur per potentias continuo crescentes quotientis, habebuntur omnes reliqui termini, qui erunt $s\frac{q^2 - q}{q^n - 1}$, $s\frac{q^3 - q^2}{q^n - 1}$, $s\frac{q^4 - q^3}{q^n - 1}$, $s\frac{q^5 - q^4}{q^n - 1}$ &c; vel etiam $s\frac{q - 1}{\frac{q^{n-1} - 1}{q}}$, $s\frac{q - 1}{\frac{q^{n-2} - 1}{q^2}}$, $s\frac{q - 1}{\frac{q^{n-3} - 1}{q^3}}$, $s\frac{q - 1}{\frac{q^{n-4} - 1}{q^4}}$, &c.

330. PROBLEMA. VI. *Datis terminorum numero* n, *terminis primo* a, *& ultimo* ω, *invenire progressionis quotientem* q.

Formula $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$. Nam (312) $\omega = aq^{n-1}$.

331. PROBLEMA VII. *Datis in progressione Geometrica termino primo* a, *ultimo* ω, *& quotiente* q, *invenire numerum terminorum* n.

RESOLUTIO. Æquatio $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$ (323) multiplicetur per q; fiet $\frac{\omega q}{a} = q^n$. Ex hoc vero manifestum est, quod si terminus ultimus ω ducatur in quotientem progressionis q, & factum dividatur per terminum primum a, quotus, qui obtinetur, æqualis ſit quotienti progreſſionis elevato ad eam potentiam, cujus exponens eſt numerus terminorum quæſitus n. Igitur ſi quotiens progreſſionis elevetur ſucceſſive ad potentias ordine ſeſe conſequentes, donec aliqua æquetur quoto illius diviſionis, numerusque potentiarum notetur, ad quas ſucceſſive quotiens progreſſionis elevatus eſt, facile terminorum numerus cognoscetur. Sit exempli cauſa $a = 5, q = 3$, $\omega = 3645$; ducatur 3645 in 3; factum 10935 dividatur per 5; erit quotus 2187. Elevetur quotiens progreſſionis 3 ad ſecundam, tertiam, quartam &c potentiam, donec reperiatur aliqua æqualis quoto 2187; ſunt autem hæ potentiæ 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187; & cum 2187 ſit potentia ſeptima quotientis 3, numerus terminorum quæſitus eſt 7. Reipsa progreſſio eſt $\div$ 5. 15. 45 135. 405. 1215. 3645.

Facillime repertus fuiſſet is exponens, ſi logarithmus numeri 2187 fuiſſet diviſus per logarithmum numeri 3.

332. Problema VIII. *Inter datos duos terminos invenire quotvis medios proportionales.*

Primo. Oporteat inter terminos a & b invenire unum; erit $\div\, a.x.b$; conſequenter (316) $ab = xx$, & (225) $x = \sqrt{ab}$.

Secundo. Sint inter a & b duo medii reperiendi. Habebitur $\div\, a.x.y.b$; & (318) $a:b::a^3:x^3$, conſequenter $a^3 b = a x^3$, & dividendo per a utrumque membrum, $aab = x^3$, ſive $x = \sqrt[3]{aab}$. Habito jam primo & ſecundo termino, facile tertius reperietur, cum ſit $a : \sqrt[3]{aab} :: y : b$, & omnibus terminis elevatis ad tertiam potentiam, $a^3 : aab :: y^3 : b^3$, ideoque $y^3 = \frac{a^3\, b^3}{aab} = abb$, & $y = \sqrt[3]{abb}$.

Tertio. Generaliter: ſi inter a & b inveniendus ſit, numerus mediorum n erit locus, quo b diſtat ab a, $n + 1$; hinc erit (318) $a^{n+1} : x^{n+1} :: a : b$. Quare $\frac{a^{n+1} b}{a}$ (seu $a^n b$)

$= x^{n+1}$, & extracta radice $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, five . . . $x = a^{\frac{n}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}$. Atque ita terminus primus e mediis quæfitis habetur. Quod fi idem calculus applicetur reliquis, reperietur alter $\sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2}$, tertius $\sqrt[n+1]{a^{n-2}b^3}$, quartus $\sqrt[n+1]{a^{n-3}b^4}$, & fic deinceps, donec exponens quantitatis b fiat $= n + 1$, quo cafu eft exponens termini $a = 0$ & terminus $\sqrt[n+1]{a^0 b^{n+1}}$ reducitur ad b.

333. Problema IX. *Inter binos quosvis terminos progreffionis Geometricæ invenire numerum* m *mediorum proportionalium.*

Refolutio. Sit data progreffio Geometrica $\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3$ &c: quæratur numerus m terminorum Arithmetice proportionalium inter binos quosvis exponentes progreffionis Geometricæ datæ; habebuntur exponentes terminorum mediorum Geometrice proportionalium, qui inter binos progreffionis datæ terminos quærebantur (319). Exempli caufa fi petantur tres termini inter binos quoslibet progreffionis datæ fiet . . .

$$\div aq^{0} . aq^{\frac{1}{4}} . aq^{\frac{1}{2}} . aq^{\frac{3}{4}} . aq^{1} . aq^{1\frac{1}{4}} . aq^{1\frac{1}{2}} . aq^{1\frac{3}{4}} . aq^{2} .$$
&c.

DE

DE LOGARITHMIS.

De Logarithmorum Natura, & Usu.

334. Logarithmi sunt numeri certo artificio compositi, qui si alias usitatorum loco adhibeantur, omnem multiplicationem in additionem, omnem divisionem in subtractionem mutant.

Diximus jam, quamvis progressionem Geometricam exhiberi posse hac formula $\div\!\!\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5 . aq^6 . aq^7 . aq^8$. &c, in qua per a & q quosvis numeros designare licet: unde si ponatur $a = 1$, ea mutabitur in $\div\!\!\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5 . q^6 . q^7 . q^8$. &c. Hinc autem infertur . . . .

335. I. Factum duorum terminorum quorumvis hujus progressionis habere exponentem æqualem summæ exponentium eorum terminorum (142), uti factum $q^3 \times q^4 = q^7$. Quando igitur *quæritur, quinam terminus progressionis æquetur facto duorum aliorum, ille sumendus est, cujus exponens æqualis est summæ illorum exponentium.*

336. II. Quotientem duorum terminorum esse illum, cujus exponens æquatur differentiæ exponentium duorum illorum. v. g. quotus ex q^8 diviso per q^5 est q^3, seu q^{8-5}. Quare *ut habeatur terminus progressionis æqualis quotienti duorum quorumlibet, quæratur ille, cujus exponens est differentia exponentium duorum aliorum.*

337. *Logarithmus numeri est exponens potentiæ decadis, quæ potentia æqualis est illi numero.* Itaqua posita progressione Geometrica . . . .

$\div\!\!\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . 10^5 . 10^6$. &c

& substituto valore horum terminorum . , .

$\div\!\!\div$ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. &c.

Exponens o eſt logarithmus unitatis, ſeu 1; exponens 1 eſt logarithmus numeri 10; exponens 2 logarithmus numeri 100; exponens 3 logarithmus numeri 1000 &c. At quoniam exponentes iſti non præbent logarithmos, niſi tantum numerorum integrorum in progreſſione decupla 1, 10, 100, 1000 &c, & præterea neceſſe eſt, habere logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 &c; iisdem exponentibus ſingulis additæ ſunt 7 notæ decimales, quo factum eſt, ut forma progreſſionis mutaretur in hanc . . . .

$$\because 10^{0,0000000} \,.\, 10^{1,0000000} \,.\, 10^{2,0000000} \,.\, 10^{3,0000000} \,.\, \&c.$$

Jam vero (319) quamdiu hi exponentes ſunt in progreſſione Arithmetica, valores decadis elevatæ ad eas potentias, quas hi exponentes deſignant, conſtituunt progreſſionem Geometricam. Quare ſi iidem exponentes ſucceſſive creſcant una decies milli-

oneſima parte, ſive $\frac{1}{10000000}$; ſeu, quod idem eſt,

ſi inter binos quoslibet interſerantur 9999999 medii Arithmetice proportionales, nova orietur progreſſio Geometrica, cujus priores termini ſunt . . .

$$\because 10^{0,0000000} \,.\, 10^{0,0000001} \,.\, 10^{0,0000002}$$

$$10^{0,0000003} \,.\, 10^{0,0000004} \,.\, \&c.$$

In hac autem progreſſione Geometrica termini ab unitate incipientes tardiſſime creſcunt, cum primi valor ſit 1, & termini poſt primum decies millioneſimi valor ſolummodo 10. Hinc ex decem millionibus terminorum intermediorum erit unus aliquis, qui valeat 2; alius, qui valeat 3; alius rurſus, qui va-

le-

leat 4 &c. Atque hac ratione repertum eſt. termini $10^{0,3010300}$ valorem eſſe 2; terminum $10^{0,4771213}$ eſſe $= 3$; $10^{0,6020600} = 4$ &c; conſequenter etiam exponentes horum terminorum ſunt logarithmi numerorum 2, 3, 4 &c.

338. His principiis, quorum uſus planior redditus eſt ope regularum, quæ elementis altius aſſurgunt, nititur calculus tabularum logarithmorum pro numeris ab 1 usque ad 100000 conſtructarum, quarum ope etiam logarithmi pro numeris majoribus inveniri poſſunt. In his tabulis quandoque majoris accurationis cauſa logarithmi habent decem, immo quindecim notas decimales; plerumque ſeptem, quarum etiam poſtremæ duæ in uſu ſæpius negliguntur. Tabularum paſſim adhiberi ſolitarum initium eſt.

Numeri	Logarithmi.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0.4771213
4	0,6020600
5 &c.	0,6989700 &c.

339. Hinc porro colligitur *primo*, logarithmos omnium numerorum inter 1 & 10 incipere a 0; logarithmos eorum, qui ſunt inter 10 & 100, primam notam habere 1; qui vero continentur inter 100 & 1000, eorum logarithmos habere primam notam 2 &c. Prima hæc nota (quæ eſt quantitas integra exponentis) dicitur *Characteriſtica* logarithmi, quod ea indice intelligatur, quot notis numerus logarithmo dato reſpondens conſtet. Etenim facile patet, a numero notarum debere unitate excedi characteriſti-

cam

cam. Sic, ut primum datur logarithmus 4,8145605, colliget quivis, ei competere numerum e quinque notis compositum, utpote cum characteristica logarithmi sit 4.

340. Colligitur *secundo*, facti duorum numerorum (335) logarithmum esse summam logarithmorum utriusque numeri; & logarithmum quotientis esse differentiam logarithmorum dividendi & divisoris. Ut itaque multiplicetur numerus 48 per 166, addantur utriusque logarithmi, nempe 1,6812412, & 2,2201041, summa 3,9013493, est logarithmus facti, cui in tabulis respondet numerus $7968 = 48 \times 166$. Si dividendus sit numerus 7336 per 56, subtrahatur logarithmus divisoris 1,7481880 a logarithmo dividendi 3,8654593; differentia 2,1172713 est logarithmus quoti, cui in tabulis convenit numerus 131. Habetur igitur quotus 131 ex divisione 7336 per 56.

341. Colligitur *tertio*, *ut regula trium per logarithmos fiat, oportere logarithmos termini secundi & tertii addere, & a summa subtrahere logarithmum termini primi; residuum fore logarithmum quarti quaesiti*. Exemplum. Dentur $2843:8529::3147:x$. Ut terminus x inveniatur, juxta leges alias praescriptas (329), debet 3147 multiplicari per 8529, & factum 26840763 dividi per 2843, tumque habetur quotiens $9441 = x$. Verum operatio haec longa est, nec errandi caret periculo, nisi magna adhibeatur attentio. Sed si logarithmis utamur, solum opus est, ut numerorum 8529 & 3147 logarithmi, scilicet 3,93090 & 3,49790 addantur, & a summa 7,42880 auferatur 3,45378, logarithmus numeri 2843; residuo 3,97502, quod est logarithmus quaesiti x, in tabulis respondet numerus 9441.

342. Colligitur *quarto*; *ut quantitas quaepiam ad certam potentiam elevetur*, ejus logarithmum sibi ipsi toti-

es

es addendum esse, quoties illa quantitas per se multiplicari deberet, ut haberetur potentia petita; hoc est, *ejus logarithmum multiplicandum esse per exponentem potentiæ*. v. g. Ut 8 elevetur ad quartam potentiam, ducatur ejus logarithmus 0,90309 in 4, factum 3,61236 est logarithmus numeri 4096, seu quartæ potentiæ numeri 8.

343. Colligitur denique: *Si logarithmus quantitatis datæ dividatur per exponentem radicis extrahendæ ex ea quantitate, quotientem fore logarithmum radicis quæsitæ.* Ut extrahatur radix cubica ex 6859, hujus numeri logarithmus 3,83626 dividatur per 3; quotiens 1,27875 est logarithmus radicis quæsitæ, cui respondent in tabulis 19.

De usu Tabularum Logarithmorum præcipue in fractionibus.

344. Tabulis logarithmicis plerumque jungitur instructio, ex qua lector usum intelligat; ac propterea nos in præsens pauca hac de re adferemus, illo contenti, si rationem utendi logarithmis, quando numeri fracti exhibendi sunt, rite exposuerimus: res hæc summo cum laboris compendio, ingentique utilitate conjuncta est; sed methodus, qua utemur, raro satis explicate traditur.

Imprimis itaque sciendum est, quod si detur logarithmus alicujus numeri valorem quantitatis non accurate exprimentis, ut acquiratur is numerus cum fractione decimali adjungenda, Characteristica logarithmi dati tot unitatibus augenda sit, quot notæ in fractione decimali desiderantur, & numerus logarithmo sic aucto respondens quærendus: ubi hic repertus est, separentur versus partem dextram interposita virgula tot notæ, quot unitates logarithmi dati characteristicæ sunt adjectæ; erunt hæ notæ fractio decimalis quæsita. Quæratur v. g. numerus accuratior, quam qui respondet logarithmo 1,7413364 in tabulis; sumatur ejus loco logarithmus 3,7413364, & quæratur numerus proxime huic in tabulis respondens, qui est 5512; separatis

tis postremis duabus notis habetur valor accuratior 55, 12 competens logarithmo 1,7413364. Si Characteristicæ additæ fuissent 4 unitates, sive substitutus logarithmus, 5,7413364, inventus fuisset valor 55,1235. Ratio hujus facile intelligitur. Logarithmus, cujus characteristica augetur una, duabus, tribus &c unitatibus, fit logarithmus numeri ejusdem per 10, 100, 1000 &c multiplicati: quod si itaque valor hujus producti dividatur per 10, 100, 1000 &c, (hoc est, si resecentur una, duæ, tres &c notæ ex parte dextra (72)), necesse est, ut habeatur valor numeri quæsiti cum fractione decimali.

Ex eadem ratione manifestum, quod si inveniendus sit logarithmus numeri habentis annexam fractionem decimalem, quærendus sit logarithmus competens illi numero ita considerato, quasi una cum notis decimalibus constitueret unicum numerum integrum; tum a logarithmi reperti Characteristica tot auferendæ sint unitates, quot notæ decimales erant in fractione integro annexa.

345. His positis, cum fractiones proprie dictæ sint quantitates unitate minores (76), & logarithmus unitatis sit o (337); sequitur, logarithmos fractionum debere esse defectivos sive negativos, præfixo eorum Characteristicæ signo —; verum quod ad operandi rationem, hi logarithmi tractari possunt, ac si essent positivi, supponendo scilicet, characteristicam logarithmi unitatis esse 10, 100, vel 1000 &c; & facta semel tali suppositione, omnes logarithmi, qui ex operatione quavis in fractionibus instituta prodeunt, respondent fractionibus decimalibus quarum notas præcedunt tot zeri dempto uno, quot unitatibus ejusmodi logarithmorum characteristicæ a 10, 100, 1000 &c deficiunt. En sequentem tabulam!

Numeri Naturales.		*Logarithmi Tabulares.*	*Logarithmi Hypothetici.*	
10000 ...	+	4,0000000 ...	14.0000000 ...	104,0000000
1000. . .	+	3,0000000 ...	13,0000000 ...	103,0000000
100 . . .	+	2,0000000 ...	12,0000000 ...	102,0000000
10	+	1,0000000 ..	11,0000000	101,0000000
1	±	0,0000000 ..	10,0000000	100,0000000
0,1	—	1,0000000 ...	9,0000000	99,0000000
0,01 . . .	—	2,0000000 ...	8,0000000	98,0000000
0,001 . . .	—	3,0000000 ...	7,0000000	97,0000000
0,0001	—	4,0000000 ...	6,0000000	96,0000000 &c.

Nos

Nos ſupponemus iſthic, characteriſticam logarithmi unitatis eſſe 10 (id, quod plerumque in calculis ſufficit, quando nempe non occurrunt fractiones prorſus exiguæ, uti quæ partibus centies-millioneſimis forent minores, quarum fortaſſis ratio habenda eſſet: tunc enim characteriſtica logarithmi unitatis ſumi deberet = 100). Hinc quotiescunque poſt operationem quampiam characteriſtica logarithmi excedet 10, eum ad numerum integrum pertinere conſtabit, qui tot notis plus una ſit compoſitus, quot unitates ſupra 10 habuerit characteriſtica; & quotiescunque characteriſtica logarithmi a 10 deficiet, is pertinebit ad fractionem decimalem, cujus notas tot præcedant zeri minus uno, quot unitatibus characteriſtica fuerit infra 10.

346. I. Quotiescunque logarithmus major ſubtrahendus eſt e minore, ut cum 4 dividi debent per 7, augeatur decade characteriſtica logarithmi numeri dividendi; in præſente exemplo loco 0,60206, qui eſt logarithmus tabularis numeri 4, ſumatur 10,60206, & a logarithmo ita aucto ſubtrahatur logarithmus tabularis numeri diviſoris, hic nempe numeri 7, qui eſt 0,84510; reſiduum 9,75696 erit logarithmus quotientis. Atque hunc in modum fractionum paſſim uſitatarum logarithmi reperiuntur.

347. II. Ut vero inveniatur valor logarithmi cujusvis in fractionibus decimalibus, is logarithmus quæratur in tabulis, velut ſi ejus characteriſtica foret 3, 4, 5 &c, prout ſcilicet quatuor, quinque, ſex &c notæ decimales deſiderantur: numero correſpondenti reperto præfigantur tot zeri, quot unitatibus characteriſtica logarithmi dati deficit a 9.

Exemplum: quærendus ſit valor logarithmi 5,41867, quem pertinere ad fractionem alias conſtet. Quæratur idem logarithmus cum characteriſtica 3, nempe 3,41867, inter tabulares; invenietur numerus proxime reſpondens 2622; & quoniam characteriſtica logarithmi dati 5 deficit a 9 quatuor unitatibus, erit fractio quæſita 0,00002622. Eodem modo invenitur, logarithmo 9,45924 convenire fractionem 0,2879; logarithmo 3,48365 competere 0,000000030455, &c.

348. III. Si proponatur fractio multiplicanda per alteram fractionem, earum logarithmi (inventi ſcilicet per N. 347) adduntur, & a characteriſtica ſummæ auferuntur 10; reſiduum eſt logarithmus facti. v. g. Si fractio $\frac{7}{12}$ ducenda in $\frac{147}{81230}$, utriusque logarithmi 9,76592, & 7,25760 colligantur in unam ſum-

mam 17,02350, cujus characteristica si minuatur decade, residuum 7,02350 est logarithmus facti datarum fractionum, nempe 0,0010556. Eodem modo si multiplicanda sit fractio 0,0047 per 0,000051, logarithmus illius 7,67210 addatur logarithmo hujus 5,70757; erit logarithmus facti 3,37967, cui competit fractio 0,0000002397. Cur autem a characteristica summæ logarithmorum subtrahi debeant 10, ratio est; quod sit (44) unitas ad multiplicatorem, ut est multiplicandus ad productum; quando igitur inveniendum est productum duarum fractionum, v. g. $\frac{7}{12}$ & $\frac{147}{81230}$, facienda est hæc proportio, $1 : \frac{7}{12} :: \frac{147}{81230} : \frac{7}{12} \times \frac{147}{81230}$; consequenter si logarithmis utamur, addendi sunt logarithmi terminorum mediorum proportionis (341), & a summa auferendus logarithmus unitatis, qui per hypothesin est 10.

349. IV. Si fractio per fractionem dividenda sit, characteristica logarithmi fractionis dividendæ augeatur decade, & a summa subtrahatur logarithmus fractionis, per quam divisio facienda; erit residuum logarithmus quotientis. Est enim (53) divisor ad unitatem, ut dividendus ad quotientem. Sic si oporteat $\frac{7}{12}$ dividere per $\frac{147}{81230}$, logarithmus 7,25760 auferatur a logarithmo 19,76592, erit logarithmus 12,50832 quotientis, cui competit numerus integer 322, seu accuratius 322,35.

350. V. Quando fractio elevanda est ad potentiam quamvis m, multiplicetur logarithmus fractionis datæ per exponentem potentiæ m, & a characteristica facti subtrahatur factum $\overline{10 \times m - 1}$. Exempli causa petatur quinta potentia fractionis 0,17; ducatur ejus logarithmus 9,2304489 in 5, & a characteristica facti 46,1522445 auferatur $10 \times \overline{5 - 1} = 40$; residuum 6,1522445 est logarithmus fractionis 0,000141985 7, quæ est quinta potentia datæ 0,17.

351. VI. Ut radix quævis extrahatur ex fractione data, augeatur characteristica logarithmi fractionis facto ex 10 in exponentem radicis unitate mulctatum, summa dividatur per exponentem radicis integrum. Exemplum. Quæratur radix undecima fractionis 0,17; characteristicæ ejus logarithmi 9,2304489 addantur 100, sive $10 \times \overline{11 - 1}$, summa 109,2304489 dividatur per 11; quotiens 9,930444 erit logarithmus fractionis 0,85193, quæ est radix undecima datæ 0,17. Similiter, ut inve-

veniatur radix quinta fractionis $\frac{7}{12}$, ejus logarithmi characteristica 9,76592 augeatur 40, seu facto $\overline{10 \times 5 - 1}$: summa 49,76592 divisa per 5 dat quotum 9,95318, qui est logarithmus 0,8978, radicis quintæ fractionis datæ $\frac{7}{12}$.

352. Ut postremarum regularum veritas constet, illud advertendum, quod quantitatem aliquam elevare ad suas potentias ordine sibi succedentes, nihil aliud sit, quam hasce successive proportiones facere $1:a::a:a^2$, dein $1:a::a^2:a^3$; tum $1:a:a^3:a^4$ &c. Sit igitur $a = 0,17$, cujus logarithmus est 9,23045; patet, haberi logarithmum de a^2, si fiat $9,25045 + 9,23045 - 10,00000 = 8,64090$; item logarithmum de a^3 fore $9,23045 + 8,64090 - 10,00000 = 7,69135$; logarithmum de a^4 $9,23045 + 7,69135 - 10,00000 = 6,92180$ &c. Ex quo manifestum est, subtrahendum esse toties logarithmum unitatis, quot unitates dempta una habet exponens potentiæ. Verum illud quoque apparet, hanc regulam locum habere, si numeri integri elevandi sint ad quasvis potentias, dum logarithmus unitatis non supponitur æqualis o. Idem ratiocinium applicetur logarithmis radicum.

Ex omnibus hisce apparet, characteristicas esse in tabulis logarithmorum numerorum naturalium notas prorsus inutiles, cum calculatoris sit iis utentis, in singulis, quibus eos adhibet, casibus illarum valorem determinare.

DE PROPRIETATIBUS MAGNITUDINIS, *SI SPECTETUR UT INFINITA.*

353. Propositio I. *Magnitudo est divisibilis in infinitum.*

Demonstratio. Magnitudo per naturam suam capax est augmenti & decrementi: igitur etiam aucta, vel diminuta naturam suam retinet, consequenter adhuc incrementi vel decrementi capax est; adeoque sine fine, seu in infinitum. Exempli causa, series naturalis numerorum 1, 2, 3, 4 &c evidenter in infinitum crescit: ad quamcumque enim magnitudinem aliquis hujus feriei terminus pervenerit, nondum ultimo vicinior eſt, id, quod fieri nequit in ſerie, cujus terminorum numerus ſit finitus.

Jam vero licet termini infiniti hujus progreſſionis numeris exprimi nequeant; cum tamen maneant *magnitudines*, quamvis infinitæ, non deſinunt habere proprietates finitas, quo fit, ut calculo ſubjici poſſint, ſi charactere quopiam, velut ∞, deſignentur, atque hinc tota numerorum ſeries hunc in modum poterit exhiberi $1.2.3.4.5\ldots\ldots\infty$

Simili ratione quantitas finita in partes ſemper minores, & minores dividi poteſt, donec diviſione in infinitum continuata deveniatur ad partem infinite parvam; ut adeo unitas in ſuas partes diviſa repræſentari poſſit hac ſerie $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\ \ .\ \ .\ \ .\ \frac{1}{\infty}.$

354. Propoſitio II. *Quantitas, quæ in infinitam abiit, non eſt amplius capax augmenti vel decrementi, niſi infiniti.*

Demonſtratio. Si quantitas finita in infinitam abiit, omnia ſua incrementa finita poſſibilia acquiſivit; igitur nulla quantitate finita amplius augeri poteſt. Eodem modo ſi quantitas abiit in infinite parvam, omnibus decrementis finitis poſſibilibus jam imminuta eſt, hinc nulla amplius quantitate finita poteſt minui. Atqui quantitas, quæ ſeu in infinite magnam, ſeu in infinite parvam abiit, nihilo minus adhuc eſt quantitas, atque adeo incrementi & decrementi capax: quare neceſſe eſt, ut hoc incrementum vel decrementum infinitum ſit.

Sic $\infty \pm 1 = \infty$, $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$; ſed $\infty + \infty = 2\infty$; & $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$, $\frac{2}{\infty}$ divis: per $\frac{a}{\infty} = \frac{2}{a}$, &c.

355. Coroll: I. *Quantitas finita addita vel subtracta a quantitate infinite magna, in calculo negligi potest, & supponi* $= 0$. Itaque $\infty \pm a = \infty$. Idem est censendum de quantitate infinite parva respectu quantitatis finitæ; sic $a \pm \frac{1}{\infty} = a$.

356. II. *Quantitatum infinitarum dantur infinitæ species*, sive ordines. Nam potest v. g. concipi hæc progressio Arithmetica $\div 1\infty . 2\infty . 3\infty \ldots \infty\infty$, cujus ultimus terminus $\infty\infty$, seu ∞^2, primum infinities excedit. Jam vero est $\infty^2 + \infty^2 = 2\infty^2$; & hinc rursus concipere possumus alteram progressionem $\div 1\infty^2 . 2\infty^2 . 3\infty^2 . 4\infty^2 . \infty\infty^2$, seu ∞^3, cujus ultimus terminus est infinities major primo. Simili ratiocinio ex nova $\div 1\infty^3 . 2\infty^3 . 3\infty^3 . 4\infty^3 . \ldots \infty\infty^3$ habetur ∞^4, & universim devenietur ad ∞^{∞}, imo $\infty^{\infty^{\infty}}$ in infinitum.

Idem est de quantitatibus infinite parvis: nam potest concipi series $\frac{1}{\infty} . \frac{1}{2\infty} . \frac{1}{3\infty} \ldots \ldots \frac{1}{\infty\infty}$, seu $\frac{1}{\infty^2}$, in qua terminus postremus infinities minor est primo. Ulterius in serie $\frac{1}{\infty^2} . \frac{1}{2\infty^2} . \frac{1}{3\infty^2} \ldots \frac{1}{\infty\infty^2}$ sive $\frac{1}{\infty^3}$, rursus ultimus terminus est infinities minor primo. Et universim potest concipi - - - - $\frac{1}{\infty^{\infty}}$, imo $\frac{1}{\infty^{\infty^{\infty}}}$ in infinitum &c.

357. Exponentes quantitatum infinitarum exprimunt, cujus ordinis quæque sit: ut ∞, 3∞, quarum exponens est 1, sive ∞^1, $3\infty^1$, sunt quantitates in-

infinite magnæ primi ordinis; $3\infty^4$, $ab\infty^4$, ſunt magnitudines infinitæ quarti ordinis. Similiter $\frac{4}{\infty}$, $\frac{d}{3\infty}$, ſunt quantitates infinite parvæ primi ordinis; $\frac{1}{a\infty^2}$, eſt infiniteſima ſecundi ordinis, &c.

358. Obſerva, quantitates infinite parvas exprimi, dum nota infiniti ponitur in denominatore fractionis, cujus numerator eſt quantitas finita, vel infinita inferioris ordinis. Quotieſcunque autem ſignum infiniti non eſt in denominatore, denotantur quantitates infinite magnæ.

359. III. *Ordines diverſi infinitorum, ut ſeſe conſequuntur, conſtituunt progreſſionem Geometricam.* Etenim eorum exponentes progrediuntur in ſerie naturali continua numerorum; ſic $\div\!\!\div\ \infty^4 . \infty^3 . \infty^2 . \infty^1 . \infty^0 . \infty^{-1} . \infty^{-2} . \infty^{-3}$. &c, quæ ſeries eadem, ac $\div\!\!\div\ \infty^4 . \infty^3 . \infty^2 . \infty^1 . 1 . \frac{1}{\infty} . \frac{1}{\infty^2} . \frac{1}{\infty^3}$ &c.

360. IV. *Infinitum ordinis cujuscunque nequit augeri vel minui additione vel ſubtractione numeri finiti infinitorum ordinis inferioris;* hoc eſt unum, plurave infinita ordinis inferioris ſunt $=0$ reſpectu infiniti ordinis ſuperioris. Itaque $\infty^2 \pm a\infty = \infty^2$; ſimiliter $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

361. V. *Si infinitum multiplicetur vel dividatur per infinitum, factum, vel quotiens eſt quantitas ejus ordinis, quem indicat exponens facti, vel quotientis.* Ut $\infty \times \infty = \infty^2$; $3\infty \times b\infty = 3b\infty^2$; hoc eſt, ſi infinitum primi ordinis ducatur in infinitum primi ordinis, factum eſt infinitum ſecundi ordinis.

∞

$\infty^2 \times \infty = \infty^3$; $3\infty^4 \times 4\infty^5 = 12\infty^9$; itaque factum duorum infinitorum eſt infinitum ordinis, quem indicat ſumma exponentium.

$\infty \times a = a\infty$: igitur factum ex infinito in finitum, eſt infinitum ejusdem ordinis.

$\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$; eſt ergo factum ex infinite magno in infinite parvum ejusdem ordinis, quantitas finita.

$\frac{1}{\infty} \times a = \frac{a}{\infty}$; $\frac{1}{4\infty^3} \times 2b = \frac{b}{2\infty^3}$, hoc eſt, factum ex infiniteſima in quantitatem finitam, eſt quantitas infiniteſima ejusdem ordinis.

Sic quoque in diviſione $\frac{\infty}{\infty} = 1$; $\frac{\infty}{b\infty} = \frac{1}{b}$; ſive quotiens ex diviſione infiniti per infinitum ejusdem ordinis, eſt quantitas finita.

$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$; ſi dividatur infinitum per infinitum ordinis inferioris, quotiens eſt quantitas infinita ordinis inferioris, quem indicat exponentium differentia.

$\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$; quotiens ex diviſione infiniti per infinitum ordinis ſuperioris eſt infiniteſima ordinis indicati per exponentium differentiam.

Nonnullæ notiones de ſeriebus; de earum natura, & formatione.

362. *Series* dicitur terminorum ſeſe invicem ſequen-

quentium collectio, qui ordine continuo juxta certam aliquam legem crescunt vel decrescunt: hujusmodi sunt progressiones Arithmeticæ, & Geometricæ.

363. *Series finita* est, cujus terminorum numerus est limitatus; *series infinita* vero, quæ in infinitum continuari supponitur.

364. *Series divergentes* appellantur, in quibus termini continuo crescunt; quorum autem termini perpetuo decrescunt, dicuntur *convergentes*. Series eo magis divergit, vel convergit, quo terminus quisque immediate præcedente major, vel minor est.

365. Tres præcipue serierum classes apud Mathematicos in considerationem veniunt; series numerorum *figuratorum*, sive diversorum ordinum; series numerorum polygonorum; & series potentiarum.

I. Series numerorum figuratorum sic incipiunt.

Numeri	Constantes, seu primi ordinis..	1	1	1	1	1	1,	&c.
	Naturales, seu 2di ordinis..	1	2	3	4	5	6,	&c,
	Triangulares, seu 3tii ordinis..	1	3	6	10	15	21,	&c.
	Pyramidales, seu 4ti ordinis..	1	4	10	20	35	56,	&c.

366. Lex, quam observant series numerorum figuratorum, est, quod quivis ordine terminus æquetur summæ totidem terminorum seriei præcedentis. Hinc secunda series fit continua additione unitatum; tertia formatur continua additione terminorum secundæ. v. g. $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 3 = 6$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, &c.

367. II. Numeri polygoni formantur ex summa numerorum progressionis Arithmeticæ ab 1 incipientis, dicunturque triangulares, quadrangulares, pentagoni, hexagoni &c prout differentia progressionis Arithmeticæ, ex cujus terminorum summa oriuntur, fuerit 1, 2, 3, 4 &c. Exemplum:

Progressiones Arithmeticæ								*Numeri Polygoni.*				
1	2	3	4	5	&c:	Diff: 1 . .	1	3	6	10	15	&c. triangulares.
1	3	5	7	9	&c	Diff: 2 . .	1	4	9	16	25	&c. quadrangul.
1	4	7	10	13	&c.	Diff: 3 . .	1	5	12	22	35	&c. Pentagoni.
1	5	9	13	17	&c.	Diff: 4 . .	1	6	15	28	45	&c. Hexagoni.

Nomen polygonorum inde sortiti sunt, quod exhibeant numerum punctorum necessariorum, ut in lineis ad polygonorum regularium latera parallelis symmetrice disposita spatium impleant ejusmodi polygoni.

368. III. Series potentiarum sunt illæ, quæ constant quadratis, cubis &c numerorum 1, 2, 3, 4 &c ordine naturali crescentium.

369. Præter expositas numerorum series (quæ formulis Algebraicis generaliter exhiberi possunt) sæpe aliæ quoque occurrunt. v. g. Fractio decimalis, ut 0,3543 nil aliud est, quam series . . . .

$$\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{3}{10000}$$

(98). Si idem numerus successive dividatur per terminos progressionis Arithmetice, ut $\frac{7}{3}.\frac{7}{4}.\frac{7}{5}.\frac{7}{6}.\frac{7}{7}.\frac{7}{8}$ &c constituit seriem, quam *progressionem harmonicam* vocant. Quin possunt arbitrarie formari series compositæ ex aliis pluribus, si earum termini correspondentes quacunque operatione Arithmetica combinentur. Talis esset v. g. series . . . .

$$\frac{1}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{15}.\frac{8}{105}.\frac{16}{945}\ \&c,$$

cujus numeratores sunt progressio Geometrica in ratione dupla, denominatores vero sunt facta ex terminis seriei numerorum imparium, nempe ex primo; ex primo & secundo; ex primo, secundo & tertio; ex primo, secundo, tertio & quarto &c. Jam vero *si lex, juxta quam series aliqua composita est, non per se in oculos incurrit, ea series ita scribenda est, ut lex ex ipsa forma deprehendi possit.* Exempli causa; in serie postremo mo allata, quisque facile videt, numeratores conſtituere progreſſionem Geometricam in ratione dupla creſcentem; at qua ratione denominatores formati ſint, non ita pronum eſt deprehendere. Quod ſi vero eadem exhibeatur ſequenti forma (ubi loco ſigni $\times$ adhibita ſunt puncta, ut ſæpe in ſeriebus fieri ſolet) $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1.3}$, $\frac{4}{1.3.5}$, $\frac{8}{1.3.5.7}$, $\frac{16}{1.3.5.7.9}$, &c nihil æque expeditum eſt, ac legem ſeriei videre.

370. Sæpe quantitates, quæ in alias ſine reſiduo reſolvi nequeunt, reducuntur ad ſeries infinitas: ejuſmodi ſunt quotientes quantitatum, quæ non ſunt multipla diviſoris; item radices omnium potentiarum imperfectarum. Sit exempli cauſa inveniendus quotiens ex $\frac{1}{1+xx}$; ſi diviſio juxta leges alias præſcriptas inſtituatur, reperietur $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Nam ſi primo fiat $\frac{1}{1} = 1$; tum $1 \times \overline{1 + xx} = 1 + xx$, & ſubtrahatur hoc factum ex dividendo, relinquitur $1 - 1 - xx = -xx$: eſt igitur primus quotientis terminus 1. Si ulterius reſiduum $-xx$ dividatur per 1, alter quotientis terminus fit $-xx$; & $-xx \times \overline{1 + xx} = -xx - x^4$, quo ſubtracto e $-xx$, remanet x^4. Novo hoc reſiduo iterum per 1 diviſo, fit tertius terminus quotientis $+x^4$, & ſic deinceps.

Eadem operandi methodo invenitur $\frac{a}{b+x}$ $= \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} -$ &c. . .

Item

Item $\frac{aa}{x+b} = \frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3} -$ &c.

---

371. Detur $\sqrt{aa-xx}$ reducenda ad seriem infinitam; ea fiet . . .

$$a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{26a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$$
&c.

Etenim radix quadrata termini primi aa est a; subtracto aa ex quantitate data $aa-xx$, remanet $-xx$, quod cum dividi debeat per $2a$, erit terminus alter radicis $-\frac{xx}{2a}$, cujus quadratum $\frac{x^4}{4a^2}$ una cum facto ejusdem $-\frac{xx}{a2}$ in $2a$, sive $-xx$, si subtrahatur a primo residuo $-xx$, remanet $-\frac{x^4}{4aa}$ hoc alterum residuum divisum per duplum radicis adhuc inventæ $a-\frac{xx}{2a}$, hoc est, per $2a-\frac{xx}{a}$, dat tertium terminum radicis $-\frac{x^4}{8a^3}$, cujus factum in $2a-\frac{xx}{a^2}$ (nempe $-\frac{2ax^4}{8a^3}+\frac{x^6}{8a^4}$, sive $-\frac{x^4}{4a^2}+\frac{x^6}{8a^4}$) una cum quadrato $\frac{x^8}{64a^6}$, si subtrahatur ex secundo residuo $-\frac{x^4}{4a^2}$, relinquit $-\frac{x^6}{8a^4}$. . . .

$- \frac{x^8}{64a^6}$. Eadem radicem extrahendi methodus ſi continuetur, reliqui termini obvenient. Eſto exempli gratia $a = 5$, $x = 3$; erit $aa - xx = 25 - 9 = 16$, & $\sqrt{aa - xx} = 4 = 5 - \frac{9}{10} - \frac{81}{1000} - \frac{729}{50000}$ &c.

Pariter $\sqrt{aa + xx}$ abit in ſeriem $= a + \frac{xx}{2a} \ldots - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c.

Item $\sqrt{aa + bx - xx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} \ldots - \frac{bbxx}{8a^3}$, &c.

372. Ex his apparet, quod ſi ſemel habentur priores aliquot termini alicujus ſeriei per reſolutionem reperti, non alia re opus ſit, quam ut lex progreſſionis quæratur; hac quippe cognita, operoſiore reſolutione omiſſa ſeries continuari poteſt legem illam in terminis reliquis obſervando, modo ſufficiens prius terminorum numerus inventus fuerit, ut lex progreſſionis non poſſit eſſe dubia.

Exemplum. Si conſideretur ſeries radicis quantitatis $aa - xx$, reperietur ea æqualis quantitati a plus progreſſione Geometrica (cujus primus terminus $\frac{xx}{a}$, & quotiens communis $\frac{xx}{aa}$) in qua termini ſinguli multiplicati ſunt per ſingulos correſpondentes ſeriei $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{5}{128} - \frac{7}{256}$, &c. Illud igi-

igitur solum superest indagandum, ut reperiatur lex horum coefficientium, quæ est: . . . .

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1.1}{2.4}, -\frac{1.1.3}{2.4.6}, -\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} -\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$$

&c. Sunt igitur numeratores series naturalis crescens numerorum imparium; & denominatores series naturalis crescens numerorum parium; in utravis multiplicantur termini duo, tres, quatuor &c simul; tandem fractiones inde ortæ reducuntur ad expressionem simplicissimam.

De summatione Serierum.

373. In seriebus quidem omnes operationes Arithmeticæ locum habent; at cæteris uti longe utilior, ita etiam difficilior est *Summatio*, hoc est reductio seriei totius datæ ad terminorum expressionem finitam, in qua plerumque consistit resolutio problematum, quæ series ingrediuntur. Neque illud admodum operosum est, ut complura problemata eo reducantur, ut oporteat summam seriei infinitæ invenire, quandoquidem solutio problematis a resolutione æquationis quæstionem continentis dependet.

374. Porro facile intelligitur, quod si series infinita semper divergat, ejus summa terminis finitis nequeat haberi; at vero si convergat, sæpe ejus summa finita est, ut deinceps videbimus.

Etsi autem materia præsens sit e præcipuis Analyseos partibus, nobis tamen non licet eam minutim discutere; sed satis erit, si methodum summandi eas series, quarum frequentior est usus, maxime vero, quæ nobis in Geometria erunt necessariæ, tradiderimus.

375.

375. Artificium ſummandi ſeries quasvis in eo eſt, ut reperiatur methodus ſummandi paucas quasdam, quæ deinceps formularum inſtar ſint, ad quas aliæ, niſi quid obſtet, revocari poſſint, aut vero ut quæ illuc reduci per ſe nequeunt, reſolvantur in plures alias, ad formulas illas revocabiles, quæ proinde, cum ſingularum ſummæ haberi poſſint, in unam totalem colligantur.

376. I. Exemplum. Si ſemel reperta ſit formula ſummandi omnes terminos progreſſionis Geometricæ decreſcentis in infinitum, poterunt omnes ſeries ſummari, quæ reſolvuntur in alias, quarum termini conſtituant progreſſionem Geometricam decreſcentem.

Sit igitur $\div \frac{d}{b}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^4}, \ldots \ldots \frac{d}{bq^\infty}$ progreſſio infinita, cujus termini perpetuo decreſcunt, creſcente denominatore, ſi q ſupponatur unitate majus. At ſi ſcribatur $\div \frac{d}{bq^\infty} \ldots \frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{b}$, habetur ſeries creſcens; & ſi adhibeatur formula $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ (327), in qua $\omega = \frac{d}{b}$, $a = \frac{d}{bq^\infty}$, erit $s = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q - 1}$, & neglecto termino infinite parvo $\frac{d}{bq^\infty}$, reductioneque facta, $s = \frac{dq}{bq - b}$, quæ conſequenter erit formula ſum-

ſummandi quamvis progreſſionem Geometricam in infinitum decreſcentem.

377. Sit jam ſummanda ſeries fractionum, quarum numeratores ſint in progreſſione Arithmetica, & denominatores in progreſſione Geometrica, nempe $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$, &c. ſcribatur eadem prius hoc modo: $\frac{a}{b}, \frac{b}{b \cdot q} + \frac{d}{b\,q}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}$, $\frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}$, &c. Dein facile eruentur ſequentes ſeries, quæ omnes ſunt progreſſiones Geometricæ.

$$\div\!\div \frac{a}{b}, \frac{a}{bq}, \frac{a}{bq^2}, \frac{a}{bq^3}, \text{\&c ſumma} = \frac{aq}{bq-b};$$

$$\div\!\div \quad \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \text{\&c ſumma} = \frac{d}{bq-b}$$

$$\div\!\div \quad \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \text{\&c ſumma} = \frac{d}{bq^2-bq}$$

$$\div\!\div \quad \frac{d}{bq^3}, \text{\&c ſumma} = \frac{d}{bq^3-bq^2}$$

Jam vero patet, ſummas repertas (dempta prima) conſtituere ſequentem progreſſionem Geometricam

$\div\!\div$

$\div\!\div \frac{d}{bq-b}, \frac{d}{bq^2-bq}, \frac{d}{bq^5-bq^3}$ &c, cujus ſumma eſt $= \frac{dq}{bq^2-2bq+q}$, cui ſi addatur ſumma primæ ſeriei $\frac{aq}{bq-b}$, habebitur $\frac{aqq-aq+dq}{bqq-2bq+b}$ ſumma totalis omnium ſerierum.

Unde *eadem erit formula generalis ſummandi omnes ſeries fractionum, in quibus numeratores ſunt in progreſſione Arithmetica, & denominatores in progreſſione Geometrica.*

378. *Obſerva.* Quodſi ſeries infinita non poſſit revocari ad ſummam terminorum finitorum, illud agendum, ut reducatur ad talem formam, ut quam citiſſime convergat; *dum enim ſeries admodum cito convergit, ſufficit ſummare aliquot e terminis prioribus, reliquis citra errorem ſenſibilem neglectis.*

Sit exemplo $\sqrt{aa+xx}$, in qua quo quantitas x minor fuerit, quam a, eo citius converget ſeries $a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$ &c, cum numeratores admodum fiant exigui reſpectu ſuorum denominatorum. Ponatur $a=10$, & $x=1$, erit $\sqrt{101}=10+\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{1600000}-$ &c; eſt autem manifeſtum, quartum terminum jam eſſe admodum exiguum, ideoque ſolos tres primos terminos exhibere radicem numeri 101 veræ valde vicinam, nempe $10\frac{399}{8000}$.

379. Sit jam quærenda formula pro ſummandis quotcunque potentiis ordine creſcentibus ſeriei numerorum naturalium. Quæ ut reperiatur, ſequenti uti poſſumus ratiocinio.

Quoniam numeri ordine naturali progredientes ſemper differunt unitate, ſi ſumantur quotcunque, dicanturque l, m, n, p, q, r, erit $r = q + 1$, $q = p + 1$, $p = n + 1$, $n = m + 1$, $m = l + 1$; quod ſi jam hi termini eleventur ad ſuas potentias ſucceſſive altiores, ſiet

$$\begin{array}{l|l}
r^2 = q^2 + 2q + 1 & r^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\
q^2 = p^2 + 2p + 1 & q^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\
p^2 = n^2 + 2n + 1 & p^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
n^2 = m^2 + 2m + 1 & n^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\
m^2 = l^2 + 2l + 1 & m^3 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
r^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\
q^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\
p^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
n^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\
m^4 = l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1
\end{array}$$

colligantur ſingulæ potentiæ in ſingulas æquationes facta æqualium ſubſtitutione; habebitur

$$\begin{array}{rl|rl}
r^2 = & + 2q + 1 & r^3 = & + 3q^2 + 3q + 1 \\
 & + 2p + 1 & & + 3p^2 + 3p + 1 \\
 & + 2n + 1 & & + 3n^2 + 3n + 1 \\
 & + 2m + 1 & & + 3m^2 + 3m + 1 \\
l^2 & + 2l + 1 & l^3 & + 3l^2 + 3l + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} r^4 = & +\ 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\ & +\ 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\ & +\ 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ & +\ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\ l^4 & +\ 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1 \end{array}$$

380. Ex singulis hisce æquationibus eruuntur singula Theoremata: *Si dentur plures termini numerorum ordine naturali progredientium*, I° *quadratum ultimi* r^2 *est æquale quadrato primi* l^2, *plus dupla summa* $q + p + n + m + l$ *omnium terminorum ultimum præcedentium, plus* $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ *sive numero terminorum ultimum præcedentium*, II° *Cubus ultimi termini* r^3 *est æqualis cubo primi* l^3 *plus tripla summa quadratorum omnium terminorum ultimum præcedentium, plus tripla summa omnium terminorum ultimum præcedentium, plus tot unitatibus, quot termini sunt ante ultimum.* III°. *Potentia quarta termini ultimi* r^4 *æqualis est potentiæ quartæ termini primi* l^4, *plus quadrupla summa cuborum omnium terminorum ultimo anteriorum, plus sextupla summa quadratorum eorundem terminorum, plus quadrupla summa terminorum ultimum præcedentium, plus tot unitatibus, quot termini sunt ante ultimum.* Similia pro aliis potentiis eadem ratione reperiuntur.

381. Hinc vero deducitur, quod si primus terminus dicatur a ultimus ω, numerus terminorum ante ultimum sit $\omega - a$: & si porro summa omnium horum terminorum dicatur f; summa quadratorum eorundem f^2; summa cuborum f^3; fiet summa omnium terminorum ultimum præcedentium $= f - \omega$; summa quadratorum eorundem terminorum $= f^2 - \omega^2$, summa cuborum omnium horum terminorum $= f^3 - \omega^3$, &c; & Theorematis primi forma Algebraica erit $\omega^2 = a^2 + 2f - 2\omega + \omega - a$, seu reductione adhi-

hibita $\omega^2 = a^2 - a + 2\int - \omega$. Secundum Theorema ita exprimetur $\omega^3 = a^3 + 3\int^2 - 3\omega^2 + 2\int - 3\omega + \omega - a$, id est, $\omega^3 = a^3 - a + 3\int^2 - 3\omega^2 + 3\int - 2\omega$. Tertium denique $\omega^4 = a^4 + 4\int^3 - 4\omega^3 + 6\int^2 - 6\omega^2 + 4\int - 4\omega + \omega - a$; seu $\omega^4 = a^4 - a + 4\int^3 - 4\omega^3 + 6\int^2 - 6\omega^2 + 4\int - 3\omega$. &c.

Ex prima formula invenitur $\int = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$, qui valor si in secunda formula substituatur; fiet $\omega^3 = a^3 + 3\int^2 - \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a$, ex qua habetur $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$. Et si porro hic valor adhibeatur in tertia formula, ea mutabitur in hanc . . . .

$$\int^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2.$$

consimiles formulæ inveniri possunt pro potentiis altioribus.

382. Si terminus primus seriei sit o vel 1, fiet $\int = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$; $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega$; $\int^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2$.

De rationibus finitis, quas habent summæ infinitæ serierum infinitarum.

383. Etsi plurium serierum summæ sint infinitæ, atque adeo terminis finitis exhiberi nequeant; in sequentibus tamen apparebit, id non obesse, quo minus magnus earum in Geometria sit usus, præcipue dum earum ratio vera cognoscitur.

Exempli causa constat, *summam quadratorum omnium numerorum naturali serie progredientium esse æqualem tertiæ parti facti ex quadrato termini ultimi in numerum terminorum.*

Etenim si series reipsa infinita sit, ultimus terminus progressionis naturalis est ∞, adeoque hoc pro

ω in formula summæ quadratorum substituto habetur
$$\int^2 = \tfrac{1}{3}\infty^3 + \tfrac{1}{2}\infty^2 + \tfrac{1}{6}\infty - \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}a,$$
quæ reducitur ad $\int^2 = \frac{1}{3}\infty^3$, quod omnes reliqui termini sint infinities minores, quam $\frac{1}{3}\infty^3$. Atqui quadratum ultimi ∞^2 ductum in numerum terminorum per hypothesin ∞, est ∞^3, igitur summa omnium quadratorum est pars tertia hujus facti.

384. Simili calculo invenitur, *summam infinitorum cuborum numerorum in serie naturali progredientium esse partem quartam facti ex cubo termini ultimi in terminorum numerum.* Facta enim substitutione ∞ pro ω formula redit ad hanc $\int^3 = \frac{1}{4}\infty^4$. Et universim summa infinitarum potentiarum exponentem finitum m habentium ex numeris serie naturali progredientibus est $\dfrac{1}{m+1}$ facti potentiæ ∞^m termini ultimi in numerum terminorum ∞, seu $\int^m = \dfrac{1}{m+1}\infty^{m+1} = \dfrac{\infty^{m+1}}{m+1}$; id, quod etiam radicibus ejusdem exponentis numerorum serie naturali progredientium applicari potest. Nam si v. g. sumantur radices quadratæ, erit $m = \frac{1}{2}$ (173), & $m+1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$, & $\dfrac{1}{m+1} = \frac{2}{3}$; quare summa radicum quadratarum terminorum infinitorum ordine naturali progredientium est æqualis duabus tertiis partibus facti ex radice quadrata termini ultimi ducta in terminorum numerum. Est enim $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$, hoc est, $\frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}}\times\infty$.

PARS

PARS SECUNDA.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

385. Geometria eſt ſcientia quæ demonſtrat proprietates quantitatis continuæ, ſeu extenſæ.

Continui tres tantummodo ſunt dimenſiones, longitudo, latitudo, profunditas, ſeu craſſitudo.

386. Quamvis nulla detur in rerum natura quantitas continua, quæ non habeat omnes hasce tres dimenſiones ſimul; nihilominus quævis ſeparatim, ut a reliquis non dependens; vel etiam binæ tantum, quin tertia cogitetur, ſpectari poſſunt. Atque hunc in modum expendi poteſt viæ alicujus longitudo, quin latitudo ejus in conſiderationem veniat; ſic attentio figitur in planitie, quin de ſoli, quo conſtat, profunditate cogitetur.

387. Dimenſio unica ſeparatim conſiderata, *linea* appellatur; ſi duæ jungantur, *ſuperficies* efficitur; tres ſimul ſumtæ *corpus*, ſeu *ſolidum* conſtituunt.

388.

388. Geometræ præterea *punctum* considerant, velut quantitatem, cujus dimensiones sint infinite parvæ, cui propterea nulla extensio finita tribui possit.

SECTIO PRIMA

De Lineis.

Genesis, & proprietates generales Linearum.

389. Lineam motu puncti generari concipere possumus. Si punctum moveatur, quin in ullam partem deflectat, ejus via est linea *recta;* sicubi deflectat a via cæpta, lineam *curvam* describit.

390. Cogitare licet, lineam a puncto describi progressionibus infinite parvis; jam vero in progressu infinite parvo nullus flexus concipi potest. Unde si hunc in modum genesim lineæ nobis proponamus, erit *linea recta finita series infinitarum rectarum infinite parvarum, quæ singulæ directe sint positæ sine ullo flexu, sine ulla inclinatione alterius ad alteram; & linea curva finita series rectarum infinitarum infinite parvarum, quarum aliæ alias positiones habent.*

391 Quoniam progressus isti, quibus lineam describi fingimus, sunt infinite parvi, quilibet eorum puncto describenti æqualis censeri potest; hinc ipsa linea instar seriei punctorum erit; ex quibus manifestum fit . . . .

392. I. *Lineam rectam debere esse brevissimam, quæ inter duos terminos duci possit;* ideoque *eam esse veram mensuram distantiæ terminorum.*

393. II. *Lineæ rectæ unicam esse speciem; curvarum infinitas.*

394 III. *Puncta duo positione data sufficere, ut determinetur positio rectæ; sed pluribus opus esse, quam duobus, ut determinetur positio alicujus curvæ.*

Proprietates Linearum Rectarum.

Postulata.

395. I. Assumitur, *posse in plano duci lineas rectas versus omnem partem*, nempe in tali superficie, cujus omnia puncta sint æquabilissime disposita, nec ullum infra aliud deprimatur, nec supra aliud emineat. Genesin talis plani Geometricam in sequentibus ostendemus (613).

396. II. Assumitur quoque, *fieri posse, ut lineæ rectæ finitæ in plano descriptæ medium punctum determinetur.* Qua ratione id Geometrice præstetur, paulo post docebimus (445).

De proprietatibus Linearum rectarum ex positione unius respectu alterius.

397. Concipiatur recta immota AB (quam fixam AB appellabo) descripta in plano immobili (Fig: 1); concipiatur etiam altera recta (quam dicam mobilem AB) priori æqualis, itaque supra priorem posita, ut eandem cum illa lineam efficiat. Sit punctum E medium hujus lineæ, circa quod ita circumagi cogitetur recta mobilis AB, ut pars ejus EA descripta in eodem plano via AORB, perfecte congruat cum parte fixæ EB, dum interea pars altera mobilis EB percursa via BVZA exacte coincidit cum parte fixæ AE.

His

His ita peractis linea mobilis descripsit figuram, cujus partibus variae datae sunt denominationes, quas in promptu habere oportet.

398. *Definitiones*. I. Figura tota a recta mobili descripta *circulus* vocatur; linea curva ARBYA figuram claudens, *circumferentia circuli* appellatur; & punctum E, circa quod ea circumferentia descripta est, *centrum*.

399. II. Partes quaevis determinatae circumferentiae, ut NA, ANO, ORT, &c dicuntur *Arcus* circuli.

400. III. Linea AE, quae motu suo circa E circulum describit, est *radius* circuli; & universim radii sunt omnes rectae ex centro circuli usque ad circumferentiam ductae, velut EO, ER, EX, &c.

401. *Corollarium*. Hinc sequitur, *omnes radios ejusdem circuli, vel aequalium circulorum, esse aequales inter se*: unde etiam circulum sic definire licet, quod sit figura unica linea curva terminata, cujus omnia puncta aequaliter distant ab uno aliquo puncto intra figuram posito, quod centrum appellatur.

402. IV. Recta AB, quae per centrum ducta circulum in duas partes aequales dividit, dicitur *diameter circuli*, uti etiam omnes lineae rectae diametri sunt, quae per centrum transeunt, & utrinque in peripheria terminantur, ut OB, PX, RZ, &c.

503, Circumferentia cujusvis circuli in 360 partes aequales dividitur, quae *gradus* dicuntur; (115) gradus quilibet subdividitur in 60 partes aequales, quae *minuta* appellantur; & quodvis minutum in 60 *secunda*, quodvis secundum in 60 *tertia* &c. Verum harum partium magnitudo absoluta non consideratur; uti mensurarum usitatarum alias, veluti ponderum, pedum &c; sed sunt quantitates proportionales magnitutionales magnitudini circuli ſui; adeo, ut gradus unus circuli majoris poſſit eſſe major gradu uno minoris circuli.

404. Sed conſideremus paulum ea; quæ accidunt per motum lineæ illi mobili; & clarum quidem eſt I, quod antequam ea moveri inciperet, fixam nuſpiam ſecuerit, nullam ad eam habuerit inclinationem; ſed quod omnia ejus puncta exacte poſita fuerint ſupra omnia puncta correſpondentia fixæ.

405. II. Quod linea mobilis non potuerit circa punctum E converti, niſi omnia ejus puncta eodem tempore fuerint mota, idemque omnium numerus progreſſuum momentaneorum fuerit.

406. III. Quod quamprimum motus cœpit, omnia lineæ mobilis puncta ſeparata fuerint utraque ex parte a punctis correſpondentibus fixæ, eorumque diſtantia tanto fuerit major, quantum quodvis remotius erat a puncto E, quod utrique lineæ commune fuit. Hinc igitur linea mobilis ſecuit fixam in puncto E, & partes ejus inclinatæ ſunt ad partes fixæ. V. g. dum ſitus lineæ mobilis erat NET, nullam cum fixa amplius habuit partem communem, præter ſolum punctum E: punctum N longe magis diſtabat a puncto A, quam quodvis inter N & E, velut n, a quovis alio fixæ inter A, & E, uti a, licet totidem fuerint progreſſus momentanei puncti n, ut ex a in n perveniret, quot fuerunt puncti N, ut ex A in N transferretur. Idem eſt de puncto T reſpectu puncti B. Secuit igitur linea NET fixam in E, & ejus partes NE, ET inclinatæ fuerunt ad partes fixæ EA, EB. Notio igitur *inclinationis duarum rectarum* includit ſimul notionem earum interſectionis aut actualis, aut poſſibilis, ſiquidem producantur.

407. Recta inclinata ad alteram, aut ſecans al-

teram rectam, vel ei in extremo suo puncto occurrens, aut insistens, facit cum ea *angulum* ad punctum occursus; uti NE, AE angulum ad E efficiunt.

408. Angulus exprimit, quantum una linea ab altera, cui una ex parte occurrit, recedat: ut angulus tanto sit major, quanto magis eae lineae a sese recedunt.

409. Evidens porro est, mensuram hujus linearum recessus esse numerum progressuum, quo quodvis lineae mobilis punctum a puncto correspondente lineae fixae remotum est: si enim punctum A lineae mobilis bis tot progressus habuit, ut ex A veniret in P, ac habuerit, ut ex A transiret in N, liquet sane, punctum A in P translatum duplo magis recessisse a linea fixa, quam cum in N esset, ideoque angulum AEP esse duplum anguli AEN. Pariter est manifestum, totidem fuisse progressus puncti *a* lineae mobilis usque in *p* vel *n*, ac fuerint puncti A usque in P, vel N; atque hinc esse duplo plures progressus ejusdem puncti *a* usque in *p*, quam usque in *n*; lineamque EP duplo magis recedere a linea AE, quam lineam EN. Hinc autem eruitur . . .

410. Theorema I. *Mensura anguli rectilinei est arcus circuli cujusvis interceptus inter lineas angulum comprehendentes, cujus centrum est in vertice anguli.* Sic cum dicimus, angulum esse 20 graduum, significamus, anguli mensuram esse arcum circuli 20 graduum.

411. Theorema II. *Omnes anguli, quos metiuntur arcus ejusdem numeri graduum, sunt inter se aequales*; & vicissim *omnes arcus ex vertice descripti, & ab eodem vel aequalibus angulis intercepti, eundem numerum graduum habent.*

412. Theorema III. *Data magnitudine anguli, datur arcus ex anguli vertice descriptus, & inter ejus crura inter-*

terceptus; & viciſſim: *dato numero graduum arcus ex anguli vertice tanquam centro deſcripti, & ejus lateribus comprehenſi, datur magnitudo anguli.*

413. Sed reſumamus paulo attentius motum illum circularem lineæ mobilis circa fixam: apparebit ſane, eam lineam obtinere ſucceſſive omnes omnino poſitiones poſſibiles reſpectu fixæ; adeoque cum eadem facere ſucceſſive omnes angulos, quotquot eſſe poſſunt.

Quamdiu linea mobilis magis vergit verſus partem AE, a qua primo receſſit, quam verſus partem oppoſitam fixæ EB, omnes anguli, ut AEN, AEO &c, qui ea ex parte fiunt, ſunt *acuti*.

414. Quando linea mobilis acquirit ſitum PE, quo nec magis verſus AE, quam verſus EB inclinatur, anguli ſunt recti AEP, PEB.

415. Recta cum altera recta faciens angulum rectum, eidem eſt *perpendicularis*, uti PE rectis AE, & EB, ſive etiam toti AB: & viciſſim rectæ EA, EB, vel tota AB, ſunt perpendiculares ad EP.

416. Anguli AEQ, AER &c hisque ſimiles, dicuntur *obtuſi*, quando linea mobilis jam magis inclinatur verſus partem fixæ EB, quam verſus AE, a qua digreſſa eſt. Hæc omnia locum habent in linea mobili EB, alterum ſemicirculum BVZA deſcribente.

417. Theorema IV. *Quivis angulus acutus minor eſt quovis recto vel obtuſo; & quivis rectus minor eſt quovis obtuſo.*

418. Theorema V. *Angulorum acutorum, & obtuſorum infinitæ ſunt ſpecies; anguli recti unica.*

419. Theorema VI. *Anguli recti ſunt omnes inter ſe æquales;* utpote qui comprehenduntur a duabus rectis,

quæ in concurſu ſuo non magis in unam, quam in alteram partem propendent.

420. Corollarium I. *Menſura duorum angulorum rectorum eſt ſemicircumferentia circuli;* ideoque *menſura unius recti eſt arcus 90 graduum.*

421. Corollarium II. *Anguli acuti menſura eſt arcus minor 90 gradibus; ſed anguli obtuſi menſura eſt arcus 90 gradibus major* (417).

422. Theorema VII. *Per idem in eadem recta punctum non poteſt in eodem plano niſi unica perpendicularis duci.* Unicus enim locus eſſe poteſt, in quo recta mobilis non magis inclinetur verſus partem fixæ EA, quam verſus EB.

423. Theorema VIII. *Tota circuli circumferentia quatuor angulos rectos tantummodo metitur;* tota enim circumferentia APBXA exhauritur ab arcubus metientibus rectos AEP, PEB, BEX, XEA; ſeu quater 90° accurate efficiunt 360°.

424. Corollarium. Igitur *ſumma omnium angulorum, qui poſſunt ad idem punctum* E *fieri, non poteſt excedere 360°, ſeu quatuor rectos.*

425. Theorema IX. *Recta quævis* OE *incidens in aliam rectam* AB, *facit cum eadem duos angulos* AEO, OEB, *quorum ſumma eſt* 180°, *ſeu duo recti.* Arcus enim ANO, ORB, metientes eos angulos, efficiunt ſimul ſemiperipheriam circuli AORB.

426. *Corollarium.* Quotcunque rectæ FE, NE, OE, PE, QE, RE, ME, terminentur ad idem punctum E rectæ AB, efficiunt angulos, quorum ſumma eſt 180°.

427. Angulus *deinceps poſitus*, vel *angulus complementi ad duos rectos*, vel *angulus ſupplementi*, eſt ille, qui cum altero facit 180°; talis eſt OEB respectu OEA, vel OEA respectu OEB. Angulus *complementi ad rectum*

ctum, vel *complementi* dicitur, qui alteri additus efficit 90°, qualis est PEO respectu OEA.

428. Theorema X. *Ex quatuor angulis, qui fiunt a duabus rectis* AB, OV *se interfecantibus in* E, *nempe* AEO, OEB, BEV, VEA, *bini quivis ad verticem oppositi sunt inter se æquales;* ut OEB = VEA, & AEO = BEV.

Demonstratio. Etenim pars EA lineæ mobilis AB nequit moveri versus O, nisi tantundem moveatur pars EB versus V: igitur EA tot progressus momentaneos habuit, donec pertingeret ad situm EO, quot EB, ut obtineret positionem ET; adeoque arcus AO tot habet gradus, quot arcus BV: igitur angulus AEO = BEV. Eodem modo demonstratur esse OEB = VEA.

Corollarium. *Dato uno angulo e quatuor, quos efficiunt duæ rectæ se mutuo secantes, etiam reliqui tres dantur.*

De Proprietatibus Linearum rectarum ex positione unius respectu duarum, vel plurium aliarum, quin spatium claudant.

429. Cogitetur jam recta CD (Fig. 2) ita sita respectu lineæ immobilis AB, ut undique ab ea æqualiter distet, veluti si ipsa recta AB ita translata esset ex AB in CD, ut ejus pars IC nuspiam magis propenderet versus AE, quam pars ID versus EB. Hæc si ita sint, recta CD dicitur *parallela* alteri AB, atque manifestum est, has rectas nullo modo ad sese inclinari, nec posse alteram ab altera secari, utcunque productæ intelligantur. Concipiatur dein, uti prius, recta mobilis AB circa punctum medium E circumagi, apparebit liquido ....

430. I. Quamdiu recta mobilis congruit cum fi-

xa

xa AB, eam non posse occurrere alicubi rectæ CD, quoniam tum utraque eandem constituit lineam ad CD parallelam.

431. II. At quam primum mobilis AB circa punctum E motum utcunque exiguum conceperit, ea occurret rectæ CD, eamque sufficienter productam secabit; tum enim pars alterutra lineæ mobilis AB versus CD inclinata est, & quodvis punctum illius partis tanto propius accessit ad CD, quanto longius a puncto E abest (406).

432. III. Quemadmodum linea mobilis omnes successive inclinationis gradus acquirit respectu fixæ AB; ita per eosdem inclinationis gradus successive transit respectu parallelæ CD, atque eosdem cum ea facit angulos, quos facit cum fixa AB. Supponamus enim mobilem venisse ad positionem NT: quoniam recta CD ideo parallela est ad AB, quia ponebatur ex situ AB (in quo cum recta NT faciebat angulum AEN) ita translata in situm CD, ut nullam prorsus inclinationem ad AB acquireret, evidens est, quod manentibus immotis rectis NT & AB, recta CD non aliam acquirere potuerit inclinationem ad NT, nisi quam habuit in situ AB; & quod consequenter angulus CGN, qui ejus inclinationem cum NT metitur, sit æqualis angulo AEN. Ex eadem ratione anguli TEB, EGD sunt inter se æquales: uti & AET, CGE, NGD, NEB; anguli vero acuti sunt complementa ad duos rectos obtusorum, & vicissim obtusi acutorum.

Angulus TEB dicitur *alternus externus* respectu anguli CGN, uti etiam TEA respectu NGD. Et angulus AEG vocatur *alternus internus* anguli EGD, quemadmodum GEB anguli EGC.

Idem

Idem eodem modo demonſtratur de rectis omnibus NT, OV &c respectu AB & CD.

Ut penitus discutiatur, ſi quid obscuri huic demonſtrationi inhæreat, conſiderandum eſt, quid in infinito eveniat. Et certe cum rectas ita ſpectemus in præſens, velut quæ ſpatium non concludant, infinite protenſæ repræſentandæ ſunt, ut proprietates inde erutæ lineis cujusvis longitudinis aptari poſſint.

Manifeſtum eſt, duas rectas fixas AB, NT, ad ſeſe ſub dato quovis angulo AEN, vel TEB inclinatas, a ſe magis ſemper recedere, ut magis ſemper producuntur, ita, ut lex diſceſſus binorum quorumvis punctorum correspondentium, velut A, N, in quacunque ab interſectione E diſtantia ſumantur, nunquam mutetur. Hinc ſequitur, rationem metiendi angulum TEB eandem debere eſſe tam in infinito, quam in finito, hoc eſt, ſeu ejus menſura a vertice E ad diſtantiam infinitam, ſeu ad finitam accipiatur. Quare *duo anguli in finito æquales, ſeu quorum menſuræ non niſi quantitate infinite parva differunt, debent etiam in infinito eſſe æquales, & eorum menſura nequit differre, niſi quantitate finita.* Item *duo anguli in finito inæquales, ſive quorum menſura differt quantitate finita, manent in infinito quoque inæquales, & eorum menſura differt quantitate infinita; ac viciſſim.*

His poſitis, ſi duæ rectæ fixæ ſint inter ſe parallelæ, atque altera ab altera habeat diſtantiam finitam, in infinito cenſendæ ſunt tota ſua longitudine ita congruere, ut unam, eandemque rectam efficiant, quippe mutua punctorum omnium correspondentium diſtantia finita, & ubivis æquali, respectu harum rectarum infinitæ extenſionis evaneſcente. Sic dum mobilis infinita AB circa punctum E ſuper infinita fixa AB rotatur, cenſenda eſt rotari ſuper una, eademque recta compoſita e binis parallelis AB, CD, quarum altera alteri incumbat: & quoniam puncta interſectionum E, G finite diſtant inter ſe, putanda ſunt in E congruere, angulusque TEB cum angulo TGD. Et reapse menſura anguli TEB accepta in infinito, ſeu arcus TB infinite a puncto E diſtans, non differt a menſura anguli TGD itidem ad diſtantiam infinitam accepta, niſi ea quantitate, qua discrepat arcus TB, cujus centrum in E, ab

ar-

arcu TD, cujus centrum G. Jam vero cum tam puncta G & E, quam puncta B & D inter se distantiam finitam habeant, differentia, quæ est in mensura angulorum TEB, TGD ad distantiam infinitam accepta, nequit esse, nisi finita: quare etiam anguli TEB, TGD in finito non possunt nisi infinite parum differre, ideoque in finito æquales habendi sunt.

433. Theorema I. *Si recta quævis* EG *secat parallelas* AB, CD, *erunt* primo *anguli alterni interni inter se æquales;* 2do *æquabuntur quoque anguli alterni externi;* 3tio *duo anguli interni* BEG, EGD *erunt alter alterius complementum ad duos rectos;* quarto *duo anguli externi* TEB, DGN *itidem sese mutuo complebunt ad duos rectos:* Et vicissim *si recta incidens in duas alias rectas faciat vel angulos alternos internos, vel alternos externos inter se æquales, vel duos externos ad eandem partem simul æquales duobus rectis; vel duos internos ad eandem partem simul æquales duobus rectis; eæ lineæ duæ, in quas altera incidit, erunt parallelæ inter se.* Nihil enim horum contingere potest, nisi hæ duæ lineæ BE, DG nullam inclinationem ad sese habeant.

434. *Observa.* Quod adhuc dictum est de binis parallelis, intelligendum est de quotcunque. Quas enim proprietates habet prima respectu secundæ, easdem habet secunda respectu tertiæ, tertia respectu quartæ, & sic deinceps, ut adeo eædem conveniant omnibus.

435. IV. Jllud præterea, linea mobili motum suum circa E peragente, manifestum est, puncta intersectionis illius cum recta CD, nempe F, G, H, tanto fore viciniora puncto E, quanto linea mobilis propius ad situm perpendicularem respectu fixæ AE accesserit; ita, ut punctum I, in quo intersectio fit ad angulos rectos, sit omnium vicinissimum. At ubi moveri pergit, magis semper intersectionum puncta ab

E re-

E recedent, quo mobilis magis versus EB inclinatur.

436. V. Itaque quando linea mobilis in situ ER tantundem inclinatur ad fixam EB, quantum in situ EN inclinabatur ad EA, sive quod idem est, quando anguli AEN, BER, vel NEP, REP sunt æquales; puncta intersectionum G, L, æqualiter distant a punctis E & I, hoc est GI = IL, & GE = LE.

Ut hujus rei veritas evidens fiat, concipiatur in figura secunda pars sinistra ita imponi parti dextræ, ut tota figura secundum longitudinem perpendicularis EP velut complicata sit: tunc enim fieri necesse est, ut AE cadat supra EB, IC supra ID, arcus AN supra æqualem BR, & NP supra PR: quare radius NE exacte congruet cum radio ER, & punctum G cum puncto L; consequenter GE = LE, & GI = IL.

437. Theorema II. *Perpendicularis* EI *ex quovis puncto* E *ad rectam* CD *ducta est omnium linearum brevissima, quæ ex eodem puncto ad eandem rectam duci possunt.* Et vicissim, *si recta* EI *est brevissima omnium, quæ ex puncto* E *ad rectam datam* CD *duci possunt, est perpendicularis ad eandem.* Quod si enim aliquam inclinationem haberet, posset duci perpendicularis, quæ foret brevior.

438. Corollarium. *Per perpendicularem itaque recte metimur distantiam puncti a Linea.*

439. Theorema III. *Ex puncto quovis* E *extra rectam* CD *dato, non nisi unica perpendicularis ad eam rectam duci potest.* Non enim datur nisi unicum punctum I in recta, quod puncto E sit vicinissimum; & non nisi unicus situs lineæ mobilis, in quo non magis versus unam, quam versus alteram partem inclinetur.

440. Theorema IV. *Recta quævis* EI *est perpendicularis ad alteram* CD, *si duo ejus puncta*, v. g. E, I, *æqua-*

liter distant a duobus punctis G, L *alterius utrinque acceptis*, hoc est, si EG=EL, & IG=IL; tunc enim evidens est, ea duo puncta E & I non magis versus G, quam versus L vergere; & quoniam ad determinandum situm rectæ duo puncta sufficiunt (394), tota recta EI non versus G magis inclinatur, quam versus L.

441. Theorema V. *Si duo puncta* G & L *rectæ æqualiter distent a puncto ejusdem* I, *in quo ab altera secatur perpendiculariter*, *omnia puncta perpendicularis* EI *æqualiter distant a punctis* G & L. Quod si enim in perpendiculari daretur punctum aliquod, quod inæqualem haberet distantiam a punctis G & L, ipsa perpendicularis in eo puncto magis inclinaretur versus partem distantiæ minoris, ideoque nec foret perpendicularis.

His proprietatibus rite intellectis, facilis erit sequentium problematum resolutio.

442. Problema I. *Per datum punctum* C (fig: 3) *extra rectam datam* AB *ducere parallelam.*

Resolutio. Circino ad arbitrium aperto, & uno crure fixo in C, describatur altero arcus quivis EK; dein posito altero crure in E describatur eadem apertura arcus CF, occurrens rectæ AB in F: accipiatur Circino arcus CF, & transferatur in arcum EK ex E in I; ducatur per datum punctum C, & per inventum I recta CID: erit hæc ad AC parallela.

Demonstratio. Nam si ducatur recta CE, ob arcus EI, CF æquales, erunt anguli CEF, ECI æquales (411); igitur recta EC secat rectas AB, CD ita, ut anguli alterni interni sint æquales; ergo (434) rectæ CD, AB sunt parallelæ.

443. Problema II. *Ex dato in recta* CD (fig: 4) *puncto* I *erigere perpendicularem.*

Re-

Reſolutio. Accipiantur circino in recta CD puncta H & K ad arbitrium, utrinque a dato I æqualiter diſtantia: Ex punctis H & K tanquam centris deſcribantur eadem (majore tamen, quam IH) circini apertura duo arcus OER, AEB ſeſe interſecantes in E: ducatur EI, erit ea ad CD perpendicularis.

Demonſtratio. Nam evidens eſt, ſi ducantur radii HE, KE, eos fore æquales, quod eadem fuerit apertura circini, dum arcus deſcripti ſunt; præterea ex conſtructione eſt HI = IK; ergo EI eſt recta, cujus duo puncta E, I æqualiter diſtant a duobus punctis H, K rectæ CD: quare (440) EI eſt ad CD perpendicularis.

444. Problema III. *Ex dato extra rectam* CD (fig: 5) *puncto* E, *demittere ad eandem perpendicularem* EG.

Reſolutio. Fixo circini crure uno in dato puncto E, notentur altero duo alia H & K in recta CD, quæ æqualiter diſtent ab E: tum centris H & K deſcribantur duo arcus arbitraria, ſed eadem circini apertura, qui ſe interſecent in G; conjungatur denique G cum puncto dato E recta EG.

Demonſtratio. Ductis radiis HG, KG, item HE, KE, eodem modo, quo ſuperius (443) patet, puncta G, E æqualiter diſtare a punctis K, H rectæ datæ CD, ideoque ad hanc eſſe GE perpendicularem.

445. Problema IV. *Rectam datam* HK (Fig: 6) *ſecare in duas partes æquales* HI, IK.

Reſolutio. Ex extremis punctis H & K tanquam centris deſcribantur eadem circini apertura utrinque bini arcus ſe ſe interſecantes in G, & E: conjungantur interſectionum puncta recta EG, quæ datam HK dividet bifariam in I.

Demonſtratio. Eſt enim manifeſtum, puncta E & G eſſe æqualiter diſſita ab extremis datæ HK, adeoque (441) etiam reliqua omnia hujus rectæ E G puncta æqualiter distare ab iisdem extremis, consequenter etiam punctum I.

DE NONNULLIS PROPRIETATIBUS LINEARUM RECTARUM RESPECTU CIRCULI.

446. Recta F M (Fig: 2 vel 7) utrinque in circumferentia circuli terminata, dicitur *chorda*, vel *subtensa*. Sic dicimus, arcus F P M chordam, vel subtensam esse F M; item Chorda I K (Fig: 7) subtendit arcum I P K; hoc est, terminatur ad extrema arcus I P K puncta.

447. Portio circuli intra arcum & ejus chordam comprehensa, velut F P O N F (fig: 2), dicitur *segmentum* circuli: & portio P E O, vel A E F, inter arcum & duos radios contenta, vocatur *sector* circuli.

448. Theorema I. *Recta* E P *ex centro circuli* E *ad chordam* F M *perpendicularis, dividit chordam bifariam.*

Demonstratio. Quoniam recta E P ex centro circuli ducitur, ejus punctum E æqualiter distat ab extremis chordæ F & M; & quoniam præterea est ad chordam perpendicularis, omnia ejus puncta (441) ab iisdem extremis F, M æqualiter distant; est igitur etiam punctum I tantundem remotum ab F, quantum ab M, adeoque F I = I M.

449. *Theorema* II. E converso *recta quævis* E P *transiens per centrum circuli, & chordam bifariam secans, est ad chordam perpendicularis.*

Demonstratio. Quoniam E P secat chordam in duas partes æquales, habet aliquod punctum I æquali-liter ab extremis chordæ F & M remotum, & quia præterea tranſit per centrum E, habet etiam alterum punctum E æqualiter ab iisdem extremis remotum; igitur E P eſt recta, cujus duo puncta I & E easdem habent diſtantias a duobus punctis chordæ F M, nempe F & M; igitur EP eſt ad FM perpendicularis (440).

450. Theorema III. Jtem *ſi recta* EP *ſecat chordam* FM *bifariam, & perpendiculariter, ea tranſit per centrum circuli.*

Demonſtratio. Cum enim EP ſecet chordam bifariam, habet aliquod punctum I, æqualiter ab extremis F, M chordæ FM diſtans; & quia præterea eſt ad chordam perpendicularis, omnia ejus puncta tranſeunt per puncta æqualiter ab iisdem extremis diſtantia (441); atqui centrum E eſt unum e punctis æqualiter diſtantibus ab extremis chordæ F & M (401); eſt igitur centrum ex illis punctis, per quæ tranſit perpendicularis EP.

451. *Hypotheſis.* Si ſupponatur chorda F M ita moveri per circumferentiam ſui circuli, ut ejus extrema puncta F, M ſemper ſint in circumferentia, *primo* hæc chorda ubique ſubtendet arcum æqualem. *ſecundo* habebit ubique eandem a centro diſtantiam Etenim ſpectato hoc motu concipere licet, totam figuram FEM (Fig. 2) circa centrum E moveri, ut radii EF, EM ſemper ſequantur chordam FM; atque hinc angulus FEM idem ſemper manebit, ejusque menſura arcus æqualis cum arcu FPM. Eodem modo evidens eſt, lineam EI perpetuo manere eandem, dum motus hic peragitur. Unde ſequitur . .

. . . .

452 Theorema IV. *In eodem, vel æqualibus circulis chordæ æquales ſubtendunt arcus æquales; chordæ vero inæ-*

inæquales ſubtendunt etiam arcus inæquales. Jtem *chordæ æquales in eodem vel æqualibus circulis a centro æqualiter diſtant; chordæ inæquales inæqualiter.* Chorda enim æqualis in peripheria circuli circumlata ſemper congruit cum chordis æqualibus, immo nec poteſt cum inæqualibus congruere.

453. Theorema V. *In eodem, vel æqualibus circulis ſi arcus ſunt majores, a majoribus; ſi minores, a minoribus chordis ſubtenduntur; & chordæ minores magis, majores minus diſtant a centro.* Et viciſſim *chordæ, quæ magis diſtant a centro, minores ſunt; quæ minus, majores:* item *ſi chordæ ſunt majores, etiam arcus ſubtenſi ſunt majores, & ex oppoſito.*

454. Theorema VI. *Si recta* EP (fig: 2) *per centrum* E *ducta biſecat chordam* FM, *etiam arcum* F P M, *quem chorda ſubtendit, biſecat, & angulum* F E M, *quem is arcus metitur.*

Demonſtratio. Etenim hæc recta eſt ad chordam perpendicularis (449) & omnia ejus puncta æqualiter diſtant ab extremis chordæ F, & M; igitur etiam punctum P æqualiter diſtat ab F & M. Et hinc ſi ducantur PM, PF, erunt eæ chordæ æquales, & conſequenter (452) arcus PRM=PNF, angulusque FEM ſectus eſt in partes æquales radio EP.

455. Theorema VII. *Chorda* F M *diametro* A B *parallela abſcindit utrinque arcus æquales* AF, BM.

Demonſtratio. Si ex centro E erigatur ad AB perpendicularis EP, eadem erit perpendicularis ad chordam FM (433), conſequenter (448) ſecabit chordam bifariam, eritque arcus ANP=PRB, FNP=MRP; & hinc (17) ablatis æqualibus FNP, MRP ab æqualibus ANP, BRP, remanebunt arcus æquales AF, BM.

456.

456. Corollarium I. *Duæ parallelæ* CD, GH (fig. 7 & 8) *in peripheria circuli intercipiunt arcus æquales* FI, KM. Ducta enim per centrum E diametro AB ad GH, CD parallela, habetur AF = BM, & AI = BK: igitur (fig: 7) AI — AF = KB — BM, vel FI = KM; & (fig: 8) AI + AF = KB + BM, seu FI = KM.

457. *Corollarium* II. Si supponatur recta G H (fig. 7) ita recedere a centro, ut sibi ipsi, vel rectæ CD, semper maneat parallela, donec acquirat situm *gh*, in quo circumferentiam circuli solummodo tangat in P, neque intra circulum sit amplius, nisi parte infinite parva, evidens est, adhuc fore PM = PF. Quo enim recta GH longius a centro recedit, eo puncta I, K (in quibus secat peripheriam,) propius ad se accedunt, & tandem coincidunt cum P, in quo tum ea recta peripheriam circuli tangit.

458. Recta quæ ita occurrit circulo, ut quomodocunque producta eum nuspiam secet, nec intra peripheriam ingrediatur, dicitur *tangens;* & punctum, in quo circulum tangit, dicitur *punctum contactus.*

459. Theorema VIII. *Radius* EP *ad punctum contactus* P *ductus, est tangenti* g h *perpendicularis.*

Demonstratio. Quoniam recta *g h* ita transit per punctum P, ut circulum nullibi secet, radius EP metitur minimam distantiam hujus lineæ a centro E; igitur (437) est ad eandem perpendicularis.

460 Corollarium. *Recta, quæ circulum tangit, eum tangit in unico puncto.* Nam ex centro E non nisi unica perpendicularis (439) ad *gh* demitti potest.

461. *Theorema* IX. E converso *recta* g h *ad extremitatem* P *radii* EP *perpendicularis, tangit circulum in hoc unico puncto* P.

Demonstratio. Cum EP ponatur ad *gh* perpendicucularis; hic radius metitur minimam diſtantiam centri E a recta gh; igitur omnia reliqua puncta hujus rectæ majorem habent diſtantiam a centro, quam P; conſequenter ſunt extra circulum, & ſolum punctum P eſt in ejus circumferentia.

462. Corollarium I. *Expedite itaque duci poteſt tangens circuli in dato puncto* P, ſi nempe ducatur ex centro per datum punctum P recta EPN, & ad hanc perpendicularis in P, nempe gh.

463. Coroll: II. *Et hinc unica tantum poteſt duci tangens ad idem punctum circumferentiæ* (422), ſeu, quod idem eſt, *ſi per punctum contactus ducatur alia recta, ea vel congruet cum tangente, vel ſecabit circulum.* Itaque nulla alia recta inter circumferentiam, & tangentem tranſire poteſt.

464. *Scholium.* Solebant veteres Geometræ tanquam paradoxum domonſtrare, quod quamvis nulla linea recta inter tangentem & circuli peripheriam tranſire poſſit, quin eam ſecet, nihilo minus tamen, infiniti poſſent deſcribi circuli (fig. 31) quos omnes tangeret eadem recta in E, quin vel hanc, vel alter alterius circumferentiam ſecarent. Etenim punctum contactus E ſpectari poteſt tanquam extremum infinitorum radiorum CE, FE, BE, DE &c, qui omnes ſunt perpendiculares ad AE. Verum hoc quomodo intelligendum ſit, en paucis.

Cum circulus ſit (542) polygonum infinitorum laterum infinite parvorum, omnes circuli ſunt polygona ſimilia, & ejusdem ſpeciei, quorum illud majus eſt, cujus latera infinite parva majora ſunt lateribus infinite parvis alterius; quemadmodum e duobus hexagonis regularibus illud majus eſt, cujus latera majora ſunt lateribus alterius, & ex oppoſito. Eſt autem tangens circuli, immo curvæ cujuscunque, nihil aliud, quam productio finita lateris infinite parvi curvæ: ex quo porro ſequitur, ſi latus ejusmodi infinite parvum curvæ ſpectetur ut punctum, (391); *proprietatem communem omnibus curvarum quarumlibet tangentibus eſſe, ut curvam non niſi in puncto tangant.*

His poſitis, dum per punctum E deſcribuntur quotcunque circuli, latus infinite parvum E fit iis omnibus commune,

ſeu

ſeu omnium horum circulorum latera infinite parva cum E coincidunt, quemadmodum in (fig 32,) ſi latus KEL hexagoni utrinque producatur, fieri poteſt latus commune plurium hexagonorum majorum regularium: Sic quoque in fig: 31 punctum E commune omnibus circulis, eſt latus infinite parvum, quod eo ſemper fit majus, quo majore radio per illud circulus describitur; interim tamen in ſe manet punctum, cum ſemper maneat infinite parvum, quamdiu radius circuli non fit infinite magno.

465. Theorema X. *Angulus* BAD (fig. 9) *ad punctum contactus* A *inter tangentem* BA, *& chordam* AD *comprehenſus, habet menſuram dimidium arcum* AFD, *quem chorda* AD *ſubtendit.*

Demonſtratio. Ductis enim per centrum C diametro EG ad AD parallela, & diametro F f ad eandem chordam AD perpendiculari, nec non radio CA ad punctum contactus, patet, angulos (459) BAC, & FCG eſſe rectos, quorum conſequenter communis menſura eſt arcus FG. Pariter manifeſtum eſt, angulo BAD ad rectum deeſſe angulum DAC, vel huic æqualem ACG (433); eſt autem menſura anguli ACG arcus AG; quare menſuræ anguli BAD, quominus ſit arcus FG, deeſt arcus idem AG: eſt igitur anguli BAD arcus AF, dimidius arcus AFD (454), menſura.

Eadem omnino demonſtratione, modo pro B & F ſubſtituantur literæ b & f, oſtenditur, menſuram anguli bAD eſſe $\frac{1}{2}$ AfD.

466. Theorema XI. *Angulus* CAD (Fig: 10) *ad peripheriam circuli habet menſuram dimidium arcus* CD, *quem ejus crura* AC, AD *intercipiunt.*

Demonſtratio. Ducatur per verticem anguli A tangens EB (462) erit ſumma trium angulorum BAC + CAD + DAE = 180° (462) = $\frac{1}{2}$AC + $\frac{1}{2}$CD + $\frac{1}{2}$DA: eſt vero menſura anguli BAC = $\frac{1}{2}$ AC, & menſura anguli EAD = $\frac{1}{2}$AD; igitur anguli CAD menſura eſſe debet dimidius arcus reſiduus CD.

467. Corollarium I. *Angulus* DFC *ad centrum circuli est duplus anguli* DAC *ad circumferentiam, & eidem arcui insistentis.*

468. Corollarium II. *Si angulus ad peripheriam est rectus, ejus basis est circuli diameter, & latera angulum rectum comprehendentia subtendunt simul semicircumferentiam. Si angulus est acutus, chorda, cui insistit, subtendit arcum minorem semicirculo, ipse vero existit in segmento semicirculo majore. Et angulus obtusus itidem insistit chordæ minori, quam sit diameter, & existit in segmento semicirculo minore.*

469. Corollarium III. *Omnes anguli* FNM, FPM, FRM &c (fig: 8) *qui sunt in eodem segmento, & quorum latera terminantur ad eadem circumferentiæ puncta* F & M, *sunt inter se æquales.*

470. Theorema XII. *Anguli* BAD (fig. 11 & 12) *intra, vel extra circulum, mensura est* $\frac{1}{2}$BD $\pm$ $\frac{1}{2}$CE; *signo* + *adhibito pro angulo intra circulum; — pro angulo extra circulum.*

Demonstratio. Ducatur per E ad AD parallela FE; erit angulus BEF = BAD. Est autem mensura anguli BEF arcus $\frac{1}{2}$BF; & $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$BD $\pm$ $\frac{1}{2}$DF; sed (456) DF = CE: igitur $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$BD $\pm$ $\frac{1}{2}$CE.

471. Corollarium I. *Angulus* bAD (fig: 12) *inter tangentem* Ab, *& secantem* AD *comprehensus habet mensuram* $\frac{1}{2}$ Db — $\frac{1}{2}$ bC. Nam si recta AB moveatur circa punctum A, donec circulum in *b* tangat, puncta E & B semper propius accedunt ad *b*, & tandem cum eo congruunt.

Corollarium II. Ex eadem ratione *anguli* dAb *inter duas tangentes* Ad, Ab *comprehensi mensura est* $\frac{1}{2}$dFb — $\frac{1}{2}$dCb.

472. *Scholium.* Ex tribus præcedentibus Theorematis, eorumque corollariis sequens Theorema Generale deducitur: *angulus, ubicunque sit ejus vertex, datur, si ejus latera, producta, si opus sit, secent, vel tangant circumferentiam circuli cujuscunque in punctis datis.*

473. Theorema XIII. *Si in circulo e quatuor chordis efformetur quadrilineum, factum duarum diagonalium est æquale summæ binorum productorum e lateribus duobus in duo latera opposita.*

Demonſtratio. Ducatur BC (fig 38) ita, ut angulus BCF ſit æqualis angulo DCA; aut, quod idem eſt, recta CA faciat angulum ACF æqualem DCB. Jam ob æquales ABC, CDA (469) triangula DAC, BCF ſimilia ſunt, ideoque DC: $AD = BC : BF = \frac{AD \times BC}{DC}$ (320). Similiter quia ACF = BCD, & CDB = CAB, ſimilia ſunt triangula DBC, AFC, & $DC : AC :: BD : AF = \frac{BD \times AC}{DC}$. Additis his duabus æquationibus habetur BF + AF, ſeu $AB = \frac{AD \times BC + BD \times AC}{DC}$, & hinc $DC \times AB = AD \times BC + BD \times AC$.

474. Problema I. *Arcum datum in duas partes æquales dividere.*

Reſolutio. Cogitetur chorda arcum datum ſubtendens, & ſecetur ea per lineam (445) perpendicularem bifariam; dividetur etiam arcus (454) in partes duas æquales.

475. Problema II. *Angulum datum biſecare.*

Reſolutio. Circini crure in anguli vertice poſito, deſcribatur altero, quavis apertura, arcus utrinque ad crura terminatus: hic biſecetur (474); recta punctum biſectionis cum vertice jungens dividet angulum in duas partes æquales.

476. *Obſerva.* Per hæc duo problemata licebit arcum quemvis, vel angulum in partes 2, 4, 8, 16, 32, &c æquales ſecare, qui numeri conſtituunt progreſſionem Geometricam in ratione dupla; at nondum inventa eſt anguli ſectio in tres partes æquales ope ſolius circini, & regulæ, quod eſt celebre illud problema, cujus reſolutionem veteres tanto ſtudio quæſiverunt, *triſectionis anguli.* Minus adhuc licet per ſolam Geome-

metriam elementarem angulum dividere in 5, 6, 7, 9, &c partes æquales; demonstratur enim in Analysi, arcum circuli dividere in 3, 4, 5 &c partes æquales, esse problema 3, 4, 5ti &c gradus; neque etiam fieri posset per Geometriam elementarem, ut arcus dividatur in 4 partes æquales, nisi hoc problema quarti gradus esset ex illis, quæ possunt ad secundum reduci; uti etiam dividere arcum in 8 partes æquales est problema octavi gradus, quod per extractionem radicis quadratæ quantitatis incognitæ reduci potest ad gradum quartum, tum nova extractione radicis ad gradum secundum, & sic deinceps.

477. Problema III. *Per data tria puncta describere circulum.*

Resolutio. Illud liquet, Problema esse impossibile, si tria puncta jaceant in eadem recta. Alias conjungantur hæc puncta per duas rectas, quæ erunt duæ chordæ circuli petiti. Quare dividatur utraque bifariam (445), & ex punctis bisectionis erigantur perpendiculares, quæ ambæ per centrum transire debent (450), quod adeo in earum intersectione ut sit, necesse est.

478. Problema IV. *Circuli, vel arcus dati invenire centrum.*

Resolutio. Ducantur ad arbitrium duæ chordæ in circulo, vel arcu dato, & quæratur (477) centrum, ut Problemate præcedente.

479. Problema V. *Arcum circuli datum complere.*

Resolutio. Fiet, si arcus dati centrum reperiatur (478).

PRO-

PROPRIETATES LINEARUM RECTARUM, DUM SPATIUM CLAUDUNT.

480. Definitiones. Rectæ, quæ concursu suo spatium comprehendunt, *figuram rectilineam* efficiunt, jam vero concursus plurium rectarum fieri nequit; nisi simul efficiantur anguli; quare figura rectilinea etiam *polygonum* dicitur.

481. Polygonum universim significat spatium pluribus rectis comprehensum, quæ rectæ appellantur *latera*; & cum latus quodlibet utrovis extremo cum latere vicino jungatur, *totidem fiunt anguli, quot sunt latera.*

482. Porro quisque facile videt, saltem tribus opus esse lineis rectis, ut spatium claudatur; hinc prima, & simplicissima polygonorum species est *triangulum*; hanc sequitur *quadrilaterum* sive *tetragonum*; tum *pentagonum* (hoc est figura quinque angulorum, & quinque laterum), *hexagonum*, *heptagonum*, *octogonum*, *enneagonum*, *decagonum*, *hendecagonum*, *dodecagonum* &c *hecatogonum*, *chiliogonum*, *myriogonum* &c, quorum nempe latera & anguli sunt 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 &c 100, 1000, 10000 &c.

Quoniam omnes hæ figuræ ad triangulum referri debent, ut deinceps apparebit; primum est, ut hujus proprietates cognoscantur.

DE

DE TRIANGULIS.

De variis speciebus, & proprietatibus triangulorum.

483. Triangulorum diversæ sunt denominationes a ratione laterum, & angulorum desumptæ.

Ratione laterum, triangulum, cujus tria latera sunt inter se æqualia, velut ABC (Fig. 14), dicitur *æquilaterum;* cujus duo latera AC, AB (Fig. 15) inter se æquantur, vocatur *isosceles;* cujus denique omnia latera inæqualia sunt, ut ABC (Fig. 16) appellatur *scalenum.*

484. Ratione angulorum, triangulum, cujus omnes tres anguli sunt acuti, ut ABC (Fig: 14), est *oxygonum* vel *acutangulum;* cujus unus angulus est rectus, v. g. ad A (Fig: 15) dicitur *rectangulum* vel *orthogonum;* cujus denique unus angulus, velut ad C (Fig: 16) est obtusus, *amblygonum,* vel *obtusangulum* vocatur.

485. In triangulo rectangulo ABC (Fig. 15) latus BC angulo recto oppositum, dicitur *hypotenusa.*

486. In quovis triangulo latus angulo alicui oppositum vocatur *basis* illius anguli.

487. Theorema I. *Quodvis triangulum potest circulo inscribi;* hoc est, *potest describi circulus, qui per tres angulos trianguli transeat.* Idem enim est, ac describi circulum per data tria puncta transeuntem (477).

488. Theorema II. *Summa trium angulorum cujusvis trianguli est 180 graduum, seu æqualis duobus rectis.*

Demonstratio. Inscribatur enim triangulum circulo; erit cujusvis anguli mensura dimidius arcus, quem latus oppositum subtendit (466); est igitur summa trium angulorum æqualis semisummæ trium arcuum,

qui-

quibus insistunt, hoc est, semicircumferentiæ, sive 180°.

489. Coroll: I. *Triangulum nonnisi unicum angulum-rectum, vel unicum obtusum habere potest; & tunc reliqui duo debent esse acuti.*

490. Coroll: II. *In triangulo rectangulo duo anguli acuti sunt alter alterius complementum ad rectum.*

491. Coroll: III. *In triangulo, cujus duo anguli sciuntur, scitur etiam tertius.* Æquatur enim differentiæ summæ duorum cognitorum a 180°. Et *dato uno angulo, habetur summa reliquorum duorum* æqualis complemento dati ad duos rectos.

492. Theorema III. *Si in triangulo quovis* ABC (Fig: 14) *producatur latus quodlibet* CB, *est angulus externus* ABI *æqualis summæ duorum internorum oppositorum* ACB, CAB.

Demonstratio. Summa anguli externi ABI, & deinceps positi ABC, est 180 graduum (425); sed etiam (488) summa duorum angulorum ACB, CAB, & ejusdem ABC est 180 graduum; igitur angulus externus ABI æquatur summæ duorum internorum oppositorum ACB, CAB.

493. Theorema IV. *Si ex quovis puncto* D *intra triangulum* CAB (Fig: 15) *ducantur rectæ* DA, BD *ad extrema lateris cujusvis* AB, *erit angulus* ADB *rectis his comprehensus major angulo* BCA *lateri* AB *opposito.*

Demonstratio. Nam si triangulum ABC inscribatur circulo, manifestum est, mensuram anguli ACB esse dimidium arcum a chorda BA subtensum (466), cum angulus BDA habeat mensuram, præter eundem dimidium arcum, etiam dimidium illius, qui a lateribus BD, AD productis intercipitur (470).

494. Theorema V. *In quovis triangulo summa duorum quorumvis laterum major est latere tertio.*

Demonstratio. Recta AB (Fig: 16) est via brevissi-

ma

ma ex A in B (392); itaque via ex A per C in B est via longior; atqui via ex A per C in B continet accurate duo latera AC, CB; ergo summa laterum AC, CB major est latere tertio AB.

495. Theorema VI. *In omni triangulo latus majus opponitur angulo majori, & latus minus angulo minori;* & vicissim, *angulus cui opponitur latus majus, major est; & cui opponitur latus minus, est minor.* Quod si enim triangulo circumscribatur circulus, mensura anguli majoris erit arcus major, & (453) arcus major subtendetur a chorda majore; & e converso.

496. Corollarium. *Si supponatur angulus quivis in triangulo successive augeri, manente longitudine laterum angulum illum comprehendentium eadem; etiam latus angulo crescenti oppositum crescet;* & ex opposito, *decrescente angulo, latus oppositum decrescet.*

497. Theorema VII. *Perpendicularis ex angulo trianguli ad basin demissa cadit intra triangulum, si uterque angulus ad basin sit acutus; at si unus sit obtusus, perpendicularis cadit extra triangulum in basin productam.*

Demonstratio. Si in triangulo GEK (Fig: 2) anguli KGE, EKG sint acuti, dico 1*mo*, perpendicularem EI cadere intra K & G. Quod si enim caderet extra, v. g. si poneretur EL perpendicularis, triangulum EKL foret rectangulum ad L, & angulus EKL foret obtusus (complementum enim anguli acuti ad duos rectos est obtusus), quod fieri nequit (489). Itaque perpendiculum ex angulo GEK demissum non potest nisi intra G & K cadere.

Dico 2*do*, si in triangulo FEH sit angulus obtusus ad H, perpendicularem ex angulo acuto FEH in latus oppositum FH ductam cadere versus I in hoc latus productum. Ponatur enim ea perpendicularis esse EG; erit in triangulo EGH angulus HGE

re-

rectus, & EHG obtusus, quod absurdum est. Unde perpendicularis non potest nisi versus angulum obtuso deinceps positum ad I cadere.

498. Theorema VIII. *In triangulo æquilatero omnes anguli sunt inter se æquales, aut singuli sint 60°. Et* vicissim *si tres anguli sint inter se æquales, & singuli 60°, triangulum est æquilaterum,* Nam si triangulum æquilaterum concipiatur inscriptum circulo, tria latera æqualia sunt tres chordæ æquales, quæ arcus itidem æquales subtendunt, quorum dimidii scilicet metiuntur tres angulos æquales, & singuli sunt pars tertia 180 gradu-um &c.

499. Theorema IX. *In triangulo isosceli anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales;* & vicissim, *si in triangulo duo anguli sint inter se æquales, triangulum est isosceles.* Etenim si hoc triangulum intelligatur circulo inscriptum, latera æquales angulos comprehendentia abscindent arcus æquales; & e converso arcus æquales subtendentur a chordis æqualibus (452).

500. *Coroll:* Si in triangulo isosceli ex angulo E (Fig: 2) æqualibus lateribus EG, EL comprehenso demittatur ad latus oppositum G L perpendicularis EI, ea secabit hoc latus in partes æquales GI, IL; quoniam scilicet laterum GE, LE eadem est inclinatio (436).

501. Theorema X. ***Quodvis triangulum circulo circumscribi potest***; seu (idem significat) ***cuivis triangulo potest circulus inscribi.***

Demonstratio. Bisecentur quivis duo anguli trianguli, velut B & A trianguli ABC (Fig. 15); rectæ eos angulos bisecantes BD, AD, sibi alicubi occurrent in D. Dico jam, perpendicula ex hoc puncto in tria latera demissa DG, DF, DE esse æqualia inter se, consequenter esse radios ejusdem circuli tria latera trianguli in punctis G, F, E tangentis (451). Nam triangula rectangula GBD, BDE sunt æqualia, ob angulos ad

B æquales, & latus BD commune; igitur GD = DE. Ex eadem ratione æqualia ſunt triangula rectangula DEA, DFA, & DE = DF; conſequenter GD = DE = DF.

502. Coroll. *Tres rectæ, quæ tres angulos in triangulo dividunt bifariam, ſeſe in eodem puncto intra triangulum ſecant.* Manifeſtum enim eſt, quod ſi angulus C dividatur per rectam in duas partes æquales, ea recta tranſeat per punctum D.

De Comparatione Triangulorum.

503. Duplici ratione Geometræ triangula, omnesque figuras reliquas, inter ſe comparant; primo quidem, dum ſitum laterum & magnitudinem angulorum figurarum conferunt; ſecundo dum ipsa figurarum ſpatia comparant. Verum altera hæc comparationis ratio pertinet ad ea, quæ de ſuperficiebus dicenda ſunt. Unde prima ſolummodo hic nobis exponenda eſt.

Triangula æqualia inter ſe dicuntur illa, quorum omnes anguli & latera æqualia ſunt, ſingula ſingulis.

504. *Triangula ſimilia* ſive *æquiangula* ſunt, quorum anguli, ſinguli ſingulis, ſunt æquales. Sic triangula ABC, DEF (Fig. 16) ſimilia ſunt, quoniam angulus A = E, angulus B = D, & angulus C = F.

505. Dum figurarum ſit comparatio, partes *homologæ* dicuntur magnitudines ejusdem denominationis. Ut in duobus triangulis ſimilibus latus maximum unius eſt homologum lateri maximo alterius, medium medio &c.

506. Theorema I. *Triangula, quorum omnia latera homologa æqualia ſunt, ſunt æqualia inter ſe.*

Demonſtratio. Dico eſſe triangulum ABC (Fig. 13) æquale triangulo *abc* ſi AB = *ab*, AC = *ac*,

BC

BC $= bc$. Describantur ex punctis A & B tanquam centris arcus FCG, DCE se intersecantes in vertice C: intelligatur dein triangulum abc impositum triangulo ABC, ut ob AB $= ab$, punctum a cadat in A, & b in B: quia $ac =$ AC, latus ac terminabitur alicubi in arcu FCG; ob eandem causam latus $bc =$ BC, alicubi occurret arcui DCE: & quoniam latera ac, bc junguntur ad idem punctum c, utrumque necesse est, ut occurrat sectioni arcuum communi in C. Hinc ac congruet cum AC: & bc cum BC, consequenter totum triangulum abc toti ABC, eruntque triangula inter se æqualia.

507. Theorema II. *Triangula, quæ habent omnes angulos æquales, singulos singulis, & unum latus homologum æquale, sunt æqualia.*

Demonstratio. Si angulus A $= a$, B $= b$. C $= c$ (Fig: 13), & AB $= ab$, dico totum triangulum ABC esse æquale triangulo abc. Ponatur latus ab supra latus AB, ut punctum a cadat in A, & b in B; evidens est, ob angulum $a =$ A, & $b =$ B, etiam latus ac debere cadere in AC, & bc in BC, ideoque latera ac, bc debere concurrere in eodem puncto, in quo concurrunt latera AC, BC, hoc est, punctum c cadere in punctum C, & triangulum abc exacte congruere triangulo ABC.

508. Theorema III. *Si in triangulis duo latera sint æqualia duobus homologis, & anguli his lateribus comprehensi æquales, tota triangula sunt æqualia.*

Demonstratio. Si latus AC $= ac$ & AB $= ab$, angulusque A $= a$; dico, triangulum ABC æquari triangulo abc. Imponatur ab lateri AB, & ac lateri AC; congruent hæc latera, ob angulum A $= a$. Et quia AC $= ac$. & AB $= ab$, etiam punctum c cadet in C, & punctum b in B; igitur bc, distantia punctorum *b* & *c*, erit æqualis, & congruet distantiæ BC punctorum B & C. Quare totum triangulum *a b c* exacte congruet triangulo ABC.

509. Theorema IV. *Si sint duo triangula similia & inæqualia, & unius angulus ponatur supra angulum æqualem alterius, lateraque primi eum angulum comprehendentia supra latera homologa alterius, erit latus tertium primi parallelum lateri tertio secundi.*

Demonstratio. Si angulus D (Fig: 16) imponatur angulo æquali B, & latus DF sibi homologo BC, & latus DE lateri alteri homologo BA, erit FE, seu *fe* parallelum ad AC. Cum enim triangula similia sint, erit angulus *fe* B = CAB, igitur *fe* (434) est parallela ad AC.

Quod si angulus F fuisset impositus sibi æquali C, latus DE fuisset parallelum lateri AB; uti etiam FD lateri BC, si angulus E fuisset positus supra æqualem A.

510. Theorema V. E converso *si ex quovis puncto* f *ad arbitrium assumpto in latere trianguli, ducatur recta* f e *parallela basi* AC, *trianguli* B f e, BCA *sunt similia*, cum nempe anguli B *fe*, BCA, & B *ef*, BAC æquales sint (433).

De Polygonis aliis.

511. Tria sunt polygonorum genera, *irregularium*, *symmetricorum*, & *regularium*. Polygona irregularia sunt, quorum latera & anguli non sunt æquales, (Fig: 20, 22, 23).

512. Polygona symmetrica dicuntur, quæ lateribus & æqualibus, & parallelis constant (vide Fig: 17. 18, 19, 21, 24, 25, 27). Hinc *necesse est, ut numerus laterum sit par.*

513. Polygona regularia ſunt, quorum omnes anguli, & omnia latera ſunt inter ſe æqualia, & ſimiliter poſita (vide Fig: 26, 27, 28).

514. Figura quadrilatera irregularis, *trapezium* appellatur, ut Fig: 20; regularis vero, ut Fig: 18, *quadratum*. Quadrilaterum ſymmetricum dicitur *parallelogrammum*, cujus ſi omnes anguli ſint recti, eſt *parallelogrammum rectangulum*, vel ſine addito alio *rectangulum* (Fig: 21): at ſi anguli recti non ſint, latera tamen bina contigua æqualia, *Rhombus* vocatur (Fig: 19); ſi nec latera bina æqualia, nec anguli recti, *parallelogrammum*, vel *Rhomboides* (Fig: 17.)

515. *Angulus procurrens* eſt, cujus crura extrorſum concurrunt, & duobus rectis minor, velut ABC (Fig: 22 & 25); *angulus regrediens* eſt cruribus introrſum concurrentibus, gibbus, ac duobus rectis major, ut BCD. Patet hinc *non niſi in polygonis irregularibus, & ſymmetricis poſſe eſſe angulos regredientes*, cum in polygono regulari omnes anguli ſint ſimiliter poſiti (513).

516. Recta per polygonum ab uno angulo ad alterum ducta dicitur *diagonalis*.

Proprietates Polygonorum in genere.

517. Theorema I. *Omnia polygona, ſeu omnes angulos habeant procurrentes, ſeu aliquos regredientes, in tot poſſunt reſolvi triangula, quot latera habent.* Puncto enim C quolibet intra perimetrum aſſumpto ad omnes angulos poſſunt rectæ duci (vid: Fig: 20, 23) eritque latus quodvis baſis trianguli.

518. Theorema II. *Summa omnium angulorum internorum polygoni æquatur facto ex* 180° *in numerum laterum binario imminutum ductis, ſive facto ex numero laterum in* 180°; *minus* 360°.

De-

Demonſtratio. Summa omnium angulorum polygoni æquatur ſummæ omnium angulorum, quos continent triangula, in quæ polygonum reſolvitur, exceptis iis, qui ſunt circa communem verticem C, & (424) quorum ſumma eſt 360°; jam vero triangula ſunt tot, quot latera polygoni; igitur ſumma angulorum polygoni eſt toties 180°, quot ſunt latera demptis 360°.

Sic polygonum ſeptem laterum, habet ſummam angulorum $= 180^\circ \times \overline{7 - 2} = 900^\circ$.

519. Theorema III. *Summa omnium complementorum ad duos rectos angulorum polygoni, cujus nullus angulus regreditur, eſt* 360°.

Demonſtratio. Quilibet enim angulus internus polygoni cum ejusmodi complemento (452) facit 180°; igitur ſumma omnium angulorum internorum polygoni, cum ſumma omnium ſuorum complementorum efficit toties 180°, quot ſunt latera: atqui ſumma ipſorum angulorum polygoni internorum eſt toties 180°, quot ſunt latera, demptis 360° (518) ergo ſumma complementorum eſt 360°.

520. Theorema IV. *Si polygonum habeat angulos gibbos introrſum, eſt ſumma omnium complementorum ad duos rectos angulorum procurrentium junctis angulis externis gibborum, æqualis* 360°, *plus toties* 180°, *quot ſunt anguli gibbi.*

Demonſtratio. Patet enim (Fig: 22), ſummam omnium complementorum ad duos rectos (ſive externorum) angulorum procurrentium polygoni A B D E F eſſe 360° (519); at ſi hoc polygonum acquirat angulum gibbum D C B, angulus externus G D B, complementum ad duos rectos anguli E D B, augetur angulo B D C; & angulus D B I externus, & compleplementum ad duos rectos anguli A B D, augetur angulo C B D; jam vero (488) anguli C D B, C B D cum angulo externo D C B gibbi cognominis, efficiunt 180°; igitur quando angulus in polygono fit gibbus, binorum vicinorum procurrentium complementa ad duos rectos ea quantitate augentur, quæ juncta angulo externo gibbi facit 180°: quare si in polygono sint anguli gibbi &c.

521. *Scholium.* Potest etiam polygonum solvi in tot triangula, quot sunt latera, demptis duobus: si nempe tot ducantur diagonales, quot citra earum mutuam intersectionem duci possunt (vide Fig: 22). Et quoniam evidens est, summam omnium angulorum, quos hæc triangula continent, esse eandem cum summa angulorum polygoni, sequitur, *hanc summam efficere toties* 180°, *quot sunt triangula, hoc est, quot sunt latera, demptis duobus.* Hæc demonstratio magis etiam generalis est, quam num. 518 allata, in qua supponitur; quod nulla recta ex puncto C ad angulos polygoni ducta cadat extra polygonum.

Proprietates Polygonorum Symmetricorum, tam eorum, quorum omnes anguli procurrunt, quam quorum perimeter facit angulos introrsum gibbos.

522. Theorema I. *Si ex quovis angulo polygoni symmetrici ducantur ad oppositum diagonales . . . .*

I. *Erunt triangula opposita ad verticem, & binis diagonalibus vicinis comprehensa, inter se æqualia;* velut (Fig: 17, 24, 25) B G C, F G E. Cum enim in polygono symmetrico F E sit æqualis, & parallela rectæ B C, est angulus B C G $=$ G F E (433); ob eandem causam est C B G $=$ G E F: hinc (507) triangula B G C, F G E sunt inter se æqualia. Eadem est demonstratio in reliquis.

523.

523. II. *Omnes diagonales se se mutuo secant bifariam.* Sunt enim omnia triangula opposita æqualia.

524. *Omnes diagonales se se in eodem puncto secant.* Etenim cum diagonales BE, AD se mutuo secent bifariam, punctum medium diagonalis BE idem sit, oportet, cum puncto medio diagonalis AD. Ex eadem causa punctum medium diagonalis AD est idem cum puncto medio diagonalis FC &c. Itaque punctum medium omnium diagonalium unum, idemque est.

525, Theorema II. *Diagonalis ad angulos oppositos ducta polygonum symmetricum in duas figuras æquales & similes secat.* Nam ex utravis diagonalis parte sunt totidem & similiter posita triangula æqualia.

526. Hinc non immerito punctum, in quo sese diagonales intersecant, *centrum polygoni symmetrici* dici potest, cum radii ex eo ad angulos oppositos ducti sint æquales.

527. Theorema III. *Recta quævis* HI (Fig: 17, 24, 25) *per centrum polygoni symmetrici transiens, in eodem dividitur bifariam, simulque polygonum in duas figuras æquales & similes dividit.* Demonstratio eadem est, ac num: 522 & 525, qua scilicet æqualitas triangulorum BIG, HGE, vel IGC, FGH ostendatur.

528. Theorema IV. *Rectæ quævis per centrum polygoni symmetrici ductæ se in eodem mutuo bifariam secant.* Patet ex præcedente.

529. E converso universim verum non est, *quod si duæ rectæ sese in polygono symmetrico secent bifariam, se simul secent in illius centro.* Nam si in polygono symmetrico ABCD (Fig. 18) accipiatur CE = BF, ducanturque rectæ CF, EB, se in G mutuo secant bifariam, ob triangula GEC, GFB æqualia (507); licet punctum G multum absit a centro H.

Pro-

Proprietates Polygonorum Regularium.

530. Theorema I. *Polygonum quodvis Regulare poteſt circulo inſcribi*, hoc eſt, *poteſt deſcribi circulus, cujus circumferentia per vertices omnium angulorum polygoni tranſeat.*

Demonſtratio. Hoc Theorema demonſtrabitur, ſi oſtendatur, dari intra polygonum regulare aliquod punctum C (Fig: 26, 27), cujus diſtantiæ CA, CB, CD ab omnibus angulis, ſunt inter ſe æquales.

Dividantur itaque omnes polygoni anguli in duas partes æquales per rectas AC, BC, DC, EC &c: dico, has rectas ſeſe omnes in eodem puncto C ſecare, atque inter ſe æquales eſſe. Nam cum duæ quævis, velut BC, AC ſibi mutuo occurrant in aliquo puncto C, efficiunt triangulum ABC; & duæ item BC, DC ſe mutuo alicubi in C ſecantes conſtituunt aliud triangulum BCD: oſtendendum jam, hæc duo triangula æqualia eſſe. Quoniam omnes anguli polygoni regularis ſunt inter ſe æquales, atque iſthic per hypotheſin biſecti, erunt anguli CAB, CBA tum inter ſe, tum angulis CBD, CDB æquales: latera vero inter eosdem ſita ſunt itidem æqualia, AB, & DB: igitur (507) triangula ACB, BCD ſunt æqualia, & iſoscelia, conſequenter AC = DC = BC; & quia latus BC commune eſt utrique triangulo, punctum C interſectionis laterum AC, BC coincidit cum puncto interſectionis laterum BC, CD. Idem eodem modo oſtenditur de lineis EC, FC &c.

531. Coroll: I. *Radii ex centro polygoni regularis ad ſingulos ejus angulos ducti dividunt polygonum in tot triangula æqualia, & iſoſcelia, quot ſunt latera.*

532. Coroll: II. *Quodvis latus polygoni regularis circulo inſcripti eſt chorda arcus, cujus numerus graduum æ-*

 qua-

qualis est quotienti ex 360° *per numerum laterum divisis*. v. g. latus decagoni est chorda arcus 36°.

533. Coroll: III. *Latus hexagoni regularis æquatur radio circuli circumscripti.* Quod si enim hexagonum ejusmodi (Fig: 27) dividatur ex centro C in sex triangula, facile apparebit, hæc triangula esse æquilatera, quod nempe radii CA, CB æquales sint, & angulus ACB 60°, ideoque etiam anguli BAC, ABC singuli 60°, & CA = AB.

534. *Scholium.* Ex hac proprietate hexagoni regularis haberi potest divisio circuli in suos gradus, aut saltem in partes, quarum valor sit cognitus: quod si enim radius transferatur in circumferentiam, habetur arcus 60°; & si hic dividatur in duas partes æquales, obtinetur arcus 30°, cujus bisectio dat alterum 15°. Sed ulterior divisio tentando peragitur, quod fieri nequeat Geometrice, ut arcus 15° in 3, 5, vel 15 partes æquales secetur (476). Quare necesse est, ut in constructione instrumentorum industria suppleat defectum methodi Geometricæ, quando in suos gradus dividenda sunt.

535. Theorema II. *Quodvis polygonum regulare circumscribi potest circulo*, seu, quod idem est, cuivis potest circulus inscribi, hoc est, *potest intra polygonum regulare describi circulus, qui omnia ejus latera in punctis mediis tangat.*

Demonstratio. Quoniam enim latera polygoni regularis circulo inscripti (532) sunt totidem chordæ æquales, æqualem habent a centro distantiam (452). Unde si e centro ducantur ad singula latera perpendiculares, eæ divident omnia latera bifariam (448) eruntque inter se æquales; quare potest describi circulus per omnia extrema harum perpendicularium transiens, qui consequenter omnia latera polygoni in medio tanget (462). Vide Fig: 28.

536. Theorema III. *Omne polygonum regulare, cujus*

jus numerus laterum eſt par, eſt ſimul polygonum ſymmetricum.

Demonſtratio. Si polygonum regulare ductis e centro ad ſingulos angulos radiis reſolvatur in triangula, facile intelligitur, ob triangulorum æqualitatem, & numerum laterum parem, medietatem horum triangulorum ſeparari a mediate altera per aliquam diametrum, velut AE (Fig: 27), quæ nempe fit e duobus radiis oppoſitis AC, CE: jam vero quia triangula ABC, ECF æqualia ſunt; anguli FEC, CAB æquantur; igitur latera (434) FE, AB ſunt parallela & æqualia.

537. Problema I. *Polygono regulari dato circulum circumſcribere.*

Reſolutio. Tantum opus eſt, ut quæratur polygoni centrum (530), reliqua per ſe patent.

538. Problema II. *Polygono regulari dato circulum inſcribere.*

Reſolutio. E centro per n. 530 invento demittatur ad unum latus perpendicularis: erit ea radius circuli inscribendi (535).

539. Problema III. *Circulo dato polygonum regulare quodvis inſcribere.*

Reſolutio Generalis. Dividantur 360° per numerum laterum polygoni inscribendi: in circumferentia circuli accipiatur arcus, cujus numerus graduum æqualis ſit quotienti reperto; erit ejus chorda latus polygoni (532); hoc itaque applicetur, quoties fieri poteſt, circumferentiæ; habebitur polygonum inſcriptum, ut petebatur. Exemplum. Sit inscribendum pentagonum; erit $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Accipiatur itaque ope ſemicirculi in ſuos gradus diviſi, vel ſimilis inſtrumenti probe elaborati, arcus $72°$ in circulo dato, ejus chorda in reliquam circumferentiam transferatur.

540. *Observa.* Hæc resolutio non semper est Geometrica; attamen in praxi adhiberi plerumque solet.

Per Geometriam elementarem circulo inscribi solummodo possunt triangulum æquilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, & omnia ea, quorum numerus laterum crescit in progressione Geometrica rationis duplæ, cujus progressionis termini primi sunt numeri laterum polygonorum istorum, quæ nominavimus. Sic ratione trianguli æquilateri inscribi possunt polygona regularia 6, 12, 24, 48 &c laterum; ratione pentagoni etiam polygona 10, 20, 40, 80 &c laterum; ratione pentedecagoni illa, quæ habent 30, 60, 120, 240 &c latera. Reliqua, ut heptagonum, enneagonum, hendecagonum &c, inscribi nequeunt Geometrice, nisi per resolutionem æquationum singulis propriarum, verum quæ ad gradus altiores ascendunt.

541. Problema IV. *Circulo dato polygonum quodvis regulare circumscribere.*

Resolutio Generalis. Dividantur $360°$ per duplum numerum laterum polygoni circumscribendi; accipiatur arcus FG (Fig: 28), qui tot sit graduum, quot in quotiente sunt inventi, ducanturque per ejus extrema F, G radius CF, & recta indefinita CB: ex F, extremo radii, excitetur perpendicularis AFB occurrens rectæ CB in B: transferatur FB in FA, erit AB latus polygoni quæsiti. Reliqua latera vel eadem methodo inveniri possunt; vel vero poterit radio CB describi circulus BAHED, & in ejus peripheriam chorda AB transferri: habebitur polygonum BAHED huic circulo inscriptum, simulque circulo dato circumscriptum.

Demonstratio. Facile enim apparet, hac constructione fieri tot tangentes æquales, & in punctis contatactus bifariam divisas, quot sunt latera polygoni petiti.

Proprietates Circuli.

542. Theorema I. *Circulus est polygonum infinitorum laterum infinite parvorum.*

Demonstratio. Nam evidens est, polygonum eo propius accedere ad circulum inscriptum, vel circumscriptum, quo major est laterum numerus: itaque si reipsa ejus latera essent infinita, nihil differret â circulo, atque hic pro polygono citra ullum errorem substitui posset. Unde supponi potest, circulum nihil aliud esse, quam polygonum infinitorum laterum. At si polygonum circulo inscriptum, vel circumscriptum sit, quo magis augetur numerus laterum, eo magis latera decrescere est necesse; igitur si latera infinita sint, singula infinite parva esse debent.

543. Sit circulus DEB (Fig. 29), cujus diameter GB producatur usque in A; supponatur recta AB ita moveri circa punctum fixum A, ut alterum ejus extremum utrinque describat arcus BNO, BML, dum ipsa interim AB excurrit per totum spatium circulo DBE contentum.

Hoc posito, manifestum est, quod dum recta AB successive tot radiorum vices agit, quot sunt puncta in arcubus BO, BL, omnes hi radii secentur inæqualiter tam a circumferentia cava DYIBKZE, quam a parte ejus convexa DSQE, ut hinc deducatur universim . . . . .

544. Theorema II. *Si rectæ quotvis ex eodem extra circuli circumferentiam puncto* A *ductæ terminentur in ejus parte concava, velut* AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE. . . . .

1mo: *maxima est, quæ per centrum transit, ut* AB.

2do

2do: *reliquarum eæ sunt minores, quæ magis recedunt a transeunte per centrum; & quarum ab hac distantiæ æquales sunt, eæ itidem sunt æquales.*

3tio: *minimæ sunt utrinque tangentes* AD, AE.

4to: *nequeunt esse plures inter se æquales, quam binæ;* quæ scilicet utrinque ad æqualem a centro distantiam ducuntur: nam utrinque æqualiter decrescunt.

Ex opposito generale est. . . .

545. Theorema III. *Rectarum quotlibet* AD, AS, AH, AG, AF, AQ, AE *ex eodem extra peripheriam puncto ad partem convexam terminatarum . . . .*

1mo: *minima est, quæ producta transit per centrum.*

2do: *Reliquarum illæ majores sunt, quæ productæ magis recedunt a transeunte per centrum; & quæ ab hac æqualiter distant, æquales sunt.*

3tio: *maximæ sunt, quæ utrinque circulum tangunt.*

4to: *nonnisi binæ possunt inter se æquales esse.*

Quamvis hæc omnia satis manifesta sint, si centro A, radio AG describatur arcus TGP; nihilominus sequente ratione possunt accurate demonstrari. Ducantur ex centro C ad omnia puncta, in quibus hæ lineæ occurrunt circumferentiæ, rectæ. Ut demonstretur Theorema II, lineæ AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE considerentur singulæ tanquam latus tertium trianguli, quod manentibus reliquis lateribus constantibus, semper debet decrescere, dum angulus ei oppositus decrescit (496): sic ABC spectari potest tanquam triangulum, cujus latera sint AC, CB, & AB, angulus vero ACB infinite obtusus, & anguli CAB, CBA infinite parvi: hinc AB erit maxima, quæ extrema puncta laterum constantium CA, CB jungere possit. At vero in triangulo ACI, cujus latera constantia AC, CI æqualia sunt lateribus prioris trianguli AC, CB, angulus ACI, illis lateribus comprehensus, minor est angulo ACB; igitur etiam latus oppositum AI minus esse debet, quam AB; &c. Quod si denique sit BI = BK, hoc est, si rectæ AI, AK in æqualibus distantiis ab illa, quæ per centrum transit, peripheriæ occurrant, erunt AI, AK inter se æquales, ob triangula ACI, ACK, æqualia. Idem est de reliquis.

Eodem modo, ut demonstretur Theorema III, considerandæ sunt rectæ AH, AG, AS, AD, AF, AQ, AE, quæ singulæ sunt latera opposita angulo constantibus lateribus comprehenso, & quæ consequenter crescente eo angulo etiam ipsæ crescere debent (496). Nam ACG spectari potest ut triangulum, cujus angulus ACG sit infinite parvus, latera AC, CG constantia: hinc AG erit minima, quæ extrema laterum constantium A & G jungere possit. Sed in triangulo ACH, angulus ACH jam est major, qui nempe lateribus æqualibus AC, CH comprehenditur, ideoque latus ei oppositum AH majus esse debet, quam AG. Quod si angulus ACF = ACH, hoc est, si rectæ AH, AF æqualiter utrinque distent ab AG, quæ producta transit per centrum; ut superius, ostenditur, esse AF = AH.

546. Si recta indefinita ACB (Fig: 30) moveatur circa punctum quodpiam intra peripheriam circuli GOBLG, sed extra centrum C, assumptum, velut A, semper secabitur inæqualiter a circumferentia circuli, eritque . . . .

Theorema IV. *Rectarum quotvis e puncto intra circuli circumferentiam & extra centrum sumpto ductarum usque ad circumferentiam . . . .*

1mo. *Maxima quæ per centrum transit*, velut AB.

2do. *Reliquarum eæ sunt minores, quæ longius distant* *a tran-*

a transeunte per centrum; & quæ ab ea distant æqualiter, sunt æquales inter se; quarum duæ tantum esse possunt.

3tio. *Brevissima est, quæ per centrum transeunti, jacet ad alteram partem in directum*, ut AG.

4to. *Si duæ inter se æquales producantur etiam ultra punctum usque ad circumferentiam, constituunt chordas æquales;* nempe ob æqualem earum a centro distantiam, etiam partes productæ æquantur.

Hæc omnia per se manifesta sunt, si radio A G describatur circulus GPT, licebit tamen eadem demonstrare ratiocinio prorsus simili illi, quo prius usi sumus, ductis nempe radiis CN, CX, CO, CQ &c, & rectis ex A usque ad peripheriam circuli GOBLG pertingentibus consideratis tanquam lateribus oppositis angulo intra latera constantia totidem triangulorum comprehenso, nempe intra AC, & radium. Ut enim propius, vel remotius ab ea, quæ per centrum transit, peripheriæ occurrunt, ita majori vel minori opponuntur angulo, ideoque & ipsæ majores, vel minores sunt; & quæ æqualiter utrinque discedunt, æquales sint oportet, cum angulis æqualibus opponantur.

547. Corollarium. *Punctum, ex quo tres rectæ æquales ad circumferentiam circuli duci possunt, centrum est.*

548. Theorema V. *Duo circuli, sive æquales, sive inæquales, non nisi in duobus punctis se possunt secare.*

Demonstratio. Nam si se possent in tribus punctis secare, ductis ex centro unius circuli ad ea tria intersectionum puncta rectis, hæ forent radii illius circuli, adeoque inter se æquales. Unde daretur aliquod punctum extra centrum alterius circuli, ex quo possent tres rectæ æquales ad circumferentiam duci, quod absurdum est (544).

549. Coroll: I. *Si duo circuli habeant tria puncta communia, etiam commune centrum habent, & congruunt.*

550. Coroll: II. *Circulorum, quibus unum, vel duo tantum communia sunt puncta, nequit idem esse centrum, sive circuli sunt eccentrici.*

551. Theorema VI. *Chordæ se extra centrum secantes, non possunt se mutuo secare bifariam.*

Demonstratio. Nam si hoc ponatur, erit recta ex centro ad communem earum intersectionem ducta utrique perpendicularis, cum utramque secet bifariam (449); atqui hoc manifeste absurdum est, cum angulus, quem facit recta ex centro ducta cum dimidia chorda altera, sit pars anguli, quem facit eadem ex centro ducta cum altera dimidia chorda.

552. *Coroll:* Si igitur duæ chordæ se mutuo secent bifariam, earum intersectio est centrum, & ipsæ sunt circuli diametri.

553. Theorema VII. *Si duo circuli se tangant, recta per eorum centra ducta transit per punctum contactus.*

Demonstratio. Tangant *primo* se circuli externe (Fig: 29). Via ex centro A ad centrum C brevissima est per punctum contactus G; nam hæc solummodo æquatur summæ radiorum AG + GC; & cuivis alteri addendum præterea est spatium inter utriusque circuli circumferentiam interceptum. Tangant *2do* se interne (Fig: 30). Cum punctum G sit utrique circulo commune, via brevissima ex A (centro circuli minoris) ad punctum G est recta minima, quæ ex hoc puncto A ad circuli GOBLG majoris circumferentiam potest duci; est autem (546) minima illa, quæ jacet in directum cum transeunte per centrum C; igitur recta e puncto A (centro circuli minoris) ad punctum G contactus ducta, transit simul per centrum C circuli majoris GOBLG.

554. Problema. *Ex dato extra circulum puncto A* (Fig: 33) *ducere tangentem.*

Resolutio. Ducatur ex puncto A ad centrum circuli dati C recta AC, super qua tanquam diametro ex medio ejus puncto G describatur semicirculus AEC, & per punctum E, in quo is secat crculum datum, ducatur recta AEL, erit hæc tangens quæsita.

Demonstratio. Quod si enim ducatur radius CE, erit angulus AEC rectus (468), & hinc AE ad radii CE extremum E perpendicularis, & consequenter circuli tangens (462).

Observa. Facile apparet, hujus problematis esse duplicem solutionem: poterat enim semicirculus AEC describi ex altera parte versus H, illucque etiam tangens duci.

De Lineis Proportionalibus.

555. *Hypothesis.* Si duæ rectæ AB, AC (Fig: 34) ad quemvis angulum junctæ secentur per quotcunque parallelas inter se, & æquidistantes DH, EI, FK, GL &c. . . . . .

1mo *Sunt omnes partes* AH, HI, IK, KL &c *lineæ* AC *inter se æquales; uti & omnes partes* AD, DE, EF &c *lineæ* AB *inter se æquantur.* Nam si ex quovis puncto, in quo parallelæ secant rectas AB, AC, demittantur perpendiculares AV, DM, EN, item AV, HQ, IR &c, facile ostenditur, triangula rectangula ADV, DEM, ENF &c inter sese æqualia esse (507); cum ob æquales parallelarum distantias, perpendiculares illæ omnes æquales sint, & anguli ad intersectionum puncta cum linea AB pariter æquentur, nempe ADV, DEM, EFN &c. Ex eadem causa triangula rectangula AHV, HQI, IRK &c sunt æqualia: igitur etiam eorum hypotenusæ AD, DE, EF &c, nec non AH, HI, IK &c sunt æquales inter se.

2do

2do *Quivis numerus partium rectæ* AC *est ad numerum partium rectæ* AB *interceptarum inter easdem parallelas, ut est alius quilibet numerus partium rectæ* AC *ad numerum partium rectæ* AB *rursus inter easdem parallelas interceptarum.* Etenim cum sit AD = DE = EF &c; & AH = HI = IK, evidens est, esse AD:DE::AH:HI, utpote cum quotiens rationis sit 1. Est igitur (304) AD:AH::DE::HI. Similiter est DE:EF::HI:IK, seu etiam DE:HI::EF:IK; consequenter AD:AH ::DE:HI::EF:IK; & eodem modo patet esse FG: KL::GB:LC. Hinc autem infertur (310), quod etiam sit AB (summa omnium antecedentium) ad AC (summam omnium consequentium), ut est AD ad AH, sive ut alia pars quævis rectæ AB ad partem correspondentem rectæ AC, seu (297) ut quotcunque partes rectæ AB ad totidem partes rectæ AC. Atqui numerus partium idem in rectis AB, AC abscinditur per binas quasvis parallelas; ergo est quivis numerus partium rectæ AB ad numerum partium rectæ AC, quæ inter easdem parallelas intercipiuntur, ut alter quilibet numerus partium rectæ AB ad numerum partium rectæ AC itidem inter easdem parallelas interceptarum.

556. Theorema I. Fundamentale. *In triangulis similibus latera homologa sunt proportionalia.*

Demonstratur. Quoniam triangulo simili imposito alteri, latus tertium fit tertio parallelum (509); si supponamus per totum spatium ABC (Fig. 16) duci rectas ad AC parallelas, & infinite propinquas, erit *fe* una ex his parallelis, & lateribus AB, CB idem accidet, quod in Fig: 34 rectis AB, AC. Habebitur itaque BA:BC::B*e*:B*f*, seu substitutis pro B*e* & B*f* æqualibus DE, DF, erit AB:BC::DE:DF. Si angulus E fuisset impositus homologo A, latus FD fuiſſet parallelum lateri BC; & hinc AB : ED :: AC : EF.

Et ſi denique poſitus fuiſſet angulus F ſupra æqualem C, fuiſſet AC : EF :: BC : FD.

557. *Scholium.* Jllud quoque manifeſtum eſt (555), partes A*e*, C*f* eſſe proportionales lateribus BA, BC. Unde eſt etiam A*e* : C*f* :: BA : CB :: DE : DF.

558. Theorema II. *Si in duobus triangulis ſint tria latera tribus homologis proportionalia, anguli lateribus proportionalibus oppoſiti æquales ſunt, & triangula ſimilia.*

Demonſtratio. Si (Fig: 16) ſit AC : BC :: FE : FD; & AC : AB :: FE : ED, dico triangulorum ABC, DEF angulos ſingulos ſingulis æquales eſſe. Nam conſtructo ſuper EF triangulo FEG, in quo ſit GEF = BAC, & GFE = BCA, eſt (556) AC : BC :: FE : FG; ſed ponebatur AC : BC :: FE : FD; igitur eſt FE : FG :: FE : FD, conſequenter (306) FD = FG. Eodem modo ob triangula ABC, FEG ſimilia, eſt (556) AC : AB :: FE : EG; & per hypotheſin AC : AB :: EF : ED; ergo FE : EG :: FE : ED, hoc eſt (306) EG = ED; & hinc in triangulis FED, FEG anguli ſunt æquales, ipſaque triangula tota æqualia (506) ob latus EF commune: quoniam igitur anguli trianguli FEG ex conſtructione æquales ſunt angulis trianguli ABC, etiam æquales erunt anguli trianguli DEF.

559. Theorema III. *Si in triangulis duo latera æqualem angulum comprehendentia ſint proportionalia, etiam reliqui duo anguli ſunt æquales.*

Demonſtratio. Sit in triangulis ABC, DEF, angulus B = D, & DE : DF :: BA : BC, dico, reliquos angulos E & F æquari reliquis A & C. Jn latere AB accipiatur B*e* = DE, & ducatur ex *e* parallela *ef* ad AC: erunt in triangulis ABC, *e*B*f* omnes anguli æquales, cum ob parallelam *ef* ſit *fe*B = A, *ef*B = C;

& an-

& angulus B communis; eſt igitur (556) $Be:Bf::BA:BC$; & eſt etiam per hypotheſin $DE:DF::AB:BC$; conſequenter $Be:Bf::DE:DF$; atqui $Be = DE$ ex conſtructione; ergo (306) $Bf = DF$; habent itaque (508) triangula Bef, DEF æqualia omnes angulos æquales; & quoniam anguli trianguli ABC æquales ſunt angulis trianguli Bef, æquabuntur etiam angulis trianguli DEF.

560. Theorema IV. *Recta* AD (Fig: 37), *quæ angulum* BAC *trianguli ſecat bifariam, ſecat etiam baſin oppoſitam in partes* BD, DC *lateribus adjacentibus* BA, AC *proportionales*, hoc eſt, erit $BD:DC::AB:AC$.

Demonſtratio. Producatur latus AC indefinite, & ducatur ex B recta BE parallela ad AD: erunt triangula BCE, DAC ſimilia (510); conſequenter (557) $DB:DC::AE:AC$. Sed ob parallelas, angulus AEB $= DAC = DAB = ABE$; igitur (499) triangulum BAE eſt iſoſceles, & $AE = AB$; & hinc ſubſtituto AB pro AE, erit $BD:DC::AB:AC$.

561. Theorema V. *Si ex angulo recto* E *trianguli rectanguli* CEL (Fig: 35) *demittatur in hypotenuſam* CL *perpendicularis* EO; 1mo *ea dividet triangulum in duo triangula* COE, OEL *tum inter ſe, tum toti* CEL *ſimilia*: 2do *perpendicularis* EO *erit media proportionalis inter ſegmenta hypotenuſæ* CO, OL. 3tio *quodvis latus trianguli* CEL *angulum rectum comprehendens erit medium proportionale inter hypotenuſam, & ejus ſegmentum adjacens illi lateri*.

Demonſtratio. Jllud imprimis evidens eſt, quod utrumvis triangulum COE, OEL ſimile ſit toti CEL, cum præter rectum detur in utrovis angulus communis triangulo CEL: ſunt igitur ſimilia inter ſe; & hinc . . . . .

In triangulo CEO eſt latus minimum CO ad me-

di-

dium EO, ut in triangulo EOL latus minimum EO ad medium LO, sive $\div$ CO . EO . LO.

In triangulo CEO est latus minimum CO ad suam hypotenusam CE, ut in triangulo CEL latus minimum CE ad suam hypotenusam CL, seu $\div$ CO.CE. CL.

In triangulo EOL est latus medium OL ad suam hypotenusam LE, ut in triangulo CEL latus medium EL ad suam hypotenusam CL, vel $\div$ OL . LE . CL.

562. Coroll: I. *Summa quadratorum laterum angulum rectum comprehendentium in triangulo rectangulo est æqualis quadrato hypotenusæ.* Cum enim sit $\div$ CO.CE.CL, habetur (316) $CE^2 = CO \times CL$. Eodem modo quia $\div$ OL . LE . LC, est $LE^2 = OL \times CL$: consequenter $CE^2 + LE^2 = CO \times CL + OL \times CL = (CO + OL) \times CL = CL \times CL = CL^2$.

563. *Coroll:* II. Quia $CE^2 + LE^2 = CL^2$, est quoque (217) $CE^2 = CL^2 - LE^2$; & $LE^2 = CL^2 - CE^2$: hoc est, *quadratum lateris unius angulum rectum comprehendentis in triangulo rectangulo est æquale excessui quadrati hypotenusæ supra quadratum lateris alterius.*

564 Coroll. III. *Diagonalis quadrati est incommensurabilis cum latere ejusdem.* Cum enim hæc diagonalis sit hypotenusa trianguli rectanguli, cujus duo latera inter se æquantur, ejus quadratum æquatur summæ quadratorum laterum, hoc est duplo quadrato lateris unius. Jam vero (183) radix quadrata numeri, qui fit alterius duplum quadratum, in numeris exprimi nequit: igitur si quadratum lateris exprimatur in numeris, in iis quadratum hypotenusæ exprimi non potest, & vicissim.

565. Theorema VI. *Perpendicularis* EO (Fig: 41) *ex quovis circumferentiæ puncto ad diametrum circuli* CL *ducta; est media proportionalis inter segmenta diametri* CO, OL; *seu* (quod idem est) *ejus quadratum est æquale facto* $CO \times OL$.

De-

Demonstratio. Ducantur enim ex eodem puncto E ad extrema diametri rectæ EC, EL, fiet (468) triangulum CEL rectangulum ad E; quare (561) $\div$ CO. OE. OL, sive (316) $EO^2 = CO \times OL$.

566. Theorema VII. *Si duæ chordæ* BA, DC (Fig: 38) *se in circulo intersecent, earum segmenta sunt reciproce proportionalia.*

Demonstratio. Ducantur DA, BC, erunt triangula BEC, DEA similia, ob angulos ad E, ad verticem oppositos, æquales, & præterea angulum C = A, utpote eidem arcui DB insistenti, nec non B = D insistenti eidem arcui AC; est igitur AE: DE :: EC : EB.

567. Theorema VIII. *Si duæ rectæ* EB, EC (Fig: 39) *ex eodem puncto extra circulum ducantur usque ad ejus peripheriam cavam, partes earum extra circulum a puncto illo, & circuli circumferentia interceptæ, sunt reciproce totis proportionales;* hoc est, EA : ED :: EC : EB.

Demonstratio. Ductis chordis AC, DB facile apparet, triangula EBD, ECA esse similia, cum angulus ad E sit utrique communis, anguli B & C vero eidem arcui AD insistant. Igitur est (556) EA : ED :: EC : EB.

568. Theorema IX. *Si ex eodem extra circulum puncto* E (Fig: 39) *ducantur duæ rectæ, quarum altera* EB *circulum secet, altera* Ed *eundem tangat, erit tangens media proportionalis inter totam secantem, & ejus partem extra circulum, nempe inter* EB, *&* EA; seu $\div$ EB. E*d*. EA.

Demonstratio. Ducantur *d*A, *d*B, erunt triangula E*d*B, E*d*A similia, cum ad E sit utrique communis, & EB*d* = A*d*E, quod nempe utrumque metiatur dimidius arcus A*d* (466 & 465); igitur etiam *d*AE = E*d*B, & consequenter (556) EB : E*d* :: E*d* : EA.

569.

569. Theorema X. *Si duæ rectæ ſeſe inter duas parallelas ſecent, earum ſegmenta ſunt inter ſe proportionalia.*

Demonſtratio. Triangula ABE, CED (Fig: 40) ſimilia ſunt, cum anguli ad verticem communem E oppoſiti æquales ſint; item EAB = EDC, & EBA = ECD, utpote alterni interni (433). Quare eſt (556) EA:ED::EB:EC.

570. Problema I. *Datis tribus* EA, EB, ED (Fig: 40) *invenire quartam proportionalem.*

Reſolutio. Ducantur rectæ indefinitæ AD, BC, quæ ſe ſub quovis angulo ſecent: e puncto interſectionis E transferantur in easdem datæ EA, EB, & ED; jungantur primarum duarum extrema A & B recta AB, cui per extremum tertiæ D ducatur parallela DH, quæ ita ſecabit rectam BC in C, ut ſit EC quarta proportionalis quæſita (569).

571. Problema II. *Inter duas rectas datas* CO, OL (Fig: 41) *invenire mediam proportionalem.*

Reſolutio. Rectæ datæ CO, OL ponantur in directum, & e puncto medio earum ſummæ F tanquam centro deſcribatur ſemicirculus CEL; excitetur e puncto O, in quo junctæ ſunt, perpendicularis OE occurrens ſemicirculo in E, erit EO media proportionalis inter CO, & OL (565).

572. Problema III. *Datis duabus rectis invenire tertiam continuam proportionalem;* hoc eſt, *ut ſecunda ſit inter primam & quæſitam media proportionalis.*

Reſolutio. Eſt eadem, quæ problematis primi, modo ſupponatur ſecunda & tertia data eſſe eadem linea.

573. Problema IV. *Dividere rectam datam* AC (Fig: 42 N. 1) *in eadem ratione, in qua ſecta eſt altera recta data* AB.

Reſolutio. Rectæ datæ jungantur ſub quovis angugulo BAC, & jungantur earum extrema recta BC, cui per singula puncta divisionum rectæ AB agantur parallelæ G g, F f &c; erit ob triangula ABC, AGg, AFf &c similia, quævis pars rectæ AC (557) proportionalis parti correspondenti lineæ AB.

574. Problema V. *Rectam datam ita secare, ut sit pars major media proportionalis inter totam, & partem minorem.*

Resolutio. Sit data AB (Fig: 42. N. 2) erigatur in ejus extremo A perpendicularis AE æqualis dimidiæ AB; radio EA, centro E describatur circulus D A F; ducatur per B & E recta B F, & puncto B tanquam centro describatur radio BD arcus DC, qui datam AB secabit, ut petebatur, nempe ut sit $\div$ AB.BC. AC.

Demonstratio. Quoniam BA circulum tangit, est (568) BF : BA : : BA : BD; & hinc BF — BA : BA :: BA — BD : BD; est autem BF — BA = BD = BC, cum sit FD = BA, utpote dupla radii EA, qui est æqualis dimidiæ AB. Similiter est BA — BD = AC; igitur his substitutis erit BC : BA : : AC : BC, sive $\div$ BA . BC . AC.

Alias hoc problema ita enunciatur: *rectam datam secare in ratione media & extrema.* Dicebatur etiam resolutio ejus *sectio divina*, ob admirandas nempe proprietates, quæ ei tribuebantur.

De Comparatione Figurarum sive de proprietatibus figurarum similium.

575. Ut clara notio duarum figurarum similium efformetur, eæ considerandæ sunt, velut quæ tum quoad perimetrum, tum quoad superficiem singulæ compositæ sunt punctis ita dispositis, ut nullum sit in altera, cui non respondeat aliquod in altera eodem modo positum, ut proinde hæ duæ figuræ exurgant e duplici combinatione punctorum eodem numero, eodemque ordine collocatorum. Enimvero inæquali-

litas tam in finitorum, quam in infinitorum ordine locum habet (354). Puncta omnia figurae unius inter se aequalia esse debent; at dimensiones punctorum unius debent constantem rationem servare ad dimensiones punctorum alterius, quae quidem ratio alia non est, quam quae inter latera homologa duarum figurarum intercedit.

Quare tum concipiuntur animo duae figurae similes, quando cogitantur numero partium aequali constare, & eodem modo dispositarum, eandemque rationem ad sese conservantium; poterunt proinde hunc in modum definiri: *duae figurae similes sunt, si numero laterum aequali constent, & sint latera singula singulis homologis proportionalia, & anguli lateribus homologis comprehensi aequales.* E quo sequitur, *omnia polygona regularia ejusdem speciei, consequenter etiam omnes circulos, esse figuras similes; imo etiam arcus quoslibet, quorum numerus graduum idem est.*

576. Theorema I. *Utcunque figurae similes resolvantur in triangula per diagonales ad angulos homologos ductas, erunt triangula homologa similia.*

Demonstratio. Si duo polygona ABCDE, FGHIK (Fig: 43 & 44) sint ejusmodi, ut sit angulus A = F, B = G, C = H, D = I, E = K; & AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EA : KF; dico si ducantur diagonales AC, AD, FH, FI, triangula ABC, FGH; item ACD, FHI; nec non ADE, FIK fore similia.

Quoniam enim angulus B = G, & uterque lateribus proportionalibus comprehenditur, patet (558), triangula ABC, FGH esse similia; uti etiam triangula ADE, FIK, ob eandem rationem. Hoc posito est angulus BAC = CFH, & DAE = IFK; igitur etiam angulus BAE—BAC—DAE = GFK—GFH—IFK, seu CAD = HFI. Eodem modo ostenditur, esse angugulum ACD = FHI, & ADC = FIH: itaque etiam triangula ACD, FHI similia sunt.

577. *Theorema* II. E converso *Si duæ figuræ in totidem triangula similia resolvi possint, figuræ similes sunt.*

Demonstratio. Nam ob angulos triangulorum similium æquales, etiam anguli figurarum æquales sunt; & quia latera figurarum simul pertinent ad triangula similia, etiam hæc latera homologa proportionalia sunt (556); quare ipsæ figuræ similes sunt (572).

578. Theorema III. *Si in duobus polygonis similibus ducantur rectæ eodem modo determinatæ, hoc est, quæ latera homologa, vel angulos homologos secent in eadem ratione;* primo *hæ rectæ sunt proportionales inter se, & lateribus quibusvis homologis polygonorum;* secundo *eædem dividunt polygona in partes, quarum homologæ sunt similes.*

Demonstratio. Sit ex. gr. BC in L (Fig. 43 & 44) & latus homologum GH in M in ratione eadem divisum, nempe ut sit BC : GH :: LC : MH, aut (quod eodem redit) sint puncta L, M in rectis BC, & GM correspondentia, sive *similiter posita.* Ducantur dein quævis duæ rectæ LN, MO, quæ faciant angulos quoslibet æquales CLN, HMO versus eandem partem; vel quæ dividant latera homologa ED, KI in eadem ratione, ut sit ED : KI :: DN : IO; dico, fore LN : MO :: CD : HI :: BC : GH, &c.

Etenim ductis NC, OH, manifestum est, triangula NCD, OHI esse similia (559) ob angulos ad D & I lateribus proportionalibus ND, DC; OI, IH comprensos æquales; est ergo (555) CD : HI :: CN : HO, & angulus DCN = IHO; quod si igitur hi anguli æquales demantur ab æqualibus DCL, IHM, remanet NCL = OHM: consequenter (558) etiam triangula NCL, OHM sunt similia, & LN : MO :: LC : MH :: BC : GH :: CD : HI, &c.

2do. Si simili ratione ducantur in hisce figuris duæ quævis aliæ rectæ, demonstrabitur eodem modo, eas esse inter se, ut latera quævis homologa, consequenter etiam eas esse proportionales rectis LN, MO.

3tio. Denique evidens est, per rectas LN, MO secari figuras duas propositas in quatuor, quarum binæ homologæ ABLNE, FGMOK, sunt figuræ similes, & partes similes suorum polygonorum, utpote cum earum anguli, singuli singulis, sint æquales, & latera homologa proportionalia, ideoque nullum aliud inter eas sit discrimen, quam quod altera sit alterâ major eadem ratione, qua polygonum alterum majus est altero. Idem est de partibus LNDC, MOIH.

579. *Dimensiones homologas* vocabo deinceps duas lineas, velut LN, MO, quæ eodem modo in duabus figuris similibus describuntur, aut quarum extrema desinunt in puncta in utravis figura similiter posita. Sic duo latera homologa duarum figurarum similium, duo radii, vel diametri, vel etiam chordæ circulorum arcus totidem graduum subtendentes &c, sunt dimensiones homologæ: estque *omnium figurarum similium proprietas, quod omnes earum dimensiones homologæ sint proportionales.*

SE-

SECTIO SECUNDA.

De Superficiebus.

De Superficierum perimetris, earumque Comparatione.

580 *Axioma* vel *Theorema* I. *Ambitus*, vel perimeter *figuræ cujuslibet*, *eſt æqualis ſummæ laterum.*

581. Theorema II. *Perimetri duarum figurarum ſimilium ſunt inter ſe, ut latera, vel dimenſiones quævis homologæ utriusque figuræ.*

Demonſtratio. Perimeter figuræ primæ eſt ad perimetrum figuræ ſecundæ, ut eſt ſumma laterum primæ ad ſummam laterum ſecundæ; & quia figuræ per hypotheſin ſunt ſimiles, habent omnia latera proportionalia (577) ita, ut latera primæ ſint antecedentia, & latera ſecundæ conſequentia rationum æqualium; eſt autem (310) ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium, ut quodvis antecedens ſeparatim ad ſuum conſequens: igitur eſt perimeter figuræ primæ ad perimetrum figuræ ſecundæ, ut quodvis latus primæ ad latus homologum ſecundæ, ſeu (578) ut dimenſio quævis primæ ad dimenſionem homologam ſecundæ.

582. Coroll: *Circumferentiæ, vel arcus circulorum ejusdem numeri graduum, ſunt inter ſe ut radii, vel ut diametri, vel etiam ut chordæ eundem numerum graduum in circulis, vel eorum arcubus ſubtendentes.* Nam (578) circuli, vel arcus ejusdem numeri graduum, ſunt figuræ ſimi-

miles; radii vero, vel diametri &c sunt eorum dimensiones homologæ (579).

De mensuris aptis determinandæ magnitudini Superficierum.

583. *Superficies*, vel *area* figuræ dicitur quantitas, quæ magnitudinem spatii lateribus figuræ comprehensi exprimit.

584. Superficies est extensio, in qua duæ dimensiones simul considerantur (387). Utriuslibet harum dimensionum mensura accurata est linea recta; verum ea nequit esse mensura superficiei. Sic areæ alicujus ideam nemo habet, si sciat solum, longitudinem esse 100 pedum; at si addatur, quod latitudo sit ubivis pedum 20, illico tota ejus extensio concipitur, si nempe longitudo absoluta unius pedis sit cognita; quod si hæc nesciretur, solummodo idea figuræ illius areæ nasceretur, quæ scilicet conciperetur ut parallelogrammum, cujus longitudo sit latitudinis quintupla.

585. Mensuræ itaque superficierum debent esse superficies; quemadmodum mensuræ linearum sunt lineæ. Si quis metiri velit superficiem in pedibus, vel orgyis, adhibendæ sunt superficies unius pedis, vel unius orgyæ. Jam vero nequit cogitari superficies unius pedis, nisi si concipiatur spatium (consequenter figura lateribus terminata) quod ubivis in longum, & latum habeat unum pedem: & longitudo quidem illius (438) mensurari debet per lineam perpendicularem jungentem latera longitudinem figuræ terminantia; & latitudo pariter mensurari debet per perpendicularem jungentem latera, quæ latitudinem figuræ terminant: igitur superficies unius pedis debet esse figura, cujus singula latera, & perpendicula quæ-

quævis inter latera opposita intercepta, sint unius pedis, ac proinde ut quadrata sit, oportet. Idem est de aliis mensurarum speciebus.

586. Universim autem hinc inferri potest, *quadratum esse mensuram communem superficierum.* Ut itaque indicetur magnitudo superficiei cujuscunque figuræ, dicitur ea esse tot digitorum, pedum, orgyarum &c quadratarum, quo significatur, totum ejus figuræ spatium tot quadratis, quorum quodlibet sit unius digiti, unius pedis, unius orgyæ &c tegi accurate posse.

587. Porro facile intelligitur, *numerum partium, quas continet mensura spatii in superficie, esse quadratum numeri partium, quas continet eadem mensura in longitudine.* Exempli causa, pes quadratus continet 144 quadrata, quorum singula sunt unius digiti; hexapeda quadrata continet 36 quadrata, singula unius pedis. Nam pes quadratus continet 12 series 12 digitorum quadratorum, cum cuivis digito latitudinis in directum jaceant 12 digiti longitudinis: eodem modo orgya quadrata continet sex ordines 6 pedum quadratorum.

Methodus Generalis Metiendi Superficies.

588. Si concipiatur linea AB (Fig. 19 vel 21) ita moveri usque in DC, ut sibi ipsi semper maneat parallela, facile apparet, ab ea totam parallelogrammi ABCD superficiem successive obtegi: ut enim per quodvis punctum progreditur, ita semper partem superficiei suæ æqualem tegit: est igitur hæc superficies æqualis longitudini AB toties acceptæ, per quot puncta progressa est recta AB, ut veniret in CD. Jam vero numerus hic punctorum æqualis est rectæ metienti distantiam parallelarum AB, CD, quæ sit perpen-

pendicularis (438) ex quovis puncto rectæ DC in rectam AB, etiam productam, si necesse sit, demissa velut EF, vel DG: ergo superficies parallelogrammi ABCD æqualis est numero punctorum rectæ AB toties accepto, quot sunt puncta in recta EF; sive quod idem est, est æqualis facto ex linea AB in lineam EF.

589. Perpendicularis EF, vel DG, quæ distantiam laterum parallelorum metitur, dicitur *altitudo* parallelogrammi, & latus ejusmodi parallelum vocatur *basis*. Unde . . . .

590. Theorema I. *Superficies parallelogrammi cujusvis æquatur facto ex basi in altitudinem.*

591. *Observa.* Quodvis vestigium rectæ AB, quorum summa æquatur superficiei parallelogrammi A B C D, in se est parvum quoddam parallelogrammum, cujus latitudo est spatium motu momentaneo a recta AB occupatum; sed cum spatium hoc sit infinite parvum, nil differet ab ipso rectæ AB vestigio, cui latitudo infinite parva tribui potest; & universim dici, *superficiem figuræ alicujus æquari summæ omnium parallelarum, quæ intra talem figuram duci possunt.*

592. Theorema II. *Superficies trianguli æqualis est facto dimidio ex latere quovis ducto in perpendiculum ex angulo opposito in hoc latus* (etiam productum, si opus sit) *demissum.* Parallelogrammum enim per diagonalem in duo triangula æqualia dividitur: unde quodvis triangulum considerari potest, ut dimidium alicujus parallelogrammi, cujus altitudo est perpendicularis ex angulo trianguli in latus oppositum demissa.

Præsens Theorema independenter â parallelogrammis hunc in modum demonstrari potest.

Superficies trianguli cujuslibet ABC (Fig: 34) æqualis est summæ omnium parallelarum BC, GL, FK &c,

&c, quæ a basi usque ad verticem duci possunt; jam vero omnes hæ parallelæ decrescunt in ratione Arithmetica, hoc est, earum differentia semper est eadem; nam GL differt a BC quantitate BP + TC; & FK differt á GL quantitate GO + SL &c, suntque hæ differentiæ inter se œquales, cum omnia parva triangula GBP, FGO &c æqualia sint, uti etiam ex altera parte LTC, KSL &c, consequenter BP + TC = GO + SL. Quare omnes eæ parallelæ, quæ superficiem trianguli occupant, considerari possunt ut series quantitatum progressionem Arithmeticam constituentium, quarum numerum exprimat perpendicularis AX, & terminus ultimus sit BC, primus vero ipse vertex A, tanquam parallela infinite parva. Est autem summa hujus progressionis (280) $= \overline{BC + A} \times \frac{1}{2}AX$, sive (cum A sit infinite parva) $= BC \times \frac{1}{2}AX$.

593. Coroll: *Omnia triangula*, consequenter etiam *parallelogramma*, *quæ sunt inter easdem parallelas, & basin vel eandem, vel æqualem habent*, *habent eandem aream:* quippe cum tunc habeant eandem etiam altitudinem, quæ est distantia earum parallelarum.

594. Theorema III. *Triangulorum quorumvis areæ sunt inter se in ratione composita basium & altitudinum.*

Demonstratio. Superficies triangulorum sunt dimidia productorum ex eorum basibus in altitudines; sunt autem dimidia inter se, ut tota (297); igitur superficies triangulorum sunt ut producta ex eorum basibus in altitudines. Atqui (290) ratio productorum est ratio composita e rationibus factorum, seu radicum; ergo superficies triangulorum sunt in ratione composita eorum basium & altitudinum.

595. Coroll: *Areæ duorum triangulorum inæquales*, *quo-*

quorum bases æquales sunt, sunt inter se ut eorundem altitudines; & areæ inæquales triangulorum æqualem altitudinem habentium, sunt ut eorum bases.

Demonstratio. Sunt enim in utravis hypothesi ut producta duarum quantitatum inæqualium in eandem tertiam; igitur (296) ut quantitates illæ inæquales.

596. Theorema IV. *Si duorum triangulorum altitudines sint in ratione reciproca basium, eorum areæ sunt æquales.*

Demonstratio. Nam cum tunc sit basis unius ad basin alterius, ut alterius altitudo ad altitudinem illius, est factum ex basi primi in suam altitudinem æquale facto e basi secundi in suam altitudinem (300).

597. Theorema V. E converso *si duo triangula dissimilia habeant areas æquales, earum dimensiones sunt in ratione reciproca.*

Demonstratio. Etenim in hac hypothesi dimensiones unius trianguli efficiunt productum æquale producto ex dimensionibus alterius: igitur (302) dimensiones unius sunt termini extremi proportionis, & dimensiones alterius sunt medii: v. g. altitudo primi est ad altitudinem secundi, ut basis secundi ad basin primi trianguli. Quare dimensiones istæ constituunt rationem reciprocam.

598. Theorema VI. *Areæ triangulorum similium sunt in ratione duplicata, sive ut quadrata dimensionum homologarum.*

Demonstratio. Quoniam (579) in figuris similibus dimensiones homologæ proportionales sunt, areæ duorū triangulorum sunt inter se ut producta terminorū proportionalium; atqui (291) ratio productorū terminorum proportionalium est ratio duplicata; sunt igitur areæ triangulorum similium in ratione duplicata. Sed ratio duplicata est (298) ratio quadrati unius antecedentis, quod rationem duplicatam componit, ad

qua-

quadratum sui consequentis; igitur superficies duorum triangulorum similium sunt inter se, ut quadratum dimensionis cujusvis acceptæ in uno triangulo, ad quadratum dimensionis homologæ in altero, id, quod generatim enunciatur dicendo, quod sint in ratione duplicata dimensionum homologarum quarumvis.

599. Theorema VII. *Superficies figuræ cujuscunque æqualis est summæ superficierum omnium triangulorum, in quæ resolvitur.*

600. Theorema VIII. *Ut igitur habeatur superficies polygoni irregularis, resolvendum est in triangula, omniumque horum areæ colligendæ in unam summam* (592).

601. Theorema IX. *Superficies polygoni regularis æqualis est facto ex perpendiculari in unum latus e centro demissa, & in dimidiam perimetrum ducta.*

Demonstratio. Cum omnia triangula, in quæ ductis radiis polygonum regulare resolvitur, sint inter se æqualia (531), atque eandem habeant propterea altitudinem = CI (Fig: 26), superficies totius polygoni regularis æqualis $CI \times \frac{1}{2}AB + CI \times \frac{1}{2}BD + CI \times \frac{1}{2}DE + CI \times \frac{1}{2}EF + CI \times \frac{1}{2}FG + CI \times \frac{1}{2}GH + CI \times \frac{1}{2}HA$. Atqui hæc omnia facta (222) æqualia sunt producto ex CI in $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}EF + \frac{1}{2}FG + \frac{1}{2}GH + \frac{1}{2}HA$, hoc est in dimidiam perimetrum polygoni.

602. Coroll: I. *Superficies circuli æqualis est facto ex ejus radio in semicircumferentiam.*

603. Coroll: II. *Superficies circuli æqualis est quadrato, cujus latus sit medium geometrice proportionale inter radium, & rectam æqualem semicircumferentiæ* (316).

604. Coroll: III. *Area sectoris circuli æqualis est facto ex radio in rectam æqualem semiarcui sectoris.* Etenim area sectoris circuli est ejusmodi portio polygoni re-

gularis, qualis per HCDBAH (fig: 26) repræsentatur. Atqui evidens est, aream hujus portionis æquari facto ex CI in dimidium perimetri HABD.

605. Theorema X. *Polygonum quodvis ABCDE* (Fig: 36) *reduci potest ad triangulum AEG ejusdem areæ.*

Demonstratio. Per diagonalem quamvis BD abscindatur triangulum DBC, ex cujus vertice C agatur CF diagonali BD parallela occurrens lateri AB, producto, si necesse sit, in F; jungantur D & F; habebitur polygonum AFDE ejusdem areæ cum dato, & cujus angulorum numerus unitate minor est. Nam si ex triangulis DBC, DBF æqualibus (593) auferatur triangulum commune DHB, manebit DHC æquale triangulo BHF. Quod si igitur ducta DF abscindatur a polygono dato triangulum DHC, & ejus loco accedat triangulum BHF æquale, erit polygoni novi AFDE area æqualis areæ dati. Hac operandi methodo novum polygonum AFDE mutari potest in aliud æqualis areæ, & angulos uno pauciores habens, donec successive reducatur ad unicum triangulum.

606. *Coroll:* Ex hoc, & præcedentibus Theorematis infertur, *superficiem figuræ cujuslibet esse vel unicum productum duarum dimensionum, vel ad unicum reduci posse.*

607. Theorema XI. *Areæ duarum quarumcunque figurarum similium sunt inter se in ratione duplicata, sive ut quadrata dimensionum homologarum quarumvis.*

Demonstratio. Quoniam figuræ duæ similes ad totidem triangula similia reducuntur (578), quorum areæ sunt ut quadrata dimensionum homologarum (598); & (579) omnes dimensiones homologæ sunt in figuris similibus tum inter se, tum cum aliis proportionales, consequens est, ut areæ omnium triangulorum homologorum duarum figurarum similium, sint

in

in ratione quadratorum dimenſionum homologarum quarumvis earundẽ figurarum, adeoque ut ſint inter ſe proportionales. Hoc poſito, manifeſtum eſt, ſuperficiem primæ figuræ eſſe ad ſuperficiem ſecundæ, ut eſt ſumma arearum triangulorum, ad quæ figura prima reducitur, ad ſummam arearum triangulorum, ad quæ reducitur ſecunda figura: ac propterea (310) ut eſt area unius cujuslibet trianguli figuræ primæ ad aream trianguli homologi ſecundæ; aut denique ut eſt quadratum dimenſionis cujusvis figuræ primæ ad quadratum dimenſionis homologæ in figura altera.

608. Coroll. I. *Areæ circulorum ſunt inter ſe ut quadrata radiorum, vel diametrorum.*

609. *Coroll.* II. Dum itaque ſervata figuræ ſimilitudine area polygoni augenda vel minuenda eſt, ſequens ineunda eſt proportio: *ut area polygoni dati eſt ad aream polygoni quæſiti; ita eſt quadratum lateris cujusvis polygoni dati ad quadratum lateris homologi polygoni quæſiti.* Hac ratione reperientur ſingula latera. Aut vero ſi jam per expoſitam analogiam latus unum repertum eſt, quodvis alterum ex ſequente invenietur: *ut latus polygoni dati eſt ad homologum per primam analogiam inventum, ita eſt quodvis aliud latus polygoni dati ad homologum polygoni quæſiti.* V. g. oporteat conſtruere parallelogrammum A ſimile dato B, ut area A ſit ad aream B ut 3 ad 1, ſive tripla. Sit parallelogrammi dati B latus majus 6 pedum, minus 4 pedum. Fiat: ut 1 eſt ad 3, ita ſunt 36 (quadratum lateris 6 pedum) ad 108, quadratum lateris majoris parallelogrammi A, cujus radix proxime eſt 10, 392 pedum. Dein fiat, ut 6 ad 10, 392, ita ſunt 4 ad 6, 928 pedes, quod erit latus minus parallelogrammi A. Unde lateri majori 10 pedes, 4 digiti, 8 lineæ tribuendæ ſunt, & minori 6 pedes, 11 digiti, 1 ½ lineæ, ut parallelogrammi A area ſit tripla areæ parallelogrammi dati B.

610.

610 Theorema XII. *Si trium polygonorum similium dimensiones quævis homologæ ejusmodi sint, ut sumptæ pro lateribus constituant triangulum rectangulum; area illius polygoni, cujus dimensio est hypotenusa trianguli, æqualis est summæ arearum reliquorum duorum; & area utriusvis polygoni, cujus dimensio est latus circa angulum rectum, æquatur differentiæ arearum polygoni, cujus dimensio est hypotenusa, & alterius, cujus dimensio est alterum latus circa angulum rectum.*

Demonstratio. Nam areæ trium ejusmodi polygonorum sunt inter se ut quadrata trium laterum trianguli rectanguli; est autem quadratum hypotenusæ (562) æquale summæ quadratorum laterum circa angulum rectum: & quadratum lateris unius circa angulum rectum est æquale differentiæ quadrati hypotenusæ, & quadrati alterius lateris; igitur idem est de areis horum polygonorum dicendum.

611. *Scholium.* Eruitur hinc expedita methodus Geometrica construendi polygona, quæ sint datorum duorum similium summa, vel differentia. Si petatur polygonum æquale summæ, latera homologa datorum quælibet constituantur ad angulum rectum; hypotenusa extrema eorum jungens erit latus homologum polygoni quæsiti. Si desideretur polygonum æquale differentiæ datorum, super latere quovis majoris tanquam diametro describatur semicirculus, & ex altero diametri hujus extremo transferatur in peripheriam latus homologum alterius polygoni minoris; tum punctum peripheriæ, in quod cadit, conjungatur cum extremo altero diametri; erit recta hæc latus homologum polygoni petiti.

Nonnullæ Observationes in quadraturam Circuli.

612. Quamvis per superiores propositiones nota sit ratio circumferentiæ, & areæ unius circuli ad circumferentiam vel aream alterius in eorum radiis vel diametris, non tamen adhuc ratio diametri circuli ad suam circumferentiam exacta determinari potuit, ita, ut data in numeris diametro, exhiberi etiam circumferentia in numeris accuratis queat: unde neque vera

ra magnitudo areæ habetur, quæ nempe eſt (602) factum ex ſemidiametro in ſemicircumferentiam. Atque hoc intelligi debet, dum dicitur, *quadraturam circuli nondum eſſe inventam.* (Uſurpatur autem vox *quadratura*, quod quadratum (586) ſit communis menſura ſuperficierum).

613. Summorum Mathematicorum conatus eo tandem recidit, ut demonſtraretur, fieri non poſſe, ut certis quibusdam methodis quadratura hæc reperiatur, attamen facile eſſe propius ſemper, propiusque in infinitum accedere; & ſane accuratio, quam obtinuimus jam, plusquam ſufficiens eſt applicationi Geometriæ, etiam dum exactitudine ſumma opus eſt; ut Geometræ peritiores quadraturam abſolutam circuli inter ea referant, quorum pretium ſit ſola pulchritudo & raritas, ideoque operam ſuam rerum magis utilium inventioni impendant: atque id eo magis, quod admodum certum habeant, quod ſi ratio vera diametri circuli ad ſuam circumferentiam numeris exprimi poſſet, ii numeri adeo forent magni, ut in calculis eorum uſus eſſe non poſſet, ac propterea in praxi ſemper recurrendum eſſet ad eos, quos nunc ignorata illa quadratura adhibemus. Verum qui rerum Mathematicarum nonniſi ſuperficiariam cognitionem habent, plerumque magna cum confidentia celebratiſſimi hujus Problematis ſolutionem aggrediuntur, licet ſæpe ne quidem quæſtionis naturam ſatis perſpectam habeant; nec deſunt etiam, qui ſibi perſvadeant, ſe eam inveniſſe.

614. Plures repertæ ſunt methodi abſolute quadrandi ſpatia nonnulla arcubus circulorum, vel arcubus & lineis rectis comprehenſa. Exempli cauſa è veteribus Geometris Græcis Hippocrates Chius oſtendit, *quod ſi ſuper lateribus & hypotenuſa trianguli rectanguli deſcribantur ſemicirculi* (velut in Fig. 45.

45 N. 1) *bina spatia curvilinea* AECGA, CFBHC *simul sumpta æquentur areæ trianguli rectanguli* ACB.

Hæc spatia curvilinea dicuntur *lunulæ* Hippocratis.

Demonstratio. Cum areæ circulorum sint inter se, ut quadrata eorum diametrorum (608), summæ arearum sunt inter se ut summæ quadratorum diametrorum; est autem (562) quadratum diametri AB æquale summæ quadratorum diametrorum AC, BC; igitur area semicirculi ACHB æquatur summæ árearum semicirculorum AEC, CFB: quare si a semicirculo ACHB auferantur partes ACG, & CBH communes semicirculis AEC CFB; manebunt lunulæ AECGA + CFBHC æquales areæ trianguli ACB.

Si triangulum rectangulum foret isosceles, demissa in hypotenusam perpendicularis divideret illud in triangula æqualia, quorum utrumvis esset æquale suæ lunulæ. Variæ aliæ partes circuli quadrabiles inveniri possunt in Monumentis Academiæ Regiæ Scientiarum ad An: 1701 pag: 17, & An: 1703 pag: 21. Videatur etiam in Fig: 45 N. 2 spatium CDHAIBKC, quatuor circuli quadrantibus terminatum, & quadrato CDAB æquale.

615. Ratio diametri ad peripheriam circuli proxime determinari potest vel mechanice, conferendo v. g. cum diametro longitudinem fili circumferentiæ exacte undique circumplicati; vel Geometrice, calculando perimetrum & dimensiones polygoni regularis magno laterum numero constantis. Atque hunc in modum Archimedes rationem propinquam diametri ad circumferentiam reperit 7 ad 22; alii statuerunt eam 1 ad 3, 14159265, & si porro 127 notæ decimales jungantur, approximatio, est prope incredibilis. Metius eandem determinat 113 ad 355, quæ in numeris parvis omnium est accuratissima.

616. Data itaque diametro circuli, ejus circumferentia e sequente proportione quærenda est: *ut* 113 *ad* 355, *ita est diameter circuli data ad ejus circumferentiam.* Si præterea desideretur circuli area, ejus semidiameter

ter (602) data ducatur in ſemicircumferentiam methodo expoſita inventam.

Proprietates Planorum, ſive ſuperficierum Planarum.

Suppoſuimus hucusque, omnes lineas, & figuras, eſſe in plano ſitas, & spatia ab iis comprehenſa describi motu punctorum vel linearum in plano, cujusmodi dari (395) poſſe, poſtulavimus; nunc jam geneſin & modum, quo Geometrice planum producitur, oſtendemus.

617. *Hypotheſis.* Concipiatur recta AB libere in aere poſita, cui altera indefinita ED ſit perpendicularis (Fig: 46); cogitetur recta AB circa ſe ipsam alicujus axis inſtar moveri, quin ſitum ſuum mutet: patet manifeſte, a recta altera ED debere describi ſuperficiem planam CCCDDD; atque hanc ſuperficiem fore ad rectam AB perpendicularem.

Eſt igitur *planum ejusmodi ſuperficies, ut ab omnibus punctis lineæ rectæ ſuper ea poſitæ, & utcunque converſæ, ſemper tangatur.*

618. Si dictæ lineæ non inſiſterent altera alteri perpendiculariter, figura descripta plana non eſſet. Exempli gratia ſi recta MN (Fig: 54) circa ſeipsam volvatur, eique juncta ſit altera MB ſub angulo ad M acuto NMB, facile intelligitur, a recta MB describi debere ſuperficiem rotundam, in apicem ex una parte coeuntem, extrorſum convexam, & intus cavam; cui ſane recta non ita imponi poteſt, ut in quovis ſitu omnia ejus puncta hanc ſuperficiem contingant.

619. Theorema I. *Rectæ plano impoſitæ nequit pars eſſe in plano, pars ſupra, vel infra illud.*

620. Coroll: I. *Si duo puncta rectæ sint in plano, tota recta in eo est.*

621. Coroll: II. *Nequit pars una plani A congruere cum plano B, pars altera esse supra vel infra illud.* Alias etiam recta posita in plano A posset habere partem in plano B, partem supra vel infra planum B, quod est absurdum.

622. Theorema II. *Tria puncta non in eadem recta posita, situm, seu positionem plani determinant.*

Demonstratio. Concipiatur planum aliquod poni supra quotcunque puncta in directum jacentia; facile concipitur, hæc puncta, si immobilia sint, fore fulcrũ aliquod, circa quod, tanquam axem, planum libere converti possit. At si cogitetur planum imponi tribus punctis non in eadem linea recta sitis, ea erunt fulcrum, circa quod planum nequit rotari, sed quo in situ constante retinetur. Jgitur tria puncta non in directum posita, situm, seu positionem plani determinant.

623. Coroll: *Per quodvis triangulum determinatur planum, ejusque positio.*

624. Theorema III. *Recta ad planum perpendicularis, est etiam perpendicularis ad omnes rectas in eodem plano sitas, & per punctum, in quo insistit plano, transeuntes.* Sic AE est perpendicularis omnibus rectis CED, CED &c (Fig: 46).

625. Theorema IV. *Duæ rectæ eidem plano perpendiculariter, vel sub æqualibus angulis versus eandem partem insistentes, sunt inter se parallelæ, & vicissim.*

626. Theorema V. *Duæ rectæ se intersecantes sunt in eodem plano;* seu *potest semper concipi planum, in quo utraque sita sit.*

Demonstratio. Nam præter punctum intersectionis

nis poteſt in utraque aſſumi unum punctum ad arbitrium, quæ conſequenter erunt tria puncta non in directum jacentia, per quæ conſequenter (622) poſitio plani determinetur, in quo utriusque lineæ bina puncta exiſtunt: ſunt igitur (620) totæ in eodem plano.

627. Theorema VI. *Si duæ rectæ in eodem plano exiſtentes ſecentur a tertia, extra commune earum punctum interſectionis, ſi quod habent, etiam tertia erit in eodem plano;* quippe cum duo ejus puncta, in quibus duas illas ſecat, in eodem plano ſint.

628. Theorema VII. *Tria puncta non in eadem recta ſita non poſſunt eſſe duobus diverſis planis communia.*

Demonſtratio: Tria puncta non in eadem recta poſita ſitum plani determinant. Quod ſi jam tria ejusmodi puncta diverſis duobus planis poſſent eſſe communia, ſpatium a rectis hæc puncta conjungentibus comprehenſum eſſet commune duobus planis: unde alterum haberet partem congruentem cum altero, partem vel ſupra, vel infra alterum, quod eſt abſurdum (621).

629. Coroll: *Interſectio duorum planorum debet eſſe linea recta.* Nam interſectio debet eſſe linea, cujus omnia puncta ſint utrique plano communia.

630. *Hypotheſis.* Concipiatur planum quoddam immobile A, cui alterum planum B rectis terminatum, (nempe polygonum quodvis) ſuperponatur. Quoniam plana omni profunditate carent, unicum planum conſtituent. Cogitetur jam planum B circa aliquod latus ſuum, tanquam circa axem ſemper cum plano A congruentem, converti, manifeſtum eſt *primo*, quam primum hic motus incipit, præter latus, circa quod planum B convertitur, nihil manere hisce planis commune. 2*do*, planum B ſucceſſive tranſi-

re per omnes gradus inclinationis cum plano A, si tamdiu rotetur, donec ex altera parte rursus contingat planum A. 3*tio*, planum B fore tunc perpendiculare ad planum A, quando neutram in partem magis inclinatur. 4*to*, diversas inclinationes metiendas esse per numerum progressuum momentaneorum cujusvis puncti plani B a puncto correspondente plani A. Hæc itaque mensura erit arcus circuli, cujꝰ centrum est in recta, circa quam planum B movetur: & quoniam centrum debet esse in eodem plano cum circulo, centrum hujus arcus debet esse in recta suo motu planū ab arcu terminatū generante. Atqui recta (618) nisi sit perpendicularis ad illam, circa quam velut axem convertitur, nequit generare planum: ergo *centrum arcus inclinationem planorum metientis est in perpendiculari ex quovis arcus puncto ad planorum interſectionem ducta.* Si itaque describatur semicirculus, cujus centrum sit in linea utrique plano communi, & cujus planum sit ad eorum communem intersectionem perpendiculare, ejus gradus metientur inclinationes quaslibet plani mobilis cum immobili.

Jllud etiam facile intelligitur, quod si a plano mobili B secaretur planum immobile A, & circa communem intersectionem planum mobile converteretur, pars plani mobilis ultra immobile existens eodem tempore conficeret suum semicirculum, easdemque successive acquireret inclinationes ex parte opposita; quas pars cis planum immobile haberet.

Sequitur hinc, eadem convenire duobus planis ad sese inclinatis, quæ competunt lineis rectis sub quovis angulo concurrentibus. Unde . . .

631. Theorema VIII. *Si planum insistat alteri plano, facit duos angulos deinceps positos rectos, vel quorum summa æquetur duobus rectis.*

632.

632. Theorema IX. *Si duo plana se secent, anguli ad verticem oppositi sint æquales.*

633. Theorema X. *Summa quotcunque angulorum a planis se in eadem recta intersecantibus comprehensorum est 360 graduum.*

634. Theorema XI. *Ex eodem plani puncto unica perpendicularis ad planum potest erigi; & ex eodem extra planum puncto unica perpendicularis ad planum potest demitti.*

635. Theorema XII. *Distantia puncti a plano est perpendicularis ab eo puncto in planum ducta.*

636. Theorema XIII. *Si planum secet duo vel plura plana parallela inter se, sunt anguli alterni externi; item alterni interni inter se æquales; & anguli interni ad eandem partem sunt alter alterius complementum ad duos rectos; uti etiam externi ad eandem partem.* Et e converso.

637. Theorema XIV. *Si planum secet duo vel plura plana inter se parallela, etiam lineæ intersectionum sunt inter se parallelæ.* Nisi enim lineæ intersectionum essent parallelæ, productæ alicubi possent sibi occurrere; igitur etiam ipsa plana, in quibus existunt, alicubi possent concurrere, consequenter contra hypothesin non essent parallela.

SECTIO TERTIA.

De Solidis.

638. *Corpus*, sive *Solidum* dicitur quælibet quantitas continua, vel extensio trium dimensionum, nempe in longum, latum, & profundum.

Plerumque solida duobus modis considerantur:

Ip

I° Ut genita motu planorum, quemadmodum planum ut genitum motu lineæ rectæ; & ipsa linea ut producta motu puncti.

Hunc in modum si concipiamus solidum, illud nil aliud est, quam spatium occupatum a vestigiis plani, seu potius, nil aliud, quam collectio planorum profunditatis infinite parvæ, quorum numerus infinitus æqualis est numero punctorum lineæ, quæ viam a plano solidum generante descriptam metitur. Singula ejusmodi plana dicuntur *elementa* solidi.

639. Generantur solida, sive per motum rectilineum plani sibi ipsi semper paralleli; sive per motum circularem, dum figura rectilinea circa lineam immobilem rotatur, quæ *axis* solidi vocatur.

640. II°. Possunt etiam solida concipi tanquam composita ex aliis solidis sive similibus, sive dissimilibus, invicem conjunctis, quorum binæ dimensiones ut infinite parvæ considerantur. Atque hujusmodi solida minima dicuntur itidem *elementa* illius, quod componunt.

641. Solida superficiebus planis terminata, vocabulo generali *polyedra* appellantur, atque nomina peculiaria *tetraedri*, *pentaedri*, *hexaedri* &c, a numero planorum 4, 5, 6 &c, quibus clauduntur, sortiuntur. *Polyedra regularia* sunt, quorum anguli omnes æquantur, & plana sunt polygona regularia & æqualia ejusdem speciei.

642. Si cogitetur planum per solidum transiens, illudque in duas partes secans, figura, quam in superficie solidi planum occursu suo efformat, dicitur *sectio* solidi: nec dubium est, hanc sectionem esse polygonum tot laterum, quot planis superficiei solidi planum secans occurrit.

GE-

GENESIS, ET PROPRIETATES SOLIDORUM, QUÆ FIUNT MOTU RECTILINEO.

643. I. *Hypothesis.* Sit figura quævis plana ABCDE (Fig: 47 vel 48) primo super alio plano posita; dein secundum longitudinem rectæ MN ita moveatur usque in FGHIK, ut sibi ipsi semper maneat parallela: hæc figura motu suo generat solidum, quod *prisma* dicitur.

Hic motus si perpendatur, evidens est I°, a lateribus AB, BC, CD describi parallelogramma AB GF, BCHG, CDIH &c. II° omnia vestigia plani generantis, sive prismatis elementa, & utramque basin, esse polygona æqualia, & similiter posita. Unde universim . . . .

Prisma est corpus basibus æqualibus & parallelis; ac lateribus parallelogrammis terminatum.

644. Prisma vel est *rectum*, vel *obliquum*, prout recta MN, juxta quam polygonum generans movetur, vel perpendicularis, vel obliqua fuerit ad basin prismatis.

645. Recta PQ (Fig: 48), vel P*q* (Fig: 47), quæ per medium omnium solidi elementorum transit, dicitur *axis* prismatis, estque parallela & æqualis singulis lateribus AF, BG, CH &c, cum sit via centri polygoni prisma generantis.

646. Perpendicularis PQ (Fig: 47) ex quovis basis unius puncto in planum basis alterius, etiam productæ, si necesse sit, demissa, est *altitudo* prismatis.

647. Coroll: I. *Altitudo prismatis recti est æqualis ejus*

ejus axi; altitudo vero prismatis obliqui eo minor est axe, quo major est solidi ad planum baseos inclinatio.

648. Coroll: II. *Altitudo solidi cujusvis elementis parallelis constantis exprimit numerum elementorum.* Exprimit enim distantiam planorum extremorum solidi: jam vero inter hæc plana extrema nequeunt plura esse elementa, quam sint puncta in linea distantiam eorum metiente: igitur si elementa sint plana parallela, eorum numerum exprimit altitudo solidi.

649. Prismatum diversæ sunt denominationes, ut diversæ sunt species polygonorum generantium. Si hoc polygonum sit triangulum, prisma appellatur *triangulare*; si polygonum sit quadrilaterum, prisma fit *quadrangulare*; si pentagonum sit polygonum generans, etiam prisma est *pentagonum*, &c; si polygonum sit circulus, atque linea, cujus directionem in motu sequitur, ad ejus planum perpendicularis, prisma genitum *cylinder rectus* vocatur (vide Fig: 49).

650. Si polygonum prisma generans sit parallelogrammum, prisma genitum dicitur *parallelepipedum*; si parallelogrammum simul sit rectangulum, atque prisma rectum, vocatur *parallelepipedum rectangulum* (vide Fig: 50). Si polygonum generans sit quadratum, prisma, si rectum sit, habeatque axem lateri quadrati illius æqualem, *cubus*, vel *hexaedrum regulare* est (vide Fig: 51).

651. II. *Hypothesis.* Sit figura quævis plana A B C D E (Fig: 52 & 53), quæ super alio plano sita, moveatur juxta rectam quamvis MN (ad planum figuræ perpendicularem, vel inclinatam), ita, ut post singulos progressus in ea recta momentaneos omnia figuræ latera decrescant in progressione Arithmetica; v. g. ut primo motu momentaneo peracto quodvis latus minuatur $\frac{1}{\infty}$ suæ longitudinis, post alterum progressum infinite parvum rursus singula latera amit-

tant $\frac{1}{\infty}$ primæ longitudinis &c; itaque deinceps, ut cum figura ad M pervenerit, ejus latera evaſerint infinite parva, neque amplius a puncto differat: ſolidum per figuram hunc in modum decreſcentem genitum, *Pyramis* dicitur. Punctum M ejus *vertex*, & polygonum ABCDE *baſis*.

Liquet autem in hac geneſi pyramidis, a ſingulis lateribus figuræ generantis AB, BC, CD deſcribi triangula ABM, BCM, CDM &c, ſpatio nempe trianguli ab infinitis parallelis occupato, quæ in progreſſione Arithmetica a Zero (qui verticem repræſentat) usque ad baſin creſcunt.

652. Unde I° univerſim *pyramis eſt ſolidum, cujus baſis eſt polygonum, & plana lateralia triangula.*

653 II°. Recta MN a vertice M ad punctum baſeos medium N ducta; dicitur axis Pyramidis; ejus altitudo eſt perpendicularis MN (fig: 52), vel Mn (figura 53), æqualis, vel minor axe, ut pyramis vel recta, vel inclinata eſt.

654. Pyramidis nomina ſunt varia, ut polygona eam generantia varia ſunt. Si polygonum eſt triangulum, etiam pyramis eſt *triangularis*; ſi triangulum hoc eſt æquilaterum, & præter axem perpendicularem, etiam plana lateralia ſunt triangula æquilatera, pyramis eſt *regularis*, ſive *tetraedrum regulare*. Si polygonum eſt quadrilaterum, fit pyramis *quadrangularis*, ſive quatuor planis lateralibus terminata: ſi illud eſt pentagonum, pyramis quoque *pentagona* eſt &c. Si denique planum generans eſt circulus; axisque ad ejus planum perpendicularis, *conus rectus* naſcitur. Si axis eſſet inclinatus ad hoc planum, *conoides* diceretur.

655. Si in geneſi expoſita pyramidis concipiatur motus polygoni generantis ſiſti, antequam ejus late-

ra evanescant, pyramis, vel conus genitus, dicitur *pyramis*, vel *conus truncatus* (vide Fig: 55): hæc enim solida spectari possunt instar pyramidum, vel conorum, quorum pars plano parallelo ad basin abscissa sit.

De genesi & proprietatibus Solidorum, quæ fiunt motu Circulari.

656. I° Duplici modo genesis cylindri recti per motum circularem concipi potest, nempe si imprimis cogitetur rectangulum MABN (Fig: 49.) circa latus suum MN immotum (quod dein axis cylindri erit) rotari; deinde si bini circuli CA, DB, quorum centra M & N sint in eadem recta ad plana eorum normali, supponantur immobiles, atque recta AB per eorum circumferentiam moveri.

657. Potest denique cylinder considerari velut compositus e fasce prismatum rectorum, æque altorum, infinite parvarum, & æqualium basium, quæ exacte occupent areas circulorum æqualium, quorum prismatum numerus consequenter æquet numerum punctorum, superficiem circulorum constituentium.

658. II° Conus rectus motu circulari generari potest, si 1mo, triangulum rectangulum MNB (Fig: 54) rotetur circa unum latus MN angulum rectum comprehendens, quod axis Coni erit; hypotenusa describet ejus superficiem, & latus alterum circa angulum rectum NB erit radius baseos. 2do. Si rectæ MN circulo BD in centro perpendiculariter insistenti jungatur ad extremum punctum M recta MB, ejusque extremum B perpetuo in peripheria circuli incedat, dum ipsa circa rectam MN rotatur. E quo intelligitur, *puncta omnia perimetrum baseos coni recti constituentia a vertice* M *æqualiter distare.*

659.

659. Conus truncatus generatur, ſi trapezium ABND (Fig: 55), cujus duo latera AB, ND ſint inæqualia, & ad latus A N perpendicularia, circa idem latus AN rotari cogitetur.

660. III°. Si ſemicirculus circa ſuam diametrum revolvatur, ſolidum inde genitum *globus*, vel *ſphæra* appellatur.

Eſt itaque ſphæra ſolidum, cujus ſuperficiei omnia puncta ab aliquo intra illud ſito æqualiter diſtant, diciturque punctum illud centrum.

661. Si concipiantur ad ſingula puncta P, P &c (Fig: 69) diametri circuli genitoris erectæ perpendiculares, atque in circumferentia terminatæ, MP, MP &c, evidens eſt, ſemicirculo S M *s* circa ſuam diametrum S *s* revoluto, eas rectas fore radios tot circulorum, quot inter puncta S & *s* exiſtere poſſunt, qui adeo pro Cylindris infinite parvæ & æqualis altitudinis haberi poſſint, ſphæræque elementis, diametris baſium eorum in ratione chordarum M*m*, M*m*, quæ parallelæ intra circulum duci poſſunt, creſcentibus, & decreſcentibus.

At ſi ſemicirculus genitor ſpectetur ut dimidium polygoni regularis (Fig: 58) infinitorum laterum, ex cujus ſingulis angulis ad diametrum *d* L demiſſæ ſint perpendiculares DT, EX, GC, &c, patet, binas quasque ejusmodi perpendiculares vicinas conſtituere trapezia *d* FDT, TDEX, XEGC &c, atque revolutione ſemicirculi circa diametrum *d* L ab his trapeziis totidem conos truncatos efformari OFDB, BDEA, AE GP &c. Hinc poteſt etiam, hac facta hypotheſi, ſphæra concipi tanquam compoſita ex conis truncatis infinitis, diverſæ, attamen infinite parvæ, altitudinis.

Quod ſi denique cogitentur intra ſemicirculum genitorem tot deſcripti ſemicirculi concentrici, quot puncta ſunt in radio; manifeſtum eſt, ſemicirculo genitore circa diametrum revoluto, debere ab omnibus ſemicirculis concentricis deſcribi totidem ſuperficies ſphæricas concentricas, poſſeque ideo ſphæram ſpectari ut compoſitam ex infinitis ſuperficiebus, ſive ſphæris cavis, craſſitiei infinite parvæ & æqualis, quarum alia ſemper aliam intra ſe concludat.

662. *Axis* ſphæræ poteſt dici quævis recta per ejus centrum tranſiens, & utrinque in ſuperficie terminata.

663. *Omnes igitur ſphæræ axes inter ſe æquales ſunt*, cum ſinguli æquentur ſummæ duorum radiorum.

664. Cum sphæra ea, qua diximus, ratione generetur, clarum eſt, quemvis ejus axem poſſe haberi pro axe ſemicirculi genitoris: quod nempe ſumma ſit ejus figuræ regularitas & uniformitas.

665. Sequitur hinc I°; *quomodocunque ſphæra per planum ſecetur, ejus ſectionem ſemper fore circulum.* Quod ſi enim per centrum ſphæræ concipiatur tranſire axis ad ſectionis planum perpendicularis, idem conſiderari poteſt ut diameter circuli genitoris (664), ideoque planum ſecans, cum occurrat diametro perpendiculariter, non aliter tranſibit per sphæram, quam ut congruat cum aliquo ejus elemento, quæ omnia ſunt circuli (661).

666. II°. *Sectiones ſphæræ per planum quodlibet fore circulos eo majores, quo planum propius ad centrum tranſit*, & viciſſim; *atque adeo ſectionem maximam eam eſſe, quæ per ipſum ſphæræ centrum tranſit.* Etenim ſectionum harum diametri ſunt chordæ, quæ eo majores ſunt, quo ſunt propiores centro (453); maxima autem omnium eſt ipſa diameter.

667. III°. Ob hanc cauſam *circulum maximum ſphæræ* dici illum, qui cum ipsa ſphæra commune habet

cen-

centrum; alium vero vocari *circulum minorem ſphæræ*, cujus planum per centrum ſphæræ non tranſit.

668. IV°. Denique conſiderari poſſe ſphæram tanquam conſtantem infinitis pyramidibus infinite parvis, quarum baſes ſint ipſa ſuperficiei ſphæræ puncta, apices vero omnium in centro concurrant. Quin ob regularem ſphæræ figuram ſupponi poteſt, omnia ſuperficiei puncta, quæ pyramidum baſes ſunt, eſſe polygona regularia infinite parva, & æqualia inter ſe; ideoque concipi poſſunt vel ut triangula æquilatera, vel ut quadrata, vel ut hexagona, cum tres iſtæ ſpecies polygonorum regularium ſolæ ſint ejusmodi, ut quotcunque eorum poſſint habere latera communia, ſimulque totum ſpatium explere.

De Polyedris, eorumque Comparatione.

669. *Angulus ſolidus* dicitur angulus, qui oritur junctis verticibus plurium angulorum planorum, ad ſeſe invicem inclinatorum, ac propterea junctis binorum quorumvis lateribus in unum apicem excurrentium. Hujusmodi ſunt apices pyramidum, anguli prismatum &c. *Anguli ſolidi* æquales ſunt, qui a totidem planis, quorum homologi æquales ſunt, & eodem modo poſiti, comprehenduntur.

Pro menſura anguli ſolidi adhibenda eſt ſphæra, uti circulus adhibetur ad metiendos angulos planos. Unde vertex anguli ſolidi concipiendus eſt tanquam in centro ſphæræ arbitrarii radii conſtitutus: erit quivis angulus planus ſolidum componens in plano alicujus circuli maximi ſphæræ (667), atque menſuram habebit ejus circuli maximi arcum inter plani anguli crura interceptum, cujus arcus chorda eſt baſis anguli plani; ut proinde menſura anguli ſolidi ſit ſumma

gra-

graduum contentorum in arcubus ab ejusmodi chordis subtensis.

Quoniam cuivis angulo plano solidum componenti latus unum commune esse debet cum angulo plano contiguo, clarum est, arcus circulorum maximorum angulos planos metientes æque debere inter se conjungi, ac eorundem chordas, quæ proinde polygonum quoddam sua perimetro comprehensum efficient, quod sit instar basis anguli solidi.

670. Theorema I. *Saltem tribus opus est angulis planis, ut efformetur solidus.* Etenim simplicissimum polygonorum, quod basis esse possit anguli solidi, est triangulum.

671. Theorema II. *Maximus angulorum planorum solidum componentium debet esse minor summa reliquorum.* Nam si æqualis foret summæ reliquorum, arcus sphæræ, qui eum metitur, æquaretur summæ arcuum, qui omnes reliquos metiuntur, ac propterea fieri non posset, ut arcus cæteri extremis suis juncti pertingerent ad extrema puncta arcus angulum maximum metientis, nisi si cum eodem congruerent, ideoque hi arcus omnes, eorumque chordæ, in eodem existerent plano, id, quod mensuræ anguli solidi repugnat. Magis adhuc absurdum foret, si poneretur angulus planorum maximus excedere summam reliquorum; quippe cum in hac hypothesi arcus sese suis extremis complecti haud possent.

672. Theorema III. *Summa omnium angulorum planorum solidum componentium minor est 360 gradibus, saltem si angulus solidus non fiat ex angulis partim procurrentibus, partim regredientibus.* Etenim si summa esset 360 graduum, concipi non posset, quî arcuum sphæræ angulos planos metientium extrema inter se jungantur, nisi constituerent exacte circumferentiam circuli maximi;

ximi; & tum juncti omnium vertices forent ſane in eodem plano, & nequaquam angulum ſolidum efficerent: aut vero ſi ita iidem anguli plani alter ad alterum inclinarentur, ut tum ipſi, tum eorum chordæ angulos partim procurrentes, partim regredientes conſtituerent. Quod ſi ſumma angulorum planorum excederet 360 gradus, evidens eſt, futurum, ut anguli partim procurrentes, partim regredientes orirentur.

673. Theorema IV. *Si duo anguli ſolidi* A, a, *conſtantes ſinguli tribus planis, habeant duos planos* B, D *æquales duobus* b, d (*ſingulos ſingulis*), *ac æqualiter inter ſe inclinatos, etiam anguli ſolidi æquales erunt.*

Demonſtratio. Sumptis enim lateribus omnibus angulorum planorum æqualibus (uti dum, angulo ſolido in centro ſphæræ poſito, ad ſuperficiem usque pertingunt), manifeſtum eſt, ob æqualitatem inclinationis, & ipſorum duorum angulorum planorum cum aliis duobus, quod anguli plani B, D (ſecluſo interim tertio) efficiant angulum quendam cavum, qui accurate intra ſe recipiat ſimilem ex planis *b* & *d* factum, cum omnia æqualia ponantur. Jtaque cavos hosce angulos claudere nequeunt, niſi æquales duo anguli plani: e quo liquet (669), ipſos angulos ſolidos A, *a* æquari.

674. *Scholium.* Eadem methodo demonſtrari poteſt, quod ſi duo anguli ſolidi conſtant 4 planis, quorum 3 utrinque, ſinguli ſingulis, æquales ſint, æqualiterque inclinati; etiam quartus quarto, & ſolidus ſolido ſit æqualis. Jdem eſt, ſi ſolidi efficiantur 5, 6 &c planis.

675. Theorema V. *Ad conſtituendum polyedrum ſaltem quatuor plana neceſſaria ſunt.* Nam ut angulus unus ſolidus polyedri habeatur, jam tria plana requiruntur

tur (670); tria autem plana ita conjuncta cavitatem anguli non possunt obtegere; igitur saltem unum praeterea addi debet, ut spatium undique claudatur, atque polyedrum tres dimensiones habeat.

676. Theorema VI. *Polyedrum nequit pauciores, quam quatuor, angulos habere.* Etenim spatium vacuum a tribus planis angulum unum solidum comprehendentibus relictum figuram saltem trium angulorum habet: jam vero hi anguli claudi non possunt, nisi fiant tres anguli solidi (482): quare polyedrum minimum quatuor habere debet angulos solidos.

677. Theorema VII. *Quinque tantum esse possunt polyedra regularia, nempe tria, quorum plana sunt triangula aequilatera; unum, cujus plana sunt quadrata; & unum, cujus plana sunt pentagona regularia.*

Quoniam (670) saltem tribus planis opus est ad angulum solidum constituendum; & (672) angulus solidus fieri nequit ex planis, qui simul 360 graduum sint; manifestum est, quinque tantum modis fieri posse, ut anguli plani polygonorum regularium angulum solidum constituant: *1mo* enim cum angulus trianguli aequilateri sit 60 graduum, tres eorum juncti faciunt unum solidum 180 graduum; consequenter e quatuor triangulis aequilateris fieri potest *tetraedrum*. *2do.* Quatuor anguli trianguli aequilateri conficiunt 240 gradus; hinc constituere possunt unum solidum totidem graduum, & octo triangula ejusmodi conjuncta comprehendent corpus regulare, *octoedrum*. *3tio.* Quinque anguli trianguli aequilateri possunt efficere solidum 300°, & consequenter si 20 ejusmodi triangula conjungantur, fiet solidum viginti planorum, sive *icosaedrum*. At si sex anguli plani trianguli aequilateri jungantur, jam habentur 360°, unde ex iis solidus fieri non potest. *4to.* Angulus quadrati est 90°, & tres simul constituunt solidum 270°: quare e sex quadratis potest fieri polyedrum sex planorum, hoc est, *hexaedrum*; verum cum quatuor anguli quadrati jam 360° efficiunt, nullus solidus inde alius componi potest. *5to.* Angulus pentagoni regularis est 108°; tres juncti proinde efficiunt solidum 324°: & hinc e duodecim pentagonis fit solidum duodecim planorum vel

do-

dodecaedrum; si quatuor pentagoni anguli conjungantur, jam 432° habentur, plures, quam ut solidus ex iis fieri queat. Denique cum angulus hexagoni regularis sit 120°, tres simul 360° constituunt, ut adeo angulus solidus ex iis haberi non possit, neque ex pluribus hexagonis polyedrum regulare; multo minus anguli aliorum polygonorum regularium, velut *heptagoni*, *octogoni* &c in angulum solidum conjungi possunt. Quare non nisi quinque expositæ corporum regularium species dantur.

Tironi hæc legenti ad manum sint polygona regularia æqualia, e charta firmiore, aliisve planis excisa, ut ipsam polyedrorum constructionem simul tentare possit.

De comparatione Solidorum.

678. *Solida similia* sunt, quorum anguli homologi æquantur, & plana sunt figuræ similes, quæ proinde resolvi possunt (575) in triangula similia, omnesque dimensiones homologas proportionales habent.

679. Coroll: *Polyedra regularia ejusdem speciei, consequenter & sphæræ, sunt solida similia.*

680. Ut solidorum similitudo rite intelligatur, concipienda sunt tanquam composita ex totidem planis similibus, similiterque positis, ita ut totum discrimen in eo tantummodo sit, quod singula plana elementaria solidi majoris habeant majorem superficiem & profunditatem, quam plana homologa solidi minoris, interim eadem sit ratio inter plana quævis homologa. V. g. duæ sphæræ sunt solida similia, *primo*, quia utraque componitur e planis circularibus, quæ sunt figuræ similes, cum sint polygona symmetrica, & regularia (542), & ejusdem numeri infiniti laterum. *Secundo*, quia hæc plana in utraque sphæra sunt similiter posita, nempe omnia perpendiculariter ad axem per eorum centra transeuntem, servantque inter se eum ordinem, ut diametri sint in ratione om-

nium chordarum, quæ parallelæ in circulo duci possunt. *Tertio*, totidem sunt hujusmodi plana in una, quot in altera sphæra, quia in omnibus circulis est idem numerus laterum infinite parvorum ideoque etiam idem numerus chordarum, quæ nempe omnes angulos, & latera similiter, & ad eandem ab axe utrinque distantiam posita, jungere possunt.

681. Discrimen inter majorē & minorē sphærā consistit *primo* in eo, quod diameter cujusvis plani elementaris sphæræ majoris major sit (& quidem in ratione constante) diametro plani elementaris homologi sphæræ minoris. *Secundo* quod cum latera planorum elementarium sphæræ majoris, licet infinite parva, sint tamen majora lateribus planorum elementarium sphæræ minoris; chordæ, quæ hæc latera æqualiter ab axe utrinque distantia jungunt, in planis sphæræ majoris minus sint vicinæ altera alteri, quam in planis sphæræ minoris; consequenter profunditas planorum, quam chordarum distantia metitur, major sit in sphæra majore, quam in minore.

682. E notione, quam de duobus solidis similibus attulimus, evidenter consequitur, *nullum esse punctum in superficie unius solidi, quod in superficie homologa alterius non habeat sibi correspondens, & similiter positum;* Quin imo *nequidem intra solidum alterum dari punctum, cui similiter positum, & correspondens non sit intra alterum.* Constant enim hæc solida eodem elementorum numero, quorum bina quævis correspondentia in utroque solido sunt figuræ similes, & similiter positæ, quæ & ipsæ constant punctis similiter positis.

683. Theorema I. *Si recta trans solidum quodvis ducta* PQ (fig: 57) *in duobus quibuslibet punctis* P, Q *planorum* KC, EG *terminetur, & ducatur in solido simili altera recta* p q (fig: 56) *punctis similiter positis* p, q *terminata; erunt hæ duæ rectæ dimensiones homologæ solidorum;* aut, quod

idem: *erunt eæ inter se, ut latus quodvis in solido 1mo acceptum ad latus homologum sumptum in altero.* Ex. caus. habebitur PQ : *pq* :: GA : *ga*.

Demonstratio. Si per duos quosvis angulos homologos D, *d* & puncta P, Q; *p*, *q* concipiatur planum secans utrumvis solidum, triangula DQP, *dqp* sectione efformata erunt similia. Nam 1*mo*, puncta similiter posita Q, *q*; P, *p* suppeditant hanc analogiam (578) DP : *dp* :: DQ : *dq*, ac præterea fiunt anguli PDF, FDQ æquales angulis correspondentibus *pdf*, *fdq*. 2*do*. Cum solida sint similia, plana FA, FC inter se sub eodem angulo inclinantur, sub quo plana correspondentia *fa*, *fc*. Igitur (673) angulus solidus D, efformatus a planis PDF, FDQ, est æqualis angulo solido *d* comprehenso planis correspondentibus, ac proinde angulus planus QDF = *qdf*, habentque triangula QDF, *qdf* angulum lateribus proportionalibus comprehensum æqualem, consequenter (559) similia sunt, & est QP : *qp* :: DQ : *dq* :: AG : *ag* &c.

684. *Coroll.* Omnia puncta superficiem trianguli QDF constituentia, totidem numero sunt, similiterque posita respectu eorum, quæ superficiem trianguli *q d f* componunt. E quo sequitur, plana secantia, in quibus sunt triangula PDQ, *p d q* transire per puncta in utrovis solido similiter posita, atque adeo portiones inde resectas esse etiam ipsas solida similia, uti & eas, quæ remanent, ut propterea dici debeat, quod *si per tria puncta homologa non in directum jacentia, atque in planis duorum solidorum similium posita, agatur planum trans utrumvis solidum, utrumque secetur in binas portiones, quarum homologæ sint solida similia.*

685. Theorema II. *Si ex angulis homologis quibusvis* C, c *demittantur in plana vicina, vel opposita, producta, vel non producta, perpendiculares* CR, cr, *quæ metiantur*

eorum angulorum altitudines supra illa plana; erunt eæ proportionales lateribus, vel lineis quibuscunque homologis, ex. gr. CR : *cr* :: CE : *ce* :: PQ : *pq* &c.

Demonstratio. E punctis E, *e* (in quibus nempe latera CE, *ce* occurrunt planis, sive basibus FH, *fh*) ducantur ad puncta R, *r* (quo nempe cadunt perpendicula in eadem plana producta demissa) rectæ ER, *er*, quæ erunt in iisdem planis productis, atque ad rectas CR, *cr* normales. Quare triangula CER, *cer* erunt ad R, *r* rectangula, ac inter se similia, cum ob similitudinem solidorum latera homologa CE, *ce* æqualiter inclinentur ad plana homologa GHEF, *ghef*, & consequenter anguli CER, *cer* æquales sint inter se. Unde erit CR : *cr* :: CE : *ce* :: PQ : *pq* &c.

686. Scholium. *Est igitur proprietas generalis solidorum similium, quod omnes dimensiones homologas proportionales inter se habeant.*

De mensura Superficierum Solidorum cujusvis speciei.

687. Nomine *Superficiei solidi* imposterum tantummodo intelligemus superficiem demptis basibus, si quas habet solidum; cum vero dicemus *superficiem totam solidi*, bases simul comprehensas volumus.

688. Axioma, *seu* Theorema I. *Superficies tota solidi, vel polyedri cujusvis, æquatur summæ omnium planorum ejus latera & bases constituentium.*

689. Theorema II. *Superficies prismatis cujuslibet æquatur facto ex uno ejus latere quocunque in perimetrum sectionis ad latus illud perpendicularis.*

Demonstratio. Omnia prismatis latera æqualia sunt, & parallela. Quod si itaque per punctum quodlibet lateris prismatis concipiatur transire planum ad la-

latus illud normale, erit idem etiam ad reliqua omnia latera normale, & sectio erit polygonum, cujus singula latera sunt perpendicularia ad bina latera parallela, quæ plana lateralia prismatis terminant. Unde (589) superficies cujusvis plani lateralis erit æqualis facto e latere sectionis in latus prismatis: & superficies prismatis æquabitur facto ex omnibus lateribus sectionis (hoc est, ex perimetro sectionis) in latus unum prismatis.

690. Coroll. *Superficies prismatis, & cylindri recti æquatur facto ex axe in perimetrum baseos.*

691. Theorema III. *Superficies pyramidis rectæ, cujus basis est polygonum regulare, est æqualis facto ex dimidia perimetro baseos in rectam ex apice pyramidis ad quodvis latus baseos perpendicularem.*

Superficies enim æqualis est summæ superficierum (688) omnium triangulorum lateralium; singula autem triangula cum æqualia sint, eorum summa æquatur facto ex altitudine eorum communi (hoc est ex perpendiculo ex apice in latus baseos demisso) in dimidiam summam laterum, seu in dimidiam perimetrum baseos.

692. *Observa.* Si pyramis recta non sit, aut basis non sit polygonum regulare; superficies pyramidis aliter acquiri nequit, nisi si singulorum triangulorum areæ separatim mensurentur, & in unam summam colligantur.

693. Coroll. *Superficies coni recti æqualis est facto ex semicircumferentia baseos in latus coni.*

694. Theorema IV. *Superficies plani lateralis, pyramidis truncatæ basium parallelarum est æqualis summæ dimidiæ lateris utriusque baseos, ductæ in perpendiculum ex quovis puncto lateris baseos superioris in latus baseos inferioris demissum; seu,* quod idem est (281), *æquatur facto ex parte perpendi-*

di-

diculi ex apice pyramidis integræ in latus baseos demissi, quæ inter basin & sectionem basi parallelam intercipitur, ducta in dimidiam summam laterum sectionis & baseos.

Demonstratio. Planum quodvis laterale pyramidis est triangulum (651), cujus area componitur ex serie infinita rectarum basi parallelarum, & progressionem Arithmeticam constituentium, cujus primus terminus est trianguli vertex, ultimus vero basis (592), & numerus terminorum exprimitur per rectam ex vertice ad basin perpendicularem. Jam vero trapezium laterale pyramidis truncatæ constituitur per eandem seriem, resectis prioribus versus verticem trianguli terminis, in qua terminus primus est latus baseos superioris, ultimus latus baseos inferioris, numerus terminorum pars perpendiculi inter utramque basin intercepta; igitur (280) area ejusmodi trapezii æqualis est dimidio facto ex perpendiculo a latere sectionis ad latus baseos pyramidis demisso in summam lateris sectionis, & lateris baseos pyramidis.

695. *Coroll:* I. Si pyramis truncata sit recta, & basis regularis, omnia trapezia lateralia inter se æquantur, & sectio inter basin superiorem & inferiorem media habet perimetrum mediam Arithmetice proportionalem inter perimetros utriusque baseos. Quare *superficies pyramidis truncatæ & rectæ, cujus basis est regularis, æquatur facto ex perpendiculo a latere quovis basis superioris in latus basis inferioris demisso, ducto in perimetrum sectionis inter utramque basin mediæ.*

696. Coroll: II. *Superficies coni truncati & recti, ac basium parallelarum, æqualis est facto ex latere inter bases intercepto, ducto in circumferentiam circuli inter bases medii.*

697. Theorema V. *Superficies sphæræ æqualis est facto ex circumferentia circuli maximi in axem ducta.*

De-

Demonstratio. Si demonstretur, quod superficies cujuslibet coni truncati (qui sphæræ elementa constituunt) sit æqualis facto ex axe, seu altitudine ejus coni in peripheriam circuli maximi sphæræ, simul demonstrabitur (608), quod summa superficierum omnium horum conorum, consequenter superficies sphæræ, æqualis sit facto ex summa omnium axium conorum (hoc est, ex axe toto sphæræ) ducta in peripheriam circuli maximi (222).

Sit itaque Y (Fig. 58) punctum medium lateris AB coni truncati ABDE: ducatur inde YR basibus BD, AE parallela, & YS ad AB perpendicularis, quæ (456) cum per centrum transeat, erit axis sphæræ. Demittatur ex B ad AE perpendicularis BZ, quæ æquabitur axi coni TX; conjungantur item puncta R & S. His factis, patet triangula ABZ, YRS esse similia, cum præter rectos ad Z & R etiam sit BAZ = RSY: nam ob parallelas AE, YR est BAZ = BYR; angulus autem BYR = YSR, utpote quorum mensura est dimidius arcus Y*d*R; igitur etiam RSY = BAZ, & consequenter ABZ = RYS. Quare est (556) BZ (seu TX) : AB :: YR : YS. Porro (581) circumferentiæ circulorum sunt inter se ut eorum diametri; igitur est TX ad AB, ut circumferentia circuli, cujus diameter YR, ad circumferentiam circuli, cujus diameter YS, hoc est, circuli maximi sphæræ: unde (300) factum ex TX in circumferentiam circuli maximi sphæræ, est æquale facto ex AB in circumferentiam circuli, cujus Diameter est YR, id est (696) superficiei coni truncati BAED. Ergo superficies coni truncati cujusvis æquatur facto ex axe suo in circumferentiam circuli maximi sphæræ.

698. Coroll. I. *Superficies sphæræ est quadrupla circuli maximi.* Nam area circuli maximi æquatur facto

ex

ex semidiametro $\frac{1}{4}d$ in semicircumferentiam $\frac{1}{2}p$ (605), hoc est $= \frac{1}{4}pd$; & superficies sphæræ æqualis est facto $p\,d$, ex axe suo d in peripheriam circuli maximi p.

699. Coroll: II. *Superficies sphæræ æqualis est superficiei cylindri, cujus axis æqualis est axi sphæræ, & basis æqualis circulo maximo sphæræ; & si sumatur tota superficies cylindri, comprehensis etiam basibus, ea est ad superficiem sphæræ ut 3 ad 2.* In hac enim hypothesi superficies sphæræ æqualis est basi cylindri quater sumptæ; superficies autem cylindri tota adæquat suam basin sexies acceptam.

700. Coroll: III. *Zona superficiei sphæricæ inter duas sectiones parallelas comprehensa, æqualis est superficiei convexæ cylindri, cujus basis est circulus maximus sphæræ, & altitudo eadem cum altitudine Zonæ.* Seu *æquatur facto ex altitudine sua in circumferentiam circuli maximi sphæræ.*

De Comparatione Superficierum Solidorum.

Vidimus hucusque, superficies solidorum demptis basibus esse semper æquales factis ex duabus eorum dimensionibus; unde sequitur universim . . . .

701. Theorema I. *Superficies duorum solidorum quorumcunque ejusdem speciei, sunt in ratione composita duarum dimensionum ejusdem nominis.*

702. Coroll: I. *Si duo solida ejusdem speciei habeant unam dimensionem æqualem, eorum superficies sunt ut altera dimensio;* hoc est, si duo prismata recta, duo cylindri recti, habeant eandem altitudinem; aut si duæ pyramides rectæ basium regularium, duo coni recti &c, habeant eandem perpendicularem ex apice in latus baseos demissam, vel æquale latus &c, eorum superficies sunt ut perimetri basium. Et si duo prismata, cylindri, pyramides rectæ basium regularium, coni

re-

recti &c habeant æquales perimetros basium, eorum superficies sunt ut perpendicula ad latera basium demissa. Nam in hac hypothesi sunt superficies ut facta ex duabus quantitatibus inæqualibus ductis in eandem tertiam (216).

703. Coroll: II. *Si binæ dimensiones ejusdem nominis solidorum ejusdem speciei sint in ratione reciproca, superficies solidorum sunt æquales*, V. g. superficies cylindri recti æqualis est superficiei cylindri recti alterius, vel etiam prismatis recti, si altitudo primi est ad perimetrum suæ baseos, ut est perimeter baseos secundi ad suam altitudinem; & vicissim (596 & 596).

704. Theorema II. *Superficies duorum solidorum similium totæ, etiam comprehensis basibus, sunt inter se ut quadrata dimensionum quarumlibet homologarum; sive in ratione duplicata dimensionum homologarum.*

Demonstratio. In duobus solidis similibus omnes dimensiones homologæ proportionales sunt (686); sunt igitur superficies eorum ut facta quantitatum proportionalium; ideoque (291) in ratione duplicata dimensionum homologarum.

705. Coroll: *Superficies sphærarum sunt inter se ut quadrata diametrorum, vel radiorum*; nam (677) sphæræ sunt solida similia, & earum diametri, ac radii sunt dimensiones homologæ.

De mensura Soliditatis Solidorum cujusvis speciei.

706. *Soliditas* seu *volumen* dicitur spatium aliquod determinatum, seu materia corporea vacuum sit, seu reipsa corpore occupatum: idea enim spatii omnes tres dimensiones in se involvit. Hinc dum de corpore physico agitur, notari debet discrimen inter ejus

soliditatem, inter *massam*, & inter *densitatem*. *Soliditas* est spatium universi, quod corporis superficies complectitur; *massa* est quantitas absoluta materiae, qua constat; *densitas* est ratio voluminis ad massam, ut corpus eo censeatur densius, quo plus materiae sub minore volumine, sive spatio, continet.

707. Volumen spatii, seu soliditas corporis, aequalis est summae elementorum, e quibus componitur. Elementa autem corporis sunt ipsa solida, sed profunditatis infinite parvae, quae adeo superficierum instar considerari possunt. Si corpus hunc in modum spectetur, erit ejus soliditas summa superficierum, quemadmodum superficies est summa linearum, & linea summa punctorum.

708. Si de solidis eodem modo ratiocinemur, quo de superficiebus (587 & seq:) apparebit 1mo, *cubos esse mensuras communes soliditatum, sive voluminum*. Exempli causa solidum 100 pedum debet occupare spatium, quod exacte repleri possit per centum cubos, quorum singuli sint unius pedis. 2do. *Numerum partium mensurae solidae, sive trium dimensionum, esse tertiam potentiam numeri partium mensurae ejusdem nominis simplicis, sive unius dimensionis in longum*. Itaque pes solidus continet 1728 cubos, singulos unius digiti; constat enim duodecim seriebus, seu stratis, quorum singulorum altitudo est unius digiti, & basis unius pedis, sive 144 digitorum. Eodem modo hexapeda solida continet 216 pedes cubicos.

709. Theorema I. *Soliditas prismatis & cylindri aequalis est facto ex altitudine in superficiem baseos*.

Demonstratio. Quoniam prisma (& hinc etiam cylinder) tot constat polygonis basi aequalibus, quot sunt puncta in perpendiculari distantiam basis superioris ab inferiore metiente; sequitur, ut habeatur soliliditas, debere toties ſibi ipſi addi ſuperficiem polygoni generantis, quot ſunt puncta in illa perpendiculari, hoc eſt, debere ſuperficiem baſis duci in prismatis, vel cylindri altitudinem. Idem eſt, ſeu prismata & cylindri ſint obliqui, ſeu recti.

710. Theorema II. *Soliditas pyramidis, vel coni cujuscunque, æqualis eſt tertiæ parti producti ex ſuperficie baſeos in altitudinem.*

Demonſtratio. Pyramis compoſita eſt ex infinitis polygonis, ſeu ſuperficiebus ſimilibus, quarum latera creſcunt uniformiter quantitate $\frac{1}{\infty}$ a vertice usque ad baſin, ſive in ratione numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 &c. Sunt autem (608) ſuperficies ſimiles ut quadrata laterum homologorum: unde ſi ſuperficies primi elementi in vertice ipſo ſtatuatur $= 1$, erit ſuperficies ſecundi $= 4$, tertii $= 9$, &c, ultimi denique, ſive ipſius baſeos pyramidis $= \infty^2$. Et quoniam ſoliditas pyramidis æquatur ſummæ omnium elementorum, evidens eſt, eam æquari ſummæ quadratorum numerorum naturalium ſeriei infinitæ 1. 4. 9. 16. &c.. ....∞^2. Porro (383) ſumma quadratorum numerorum naturalium eſt pars tertia facti ex quadrato ultimo in numerum quadratorum; ergo ſoliditas pyramidis eſt æqualis tertiæ parti facti ex ſuperficie baſeos in elementorum numerum, hoc eſt, in altitudinem (648). Idem eſt de cono.

711. Coroll: *Pyramis eſt tertia pars prismatis ejusdem baſis & altitudinis.* Quare e maſſa prismatis efformari poſſunt tres pyramides ejusdem baſeos, & altitudinis cum prismate.

712. Theorema III. *Soliditas ſphæræ æqualis eſt duabus partibus tertiis facti ex axe in aream circuli maximi.*

Demonſtratio. Cum ſphæra componatur (661) ex tot ſphæris cavis, ſive ſuperficiebus ſphæricis, quarum altera alteram includit, quot sunt puncta in radio; ejus soliditas æqualis est summæ omnium harum superficierum; jam vero radii earumdem superficierum constituunt seriem infinitam numerorum 1. 2. 3. 4. 5. . . . . &c; & superficies ipsæ (609) progrediuntur in serie 1, 4, 9, 16, 25 &c. . . . igitur soliditas sphæræ habetur per summam infinitorum quadratorum numerorum naturalium, quæ (383) æquatur parti tertiæ facti ex quadrato ultimo ducto in numerum quadratorum: estque adeo *soliditas sphæræ pars tertia facti e superficie extima sphæræ s in ejus semidiametrum* $\frac{1}{2}d$, seu $=\frac{1}{3}\times s\times\frac{1}{2}d$. Jam vero (698) superficies extima sphæræ æquatur quadruplo superficiei p circuli maximi, seu $s=4p$. Unde soliditas sphæræ est $\frac{1}{3}\times 4p \times\frac{1}{2}d=\frac{2}{3}pd$.

713. Coroll: *Si igitur in cylindro (cujus diameter basis sit æqualis axi) cogitentur inscripta sphæra, & conus rectus, horum corporum soliditates inter se comparatæ erunt ut* 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, *sive ut* 3, 2, 1.

714. *Scholium.* Ut soliditas aliorum corporum, velut polyedrorum irregularium, obtineatur, ea reducenda sunt ad prismata, vel pyramides; quemadmodum ad obtinendam superficiem figurarum irregularium, eæ (603) resolvi debent in triangula. Investiganda dein soliditas singulorum prismatum vel pyramidum; summa omnium erit soliditas polyedri.

At vero si polyedrum sit exiguum, & admodum irregulare, ut si quæratur soliditas lapidis adhuc impoliti, vel operis ænei anaglyphi &c, res melius mechanice sequentem in modum præstatur. Ponatur corpus, cujus volumen petitur, intra vas cavum, cujus figura facile mensurari potest, uti sunt cylindrica, vel prismatica rectangularia: impleatur vas aqua, aliove fluido, quod nec damnum afferre possit corpo-

ri,

ri, nec ab eo facile imbibi: extracto dein corpore e vase, mensuretur exacte volumen partis aqua vacuæ, quod quam proxime æquale erit volumini corporis.

De comparatione Soliditatum in solidis.

715. Præcedente articulo patuit, soliditatem corporum esse factum ex superficie quapiam in axem aliquem, vel altitudinem ducta: & quoniam omnis superficies (607) est æqualis facto ex duabus dimensionibus, consequens est, omnem soliditatem esse factum ex tribus dimensionibus. Unde....

716. Theorema I. *Soliditates duorum solidorum quorumvis sunt inter se in ratione composita trium dimensionum ejusdem nominis.*

717. Theorema II. *Soliditates duorum solidorum similium sunt inter se in ratione triplicata, seu ut cubi, dimensionum quarumvis homologarum.*

Demonstratio. Solida similia habent omnes suas dimensiones homologas proportionales (636); igitur eorum soliditates sunt facta trium quantitatum proportionalium, ac propterea (291 & 298) sunt in ratione triplicata binarum quarumlibet homologarum.

718. Coroll. I. *Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum, vel radiorum.* Quare si sphæræ A diameter sit dupla, tripla, quadrupla &c diametri alterius sphæræ B; erit ejus superficies quadrupla, novencupla, sedecupla &c superficiei sphæræ B; & soliditas sphæræ A erit ad soliditatem sphæræ B ut 8, 27, 64 &c ad 1. Et vas, cujus dimensiones sunt duplæ, triplæ, quadru-

druplæ &c dimenſionum alterius, erit octies, vicies ſepties, ſexageſies quater &c capacius altero.

719. *Coroll:* II. Ut conſtruatur ſolidum alteri ſimile, ſed quod habeat volumen duplum, triplum &c alterius: neceſſe eſt, ut ſingulæ ejus dimenſiones ſint ad ſingulas alterius, ut $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ &c ad 1.

TRI-

TRIGONOMETRIA.

720. Trigonometria eſt ars calculum Arithmeticum ad Geometriam applicandi. Eadem eſt ſcientia ſumme neceſſaria, ut a Theoria ad praxin tranſeatur. Nomen inde ſortita eſt, quod doceat ſingulas trianguli partes calculare, cum reipsa omnes figuras metiamur per triangula, in quæ reſolvuntur.

721. Trianguli ſex ſunt partes, tres nempe anguli, totidemque latera. Jllud igitur Trigonometria agit, ut ſuppeditet regulas ſolvendi in omni caſu hoc problema: *datis magnitudine tribus partibus ex ſex, quibus triangulum conſtat, invenire quamvis ex reliquis tribus.*

722. Regulæ porro in eo conſiſtunt, ut tres partes datæ ordinentur in primos tres terminos proportionis, ſive *analogiæ*, cujus quartus ſit pars quæſita. Verum quia latera trianguli non ſunt ſimpliciter proportionalia cum angulis, quorum menſuræ ſunt arcus circuli; neceſſe fuit, ut angulis, ſive arcubus eos metientibus, ſubſtituerentur aliæ lineæ rectæ, quæ arcus eos repræſentarent, & ſimul lateribus trianguli eſſent proportionales. Rectæ hæ nomine ſinuum, Tangentium &c cenſentur, totiusque Trigonometriæ artificium eo reducitur, ut proprietates earum perſpiciantur, pervideanturque caſus, quibus ſeu has, ſeu illas angulorum loco adhibere oporteat; ut analogia termino ignoto reperiendo opportuna habeatur.

723. Sit angulus quivis ACB (Fig: 59): ex vertice C, radio arbitrariæ longitudinis deſcribatur circu-

culus AHaG: producatur AC in a, atque ex C erigatur perpendicularis CH. Evidens eſt, angulum BCH, ſive arcum BH, eſſe complementum ad rectum anguli ACB, ſeu arcus AB, imo eſſe etiam complementum anguli BCa, vel arcus BHa; angulum vero BCa, ſeu ejus arcum Ba eſſe complementum ad duos rectos anguli ACB, vel ejus arcus AB. Et viciſſim BA eſſe complementum ad rectum arcus H B, & complementum ad duos rectos arcus aB.

724. Perpendicularis BD ex extremo puncto radii B ad alterum AC demiſſa, dicitur *ſinus* arcus AB, vel anguli ACB. Perpendicularis AE erecta in extremo puncto radii CA usque ad occurſum radii alterius CB producti, eſt *tangens* ejusdem arcus AB; recta vero CE ejus *ſecans* appellatur. Pars radii AD inter arcum & ejus ſinum intercepta, vocatur *ſinus verſus* arcus AB. Perpendicularis BI eſt *ſinus complementi* arcus AB; & perpendicularis HK eſt *tangens complementi* ejusdem; CK *ſecans complementi*; HI *ſinus verſus complementi* arcus AB.

Compendii cauſa loco ſinus complementi, tangens complementi &c dicitur *coſinus*, *cotangens*, *coſecans*, *coſinus verſus*.

Ex eadem cauſa deinceps ad indicandum radium, ſcribemus R; *ſin* loco ſinus; *tang* pro tangens; *cos* vel *coſin*, pro coſinus, *cot*, vel *cotang*, pro cotangens: *ſin v.* pro ſinus verſus. Secantibus autem, & ſinu verſo in calculo Trigonometrico non utemur.

725. Ex datis definitionibus ſequitur I°, *ſinus & coſinus*, *tangentes & cotangentes* &c *angulorum obtuſorum, ut* aCB, *eſſe eosdem ac angulorum acutorum deinceps poſitorum, vel complementorum ad duos rectos.* Nam perpendicularis ex extremo a vel B radiorum angulum obtuſum comprehendentium demiſſa neceſſario cadit in

ra-

radium alterum versus illud extremum productum, uti patet in perpendicularibus BD, *ad*. Eodem modo tangens ejusmodi anguli alia esse nequit, quam *ae*; jam vero ob triangula æqualia *a* C *d*, BCD; item C *a e*, CAE, est *ad* = BD, *ae* = AE; & cum arcus BH sit complementum tam arcus *a* B, quam arcus AB, manifestum est, BI esse cosinum arcus *a*B, & HK esse cotangentem.

726. II°. Sequitur, sinum alicujus arcus AB, esse dimidiam chordam arcus B A G, dupli arcus AB (448).

727. III°. *Maximum omnium sinuum esse sinum anguli recti* HCA, quippe qui ipse est radius. Unde etiam *sinus totus* dicitur.

728. IV°. *Sinus crescere, ut crescunt anguli a* 0° *usque ad* 90°; *inde vero a* 90° *usque ad* 180° *rursus eodem ordine decrescere.*

729. V°. *Sinum arcus* 30° *æquari dimidio radio.* Nam radius est chorda arcus 60° (533); & sinus est dimidia chorda arcus dupli (726). Itaque *latus oppositum angulo* 30° *in triangulo rectangulo, est dimidium hypotenusæ.* Nam si angulus ACB sit 30°, erit GB = BC, & BD $= \frac{1}{2}$BG.

730. VI°. *Crescentibus angulis a* 0° *usque ad* 90° *crescere etiam tangentes, & secantes ita, ut tangens, ac secans anguli* 90° *sit infinita;* nequit enim radius CH, si HCA sit rectus, concurrere cum tangente AE, nisi si utraque linea producatur in infinitum.

731. VII°. *Tangentem anguli* 45° *esse æqualem radio.* Nam si angulus ACB ponatur 45°, triangulum rectangulum CAE est isosceles, & AE = AC.

732. VIII°. *Sinum versum* AD *arcus* AB *minoris* 90°, *esse æqualem differentiæ cosinus* CD = BI, *a radio* CA; ejusdem *arcus cosinum versum* HI *esse æqualem differentiæ sinus* CI = BD *a radio* CH, *& sinum versum complementi ad duos rectos* Da, *esse æqualem summæ ex radio & cosinu.*

733. IX°. Ob similitudinem triangulorum CDB, CAE, CIB, CHK, esse CA : CD (vel BI) :: AE : BD; hoc est R : *cosin* :: *tang* : *sin*. Deinde CH : CI (vel BD) :: HK : IB; sive R : *sin* :: *cotang* : *cosin*. Denique AE : CA :: CH (vel CA) : HK, seu $\div$ *tang*. R. *cotang*.

Ex his analogiis sequentes derivantur formulæ, ut sinus tangentibus &c, & vicissim, substitui possint. Ponatur R = 1, erit

734. $Sin = cos \times tang = \frac{cos}{cot}$.

735. $Cos = sin \times cot = \frac{sin}{tang}$.

736. $Tang = \frac{sin}{cosin} = \frac{1}{cotang}$.

737. $Cot = \frac{cos}{sin} = \frac{1}{tang}$.

738. $Cot\,A \times tang\,A = 1 = cot\,B \times tang\,B$.

739. Ut ſinus, tangentes &c arcubus, ſeu angulis triangulorum ſubſtitui poſſent, neceſſe fuit, ut conderentur tabulæ, quæ valorem ſinuum, tangentium, cotagentium omnium angulorum acutorum (qui enim ad obtuſos pertinent, ex complementis ad duos rectos habentur) omnium graduum & minutorum jam calculo accurato determinatum exhiberent. Id genus tabulæ plerumque nomine *tabularum ſinuum* habentur, ſupponiturque in iis radius circuli quemvis angulum metientis eſſe $= 1$; & valor ſinuum, tangentium, coſinuum & cotangentium ſingulis gradibus & minutis e regione in fractionibus decimalibus apponitur.

En autem compendiariam expoſitionem principiorum, ex quibus hæ tabulæ ſeu conſtructæ ſunt, ſeu conſtrui potuerunt.

Principia conſtructionis Tabularum Sinuum.

740. Theorema I. *Dato pro quovis arcu* AB (Fig: 59) *uno ex his quatuor: ſinu, coſinu, ſinu verſo, coſinu verſo, ex reliquis tribus quodvis datur.* Etenim apparet eſſe (563) $CD = \sqrt{(CB^2 - BD^2)}$, ſeu $cosin = \sqrt{(RR - sin^2)}$. Item $DA = CA - CD$, hoc eſt $sin\ vers = R - cosin$. Item $HI = CH - CI$, ſeu $cosin\ vers = R - sin$, &c.

741. Theorema II. *Calculatis iis, quæ pertinent ad arcum quemvis, reperiri ex iisdem poſſunt omnia, quæ ſpectant ad ejusdem arcus dimidium vel duplum.* Nam 1*mo*, ducta chorda BA (Fig: 60), & ex C demiſſa in eam perpendiculari CE, ob datas BD, DA, habetur (563) BA

$= \sqrt{BD^2 + DA^2}$, & hinc FA; seu $\mathit{sin}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{\mathit{sin}^2 + \mathit{sin}\ v^2}$. Dein $CF = \sqrt{CA^2 - AF^2}$; consequenter $\mathit{cosin}\ \frac{1}{2} = \sqrt{RR - \mathit{sin}^2 \frac{1}{2}}$. 2*do*, si detur arcus AE, triangula FCA, DBA similia dant hanc analogiam CA : CF :: AB : BD, seu R : *cos Arcus* :: 2 *sin Arcus* : *sin Arcus dupli*.

742. Theorema III. *Datis sinubus* BD, KL *arcuum* AB, KB, *datur etiam sinus* KM *summæ arcuum* (Fig: 61) *vel differentiæ* (Fig: 62). Cum dentur sinus, dantur etiam cosinus CD, CL (740). Est autem CB : CL :: BD : LP (seu OM), igitur $OM = \frac{\mathit{sin}\ AB \times \mathit{cos}\ KB}{R}$; & ob triangula similia KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig: 61); item KOL, KMQ, CQL, CBD (Fig: 62), est in triangulis KOL, CBD (Fig: 61 & 62) CB : CD :: KL : KO; hinc $KO = \mathit{sin}\ KB \times \mathit{cos}\ AB$; quare posito R = 1, est KM, seu $\mathit{sin}\ (BK \pm AB) = \frac{\mathit{sin}\ BK \times \mathit{cosin}\ AB \pm \mathit{sin}\ AB \times \mathit{cos}\ KB}{R}$.

743. Theorema IV. *Summa ex sinu* KM (Fig: 63) *arcus* KA *minoris* 30 *gradibus*, & *facto ex* $\sqrt{3}$ *in* KI *sinum differentiæ arcus* KA *a* 30 *gradibus*, *est æqualis sinui* FN *arcus* FA, *qui tantundem excedit* 30 *gradus*, *quantum arcus* KA *ab iis deficit*.

Sit arcus AB = 30 gradibus, & BF = BK; ob triangula rectangula SIF, SGQ similia, est angulus IFS = GQS = BCA = 30°; unde cũ KFS = 30°, est (729) GK = ½FK = IK = FI. Est autem FK²

$-GK^2 = FG^2$, seu $4\,IK^2 - IK^2 = FG^2$: ergo $3\,IK^2$ seu $IK^2 \times 3 = FG^2$; & extracta radice, $IK \times \sqrt{3} = FG$, adeoque $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$.

744. Theorema V. *Summa ex sinu* FT, *arcus* HF *minoris* 60 *gradibus*, & *sinu* FI, *differentiæ arcus* HF *a* 60°, *æqualis est sinui* KO, *arcus* HK, *qui tantum excedit* 60°, *quantum arcus* HF *ab iis deficit*.

Quoniam $FI = GK$ (743), est $FT + GK = KO$. Sic exempli gratia est *sin* 55° + *sin* 5 = *sin* 65°.

745. Ope horum Theorematum omnes sinus reperiri possunt. Cognito enim sinu arcus 30° (729), per Theorema I & II. habentur sinus 15°, $7°\frac{1}{2}$, $3°\frac{3}{4}$, & sic deinceps accipiendo medietatem præcedentium usque ad duodecimam divisionem, ex qua obtinetur sinus 52'', 44''', $3\frac{3}{4}$'''', qui circa errorem sensibilem pro ipso arcu haberi potest; & quia sinus, qui ab arcubus non differunt, sunt iisdem proportionales, fieri potest hæc analogia: ut hic arcus est ad suum sinum, ita arcus 1' est ad sinum suum. Hoc habito datur (741) sinus arcus 2', tum (742) 3', 4' &c, usque ad 30°. Inde porro (743) a 30° usque ad 60° omnes reperiuntur; & tandem (744) a 60° usque ad 90°. Habitis sinubus, tangentes ope alicujus formulæ articuli superioris pariter inveniuntur.

Principia Theoriæ Calculi Trigonometrici.

746. Theorema I. *In omni triangulo sinus angulorum sunt ut latera opposita.*

Demonstratio. Si triangulum circulo inscribatur, sinfingula latera funt chordæ arcuum duplorum eorum, qui angulos oppofitos metiuntur (466): eft igitur cujusvis lateris dimidium (726) finus anguli oppofiti; & cum dimidia fint ut tota (297); quodvis latus eft ut finus anguli oppofiti.

747. *Coroll:* I. Cum finus anguli recti fit ipfe radius (727), & latus recto oppofitum fit hypotenufa (485), *eft in omni triangulo rectangulo radius ad hypotenufam, ut finus unius ex angulis acutis ad latus eidem angulo oppofitum.*

748. *Coroll:* II. Jn triangulo rectangulo finus unius anguli ex acutis eft cofinus alterius: igitur eft femper (746) finus unius ex angulis acutis ad fuum cofinum, ut latus oppofitum illi angulo ad latus alterum. Eft autem (733) finus ad cofinum ut tangens ad radium; ergo *in triangulo rectangulo eft tangens unius ex acutis ad radium, ut eft latus ei angulo oppofitum ad latus alterum.*

749. Coroll: III. *Datis tribus angulis trianguli, folum datur ratio laterum, non autem magnitudo eorum abfoluta.* Etenim nihil aliud ex angulorum magnitudine inferri poteft, nifi quod latera iis oppofita fint in ratione eorundem finuum: neque magnitudo laterum determinari poteft, cum poffint infinita triangula inæqualia conftrui, quæ omnia fint inter fe fimilia, atque adeo angulos homologos æquales habeant.

750. Theorema II. *Jn quovis triangulo* ABC (Fig: 64) *eft: ut latus maximum* AC *ad fummam laterum reliquorum* AB + BC, *ita eft eorundem differentia* AB — BC, *ad differentiam fegmentorum lateris maximi* AE, CE, *quæ fiunt a perpendiculari ex angulo maximo* B *in latus maximum* AC *demiffa.*

Demonftratio. Etenim fi ex angulo B tanquam centro intervallo lateris minimi BC defcribatur circulus

GC

GCD, & producatur AB in G; patet, esse $AG = AB + BC$, item $AP = AB - BC$: & quoniam (448) $CE = ED$, est $EA - CE = AD$. Est autem (564) $AC : AG :: AP : AD$.

751. Theorema III. *In omni triangulo rectilineo ABC* (Fig. 64) *est summa laterum duorum quorumvis* $AB + BC$, *ad eorum differentiam* $AB - BC$; *ut tangens semisummæ angulorum A & C, iis lateribus oppositorum, ad tangentem eorundem angulorum semidifferentiæ.*

Demonstratio. Sit angulorum A & C semisumma $= P$, eorum semidifferentia $= Q$; erit angulus major $C = P + Q$ (232); & minor $A = P - Q$. His positis est (746) $AB : BC :: \mathit{sin}\, C : \mathit{sin}\, A :: \mathit{sin}\, \overline{P + Q} : \mathit{sin}\, \overline{P - Q}$; seu (742) $:: \mathit{sin}\, P \times \mathit{cosin}\, Q + \mathit{cosin}\, P + \mathit{sin}\, Q : \mathit{sin}\, P \times \mathit{cosin}\, Q - \mathit{cosin}\, P \times \mathit{sin}\, Q$. Igitur $AB \times \mathit{sin}\, P \times \mathit{cosin}\, Q - AB \times \mathit{cosin}\, P \times \mathit{sin}\, Q = BC \times \mathit{sin}\, P \times \mathit{cosin}\, Q + BC \times \mathit{cosin}\, P \times \mathit{sin}\, Q$. Seu $\overline{AB - BC} \times \mathit{sin}\, P \times \mathit{cosin}\, Q = \overline{AB + BC} \times \mathit{cosin}\, P \times \mathit{sin}\, Q$; & si utrumque membrum æquationis dividatur per $\mathit{cosin}\, P \times \mathit{cosin}\, Q$, fiatque reductio, erit $\overline{AB - BC} \times \frac{\mathit{sin}\, P}{\mathit{cosin}\, P} = \overline{AB + BC} \times \frac{\mathit{sin}\, Q}{\mathit{cosin}\, Q}$; est autē (736) $\frac{\mathit{sin}}{\mathit{cosin}} = \mathit{tang}$; unde fiet $\overline{AB - BC} \times \mathit{tang}\, P = \overline{AB + BC} \times \mathit{tang}\, Q$, consequenter habetur (302) $AB + BC : AB - BC :: \mathit{tang}\, P : \mathit{tang}\, Q :: \mathit{tang}\, \frac{A + C}{2} : \mathit{tang}\, \frac{A - C}{2}$.

752.

752. Scholium. *Hæc analogia ad alias duas sequentes reduci potest: Ut est latus minus BC, ad latus majus AB, ita est radius ad tangentem anguli, a quo 45° subtrahantur. Dein: ut est radius ad tangentem anguli residui; ita est tangens semisummæ angulorum A & C, ad tangentem eorundem semidifferentiæ.*

Demonstratio. Producta AB, fiat PT = BP = BC, & PM = BA; erit TM = BA — BC. Fiat quoque angulus NBT = 45°, & e punctis T, M demittantur in BN perpendiculares TK, MN; jungatur denique KP. Patet, triangula BKP, BKT, BNM esse rectangula, isoscelia, & similia; ideoque BK = KT, BP = KP = PT = BC, & BN = NM. Est igitur in triangulo PKM (748) PK (vel BC) : PM (vel AB) :: R : *tang* PKM. Ab hoc angulo subtractis 45°, manet TKM = KMN. Porro (748) est R : *tang* KMN :: MN (vel BN) : KN :: BM (vel AB + BC) : TM (vel AB — BC) :: $tang \frac{A+C}{2} : \frac{A-C}{2}$ (751).

Usus Theoriæ præcedentis in calculis Trigonometricis.

753. In calculis Trigonometricis non nisi Logarithmi sinuum, cosinuum, tangentium, cotangentium, ac numerorum naturalium, magnitudinem absolutam laterum exhibentium, usurpantur. Unde tabulæ adhiberi solitæ exhibent imprimis logarithmos sinuum, cosinuum &c, dein separatim tabulam logarithmorum numerorum naturalium ab 1 usque ad 10000, vel 20000, qui, quod ad usum, plerumque sufficiunt.

754

754. In tabulis ſinuum ſupponitur radius, ſeu ſinus totus = 10000000000, ita, ut characteriſtica logarithmi radii ſit 10. Ex quo ſequitur I°, *quod, dum logarithmus radii addi debet, alteri logarithmo, ſufficiat, alterius logarithmi characteriſticæ præfigere* 1, *ſi ea minor ſit decade, ut plerumque minor eſt; aut vero, ſi decadem excedat, vel æquet, ejus decadibus addere* 1. Ex oppoſito *ſi a logarithmo quopiam ſubtrahendus ſit logarithmus radii, ſatis eſſe, ſi* 1 *ex ejus characteriſticæ decadibus auferatur.*

755. II° infertur, *calculum triangulorum rectangulorum, in quibus adhibetur radius,* (ut fere ſemper contingit, quemadmodum paulo poſt videbimus) *reduci vel ad unicam additionem duorum logarithmorum, ſi radius ſit terminus primus analogiæ; vel ad unicam ſubtractionem duorum logarithmorum, dum radius eſt ſecundus, vel tertius analogiæ terminus*: quo ſit, ut triangulorum rectangulorum calculus multo ſit expeditior, quam aliorum; neque enim unitatis additio, vel ſubtractio inter operationes computanda eſt.

Calculus Triangulorum Rectangulorum.

756. Ut calculus Triangulorum Rectangulorum eo ſit facilior, ſupponemus angulum rectum (qui ſemper eſt inter data) eſſe A; alterum ex acutis vocari B, alterum C; tum ſequens tabula pro ſingulis caſibus exhibebit regulam, ſive analogiam, quam ſequi oporteat.

	Data	*Quaesita*	*Analogiae, sive Regulae Calculi.*
1	AB, AC	BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$. vel AB : AC :: R : *tang* B; dein *sin* B : R :: AC : BC
2		B	AB : AC :: R : *tang* B.
3		C	AC : AB :: R : *tang*: C.
4	AB, BC	AC	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$. vel *log* AC = $\frac{1}{2}$ *log* (BC + AB) + $\frac{1}{2}$ *log* (BC — AB).
5		B	BC : AB :: R : *cos* B.
6		C	BC : AB :: R : *cos* C.
7	AC, BC	AB	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$. vel *log* AB = $\frac{1}{2}$ *log* (BC + AC) + $\frac{1}{2}$ *log* BC — AC).
8		B	BC : AC :: R : *sin* B.
9		C	BC : AC :: R : *sin* C.
10	AB, B	AC	R : *tang* B :: AB : AC.
11		BC	*cosin* B : R :: AB : BC.
12	AB, C	AC	R : *cotang* C :: AB : AC.
13		BC	*sin* C : R :: AB : BC.
14	AC, B	AB	R : *cotang* B :: AC : AB.
15		BC	*sin* B : R :: AC : BC.
16	AC, C	AB	R : *tang* C :: AC : AB.
17		BC	*cos* C : R :: AC : BC.
18	BC, B	AB	R : *cos* B :: BC : AB.
19		AC	R : *sin* B :: BC : AC.
20	BC, C	AB	R : *sin* C :: BC : AB.
21		AC	R : *cos* C :: BC : AC.

757. Omnes analogiæ allatæ nil aliud sunt, quam applicatio Corollariorum I & II (747 & 748) ad casus, qui

qui in triangulis rectangulis occurrere possunt. *1ma*, *4ta*, & *7ma* regula inde ductæ sunt, quod (562) quadratum hypotenusæ æquale sit summæ quadratorū reliquorum laterum; sed quia calculus quadratorum non nihil molestior est, primæ regulæ binæ analogiæ substitutæ sunt, quarum priore reperitur unus ex angulis acutis, altera hypotenusa, ope illius anguli nempe, & lateris ei oppositi, ac jam noti. Quartæ & septimæ regulæ suffecta est altera per logarithmos, quæ hunc in modum potest enunciari: *semisumma logarithmorum summæ & differentiæ ex hypotenusa & uno latere, est logarithmus lateris alterius.* Fundamentum ejus est in eo, quod $BC^2 - AB^2 = (BC + AB) \times (BC - BC)$, consequenter (340) $log\ (BC + AB) + log\ (AB - AB) = log\ AC^2 = 2\ log\ AC$ (342). Idem est de regula septima.

Calculus Triangulorum Obliquangulorum.

758. I. Datis duobus angulis cum uno latere, invenire latera reliqua.

Ut sinus anguli oppositi lateri dato
Ad latus datum;
Ita est sinus anguli oppositi lateri quæsito
Ad latus quæsitum. (746).

759. II. Datis duobus lateribus cum angulo uni eorum opposito, invenire angulum oppositum alteri; *modo prius constet, an acutus, an vero obtusus sit.*

Ut latus oppositum angulo dato
Ad sinum ejusdem anguli;

Ita est latus alterum
Ad sinum anguli sibi oppositi.

Hæc analogia est inversa prioris, per quam etiam inveniri potest latus tertium.

760. III. Datis duobus lateribus & angulo comprehenso, invenire reliquos angulos.

Ut summa laterum datorum
Ad eorundem differentiam;
Ita est tangens semisummæ angulorum quæsitorum
Ad tangentem eorum semidifferentiæ (751).

Exemplum. Sit AB (Fig: 64) 865 pedum; CB 517 pedum; angulus ABC 96°.36'. Adhibitis logarithmis erit . . . .

AB.....865	ABC	96°.36'	
BC.....517	Summa reliquorū	83 . 24...	suplem:
Summa 1382. (491).	Semis: reli:	41 . 42	

Differentia 348... log... 2,54158
tang. 41°. 42'.. 9,94986

12,49144
log. 1382 - - - - 3,14051

9,35093 log. tang. 12°.39' semid:
Semisumma - - - - - - - - - - 41 . 42

Angulus quæsitus major - 54 . 21
Angulus quæsitus minor - - 29 . 3

Angulus ACB oppositus lateri majori AB, est major, consequenter 54°. 21'; & angulus alter BAC 29°. 3'

761.

761. IV. *Datis duobus lateribus cum angulo comprehenſo, invenire latus tertium.*

Quærantur per regulam præcedentem reliqui anguli; & tum per regulam primam latus tertium (758.)

762. V. *Datis tribus lateribus invenire angulos.*

Si dentur (Fig: 64) tria latera AC, AB, BC, ut reperiatur angulus quivis A, fiat imprimis hæc analogia:

Ut latus omnium trium maximum AC
Ad ſummam reliquorum duorum AB + BC,
Ita eſt differentia reliquorum duorum AB — BC
Ad differentiam ſegmentorum lateris maximi CE, EA, quæ fiunt perpendiculari ex angulo ei oppoſito B demiſſa.

Cum itaque CA ſit ſumma ſegmentorum CE, EA; & AD eorum differentia; erit CE (232) $= \frac{AC - AD}{2}$, & EA $= \frac{AC + AD}{2}$. Unde in triangulis rectangulis CEB, BEA, dantur jam bina latera BC, CE; & AB, AE: quare anguli inveniri poſſunt (756).

TRA-

TRACTATUS ANALYTICUS DE SECTIONIBUS CONICIS.

Notiones prævice de Curvis in genere; & de Methodo exprimendi analytice præcipuas proprietates.

763. *Functio alicujus quantitatis* dicitur, quidquid eam reddit compositam, vel impedit, ne possit ut simplex spectari. Exempli causa, functio in genere quantitatis *a* est quævis ejus potentia, quævis radix, summa, differentia, factum, quotiens &c

764. Methodus determinandi positionem alicujus puncti in plano, commodissima, & apud Geometras maxime usitata est, si referatur ad duas rectas diversum inter se situm in eo plano habentes, id, quod facile est, si puncti ab utraque recta distantia sciatur, & ad quam earum partem sit collocandum; ut si punctum M (Fig: 65) ponendum sit infra rectam AS positione datam in distantia æquali rectæ DE, & ad partem sinistram rectæ SF in distantia æquali datæ BC; tum vero ducta infra A S parallela GH, ita, ut omnes perpendiculares inter eas ductæ æquentur datæ DE, evidens est, punctum debere cadere in hanc parallelam: quod si porro fiat ex parte sinistra KI parallela ad SF, ut perpendicula inter eas intercepta sint æqualia rectæ BC, pariter liquet, etiam in hac KI debere esse punctum M: quare dubium esse nequit, punctum M cadere in intersectionem rectarum KI, GH.

765. Si datis puncti M a rectis AS, SF distantiis, non simul determinaretur, versus quam earum partem situm esse debeat, ejus positio foret indeterminata, quippe quæ in quatuor locis *m*, μ, *n*, *p* æque haberi posset. Ut igitur hæc ambiguitas tolleretur, id convenit inter Geometras, ut situs oppositi per signa contraria + & — denotarentur; exempli gratia, assumpta recta AS pro termino, ad quem referantur rectæ, quæ supra, vel infra eam ducuntur, aliæ dicentur positivæ, aliæ nega-

ti-

tivæ; & si SF constituatur terminus, quo lineæ versus dextram partem ductæ distinguantur ab iis, quæ cadunt versus sinistram, rursus aliæ positivæ erunt, aliæ negativæ. Utras autem quis positivas, vel negativas haberi velit, ab initio cuivis integrum est; at ubi semel id determinatum fuit, nihil amplius in calculis ad eandem figuram pertinentibus immutari potest.

766. Si ex puncto M methodo superius exposita determinato demittantur perpendicula MT, MR, triangula rectangula MTV, MPR similia sunt, cum ablato ex rectis TMP, VMR angulo communi TMR, maneat TMV = PMR. Est igitur MV : MP :: MT (vel DE) : MR (vel BC). Quare perpendicularibus MT, MR, distantias datas metientibus, substitui poterant parallelæ MV, MP, & situs puncti M ex his conditionibus determinari, ut sit infra AS, ad sinistram rectæ SF, atque parallelæ ex eo ad AS & SF ductæ sint altera = MP, altera = MV. Quod si enim accipiatur in SP infra AS pars SP = MV, & per P agatur parallela ad AS, nempe GH, solum opus est, ut in eam transferatur ex P recta = PM, eritque punctum M exacte determinatum, uti prius.

767. Plerumque curva in plano descripta consideratur ut series vestigiorum progressuum momentaneorum, quæ reliquit punctum mobile in plano fluens; atque ut natura & proprietates curvæ constitui possint, necesse est, ut ea series sit series punctorum M. M (Fig. 68) eodem semper modo determinatorum respectu rectarum AS, SP in eodem plano diversum situm habentium, sitque functio quævis determinata rectæ MP ad similem functionem rectæ correspondentis SP in ratione constante: atque hinc punctum M curvam describens secundum certam legem moveri perpetuo debet, quam observet in angulis infinite parvis suorum flexuum.

Æquatio Algebraica, quæ exprimit hanc legem, seu rationem constantem functionis rectæ cujusvis MP ad functionem correspondentis rectæ SP, dicitur *æquatio ad curvam;* recta, ad quam terminantur omnes parallelæ, dicitur *linea abscissarum*, utpote cum *abscissæ* vocentur partes SP, SP &c hujus lineæ, quæ inter punctum determinatum S (quod *origo abscissarum* appellatur), per quod transit recta AS, & parallelas ad AS, nempe MP (quæ dicuntur *ordinatæ*, vel *ordinatim applicatæ*) intercipiuntur. Ex quo deducitur, quod si semel sciatur abscissarum origo, & positio unius ex ordinatis, rectæ AS nullus amplius sit usus.

768.

768. Ut hæc exemplo illustrentur, supponamus esse sMS (Fig: 69) semicirculum, cujus diameter sS. Notum est (565), quod si e puncto quovis M ad diametrum demittatur perpendicularis MP, semper sit $MP^2 = SP \times Ps$. Jgitur sumpta Ss pro linea abscissarum, & puncto S pro earundem origine, æquatio ad circulum debet exprimere, quadratum cujusvis ordinatæ MP esse æquale facto ex abscissa SP in partem residuam diametri Ps. Unde posito $Ss = a$, $MP = y$, $SP = x$ (nam illud observandum, ordinatas curvarum plerumque vocari y; & abscissas x; ita, ut in familiari sermone x & y, adhibeatur, cum abscissas, & ordinatas curvæ alicujus significare volumus), erit $Ps = a - x$; hinc $yy = ax - xx$ æquatio ad circulum, quoniam in ea exprimitur constans æqualitas ejusdem functionis ordinatæ (nempe quadrati) ad eandem functionem abscissæ (scilicet producti ex ea in residuam partem diametri).

769. Ex his manifestum est, ordinatas curvæ, & correspondentes abscissas debere esse quantitates indeterminatas, seu variabiles, sed quarum una ex altera deduci possit, facta semel suppositione certæ magnitudinis alterutrius, atque ex quantitatibus determinatis, sive *constantibus*, quæ in æquatione continentur; unde nec difficile erit ipsam curvam describere. Exempli causa, in æquatione ad circulum est a quantitas constans, seu invariabilis; unde si sumatur $a = 10$, & in Ss fiant quotcunque abscissæ SP (quæ majoris commoditatis causa plerumque accipiuntur in progressione Arithmetica, ut intervalla PP sint æqualia) ut si SP, sive x ponatur successive $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; ex æquatione $yy = ax - xx$, reperientur ordinatæ correspondentes $0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}, 5, \sqrt{24}, \sqrt{21}, 4, 3, 0$; si itaque é punctis P erigantur totidem perpendiculares ad Ss & fiant æquales $3, 4, \sqrt{21}$ &c, habebuntur tot puncta M, per quæ descripta curva erit circulus eo accuratior, quo ordinatæ MP fuerint aliis aliæ propiores. Et quoniam æquatio $yy = ax - xx$ habet etiam radices negativas $-3, -4, -\sqrt{21}, -\sqrt{24}$, &c, totidem, ac positivas $3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}$ &c; patet, quod si productis rectis MP ad partem alteram rectæ Ss (765) accipiantur totidem, & æquales Pm, habeatur circulus integer SMm.

Jllud quoque intelligitur, quod si SP accepta fuisset major, quam Ss, sive $x > a$, correspondens ordinata facta fuisset quantitas imaginaria, seu impossibilis: etenim hoc posito fuisset $ax - xx$ quantitas negativa, adeoque ejus radix quadrata impospossibilis (242). Quare necesse est, ut semicirculus absolute terminetur in s, nec potest ejus ramus SMM ulterius descendere.

770. Vicissim, cum omnes solutiones possibiles problematis indeterminati (235) contineantur in æquatione, in qua duæ quantitates sunt incognitæ, poni potest, omnes valores possibiles unius ex incognitis exhiberi per seriem abscissarum alicujus curvæ, & valores alterius incognitæ correspondentes per ordinatas ad eandem curvam, ita, ut quodvis curvæ punctum habeat suam ordinatam, & abscissam, quæ accuratam solutionem problematis indeterminati præbeat, quod ea æquatione exprimitur.

771. Varii gradus æquationum opportuni sunt ad varia *genera*, & *ordines* linearum constituendos; uti & diversæ combinationes functionum quantitatum incognitarum, quæ in æquatione certi gradus occurrunt, serviunt ad secernendas lineas in diversas *species*, comprehensas sub eo genere, quod gradus æquationis indicat. Numerus harum combinationum possibilium, atque inter se reapse diversarum, determinat numerum specierum. Sic *lineæ primi generis* vel *primi ordinis* dicuntur, quarum æquationes sunt primi gradus; *lineæ secundi generis*, vel *secundi ordinis*, quarum æquatio est secundi gradus, & sic deinceps. Linea primi generis est sola recta; secundi generis lineæ sunt tantum quatuor sectiones conicæ; tertii generis sunt 72, & adhuc plures quarti &c. Verum hæc intelligenda sunt de curvis, quæ vocantur *Geometricæ*, cujusmodi sunt, quarum abscissæ & ordinatæ sunt rectæ rationis geometrice determinabilis, hoc est, quæ non exprimuntur per quantitates, quarum magnitudo Geometrice determinari nequit, uti forent rectæ æquales arcubus circuli; secus, hoc est, si ordinatæ, vel abcissæ, vel non essent rectæ, aut rectæ ejusmodi, quarum expressionem ingrederentur v. g. arcus circuli, curva foret *mechanica*, vel *transcendens*. Quod si porro curva plana non sit, hoc est, si punctum eam describens non moveatur semper in eodem plano, appellatur *curva duplicis curvaturæ*.

772. Si curva plana MS m (Fig. 66) seu Geometrica, seu Mechanica, sit ejusmodi, ut productis ordinatis ultra lineam abscissarum SF, usque dum rursus occurrant curvæ in m, semper habeatur P m = PM, recta SF dicitur curvæ *diameter*, & punctum curvæ S, per quod ea recta transit, *origo diametri*, quod plerumque simul est origo abscissarum. Si præterea ordi-

natæ sint ad hanc diametrum perpendiculares, ea appellatur *axis curvæ*.

773. Omnium curvarum diametrum habentium, cujus respectu consequenter duo earum rami utrinque SMM, S *m m* in eandem partem se se extendunt, ea est communis proprietas, quod recta SA ad ordinatas parallela per punctum S (originem diametri) ducta, curvam in eodem puncto S tangat. Nam cum diameter semper transeat per medium duplicis ordinatæ utrinque in curva terminatæ, si concipiatur recta M *m* ita moveri, ut sibi ipsi maneat parallela, usque dum perveniat ad S, erit punctum S in medio inter partes infinite parvas rectæ M *m*, quæ itidem, ut prius, utrinque terminabitur in curva: & quoniam tunc M *m* non nisi infinite parum intra curvam existit, ejus partes terminatæ in curva, sunt dimidia lateris infinite parvi curvæ, quod latus congruit cum S, ideoque etiam M *m* cum eodem latere congruit. Jam vero tangens nihil aliud est, quam productio finita lateris infinite parvi; igitur parallela ad ordinatas transiens per S, est productio finita lateris infinite parvi congruentis cum S; adeoque est tangens curvæ in eodem puncto.

774. Si diametro vel axi (producto) SP (Fig. 93 & 94) occurrat tangens TM, pars hujus diametri TP, inter punctum concursus T cum tangente, & inter ordinatam ex puncto contactus M ad eandem diametrum ductam, intercepta, vocatur *subtangens*. Et si in puncto contactus M erigatur *perpendicularis*, seu normalis, ad tangentem MT, nempe MN, pars diametri PN inter puncta concursus normalis, & ordinatæ ex puncto contactus ductæ, cum diametro, intercepta, dicitur *subperpendicularis*, seu *subnormalis*.

775. Quando curva non redit ad suam diametrum, hoc est, quando ejus rami semper longius a diametro recedunt, ex omnibus ejus punctis M, M, &c (Fig. 66) duci possunt ad diametrum SP parallelæ MQ, NQ, usque ad rectam SQ, quæ ad ordinatas curvæ parallela, & per originem abscissarum S transit; ita, ut omnes eæ rectæ MQ sint extra curvam. Tum vero manifestum est, fieri parallelogramma similia PQ, PQ &c, & posse rectas MQ, MQ accipi pro abscissis SP, SP; & rectas SQ, SQ pro ordinatis. Id genus ordinatæ dicuntur *coordinatæ*, & parallelogrammum PQ vocatur *parallelogrammum coordinatarum*, angulusque QSP, *angulus coordinatarum*.

776. Quoniam per hypothesin curva nihil aliud est, quam vesti-

veſtigia æqualia puncti progreſſibus momentaneis moti, atque poſt ſingulos progreſſus deflectentis, ita, ut in variatione angulorum infinite parvorum ſuorum flexuum obſervet legem quandam conſtantem, ſequitur 1*mo*, *lineas mixtas conſiderationis Geometricæ non eſſe*, hoc eſt, eas, quæ partim rectæ, partim curvæ ſint: talis enim lineæ deſcriptio fieri nequit a puncto eadem ſemper lege moto.

777. 2*do* infertur, *contactum curvæ cum recta non poſſe fieri, niſi in unico puncto.* ſeu *a recta non poſſe tangi curvam in duobus, tribusve punctis diverſis ejusdem arcus continui;* id enim ſi fieret, punctum curvam deſcribens ſine flexu deſcripſiſſet illa contactus loca, ex quo lex conſtans poſt ſingulos progreſſus momentaneos deflectendi interrupta fuiſſet.

778. 3*tio* deducitur, *curvaturam alicujus curvæ eo eſſe majorem, quo anguli flexuum majores ſunt, ratione habita magnitudinis progreſſuum momentaneorum puncti curvam deſcribentis.*

Exempli cauſa, circulus eſt curva ita deſcripta a puncto mobili, ut poſt ſingulos progreſſus æquales ſingulis momentis peractos æqualiter deflecteret: & quia duo circuli, major, minorque, ſunt duo polygona regularia ejusdem numeri laterum & angulorum, ita, ut latera majoris circuli majora ſint lateribus minoris in ratione radiorum, anguli flexuum, ſeu angulorum internorum a duobus lateribus contiguis comprehenſorum complementa ad duos rectos in circulo majore, ſunt æquales angulis flexuum in circulo minori: evidens eſt igitur, ſingula latera majoris circuli tanto minus deflectere a recta, quo majora ſunt, ſeu quo radius circuli majoris major eſt radio minoris, puncto circulum majorem deſcribente ſcilicet, tanto magis ſingulis momentis in recta progrediente. Quare *circuli curvatura eo minor eſt, quo major eſt radius*; *ſive curvatura eſt in ratione inverſa diametri.* Unde conſequitur *magnitudinem radii circuli eſſe quantitatem aptam ad ejus curvaturam exhibendam.*

779. Præcipua problemata in examine alicujus curvæ occurrentia ſunt 1*mo*, ut inveſtigetur, qua ratione curva deſcribi debeat, ſi detur ad eam æquatio; & viciſſim quæ ad eam æquatio ex conſtructione data deduci debeat. 2*do*. Quomodo ad datum quodvis illius punctum duci poſſit tangens; hoc eſt, inquirere, quæ ſit poſitio lateris infinite parvi eo in loco, ad quem tangens ducenda eſt; ſeu etiam determinare directionem puncti

fluentis, dum latus illud infinite parvum descripsit. Hinc porro connaturale est, ut etiam quaerantur subtangens, normalis, & subnormalis. 3*tio*. Quae sit curvatura in arcu exiguo dato. Hunc in finem supponitur, per tria puncta proxima arcus curvae minimi transire circumferentia circuli, quae adeo in illo arcu cum curva congruit, atque radius hujus circuli ex aequatione ad curvam, ejusque proprietatibus determinatus exhibet curvaturam arcus dati. Vocatur vero ejusmodi radius circuli *radius curvaturae, radius circuli osculatoris, radius osculi, radius evolutae*. 4*to*. Indagatur, quae sit curvae quadratura, hoc est, quam aream, vel superficiem, curva integra intra se concludat, aut aliqua pars data, ut est spatium arcu LM (Fig. 67) curvae, parte diametri CP, & duabus ordinatis MP, CL comprehensum, quarum altera, velut CL, per originem abscissarum x transit. Hoc ut obtineatur, supponuntur tot parallelogramma $p\,q\,mn$, una ex parte ad curvam, ex altera ad lineam abcissarum terminata, lateribus reliquis ad ordinatas CL vel MP parallelis, quot inter C & P sunt puncta; haec igitur parallelogramma & numero infinita sunt, & tam exigua, ut, lateribus pm, qn infinite propinquis, haberi possint pro ipsis ordinatis ad diametrum CP. Quoniam porro CP est ultima x, omnes x inter originem earum C interceptae, singulisque ordinatis inter CL & PM respondentes crescunt in hac progressione Arithmetica $1\frac{x}{\infty}, 2\frac{x}{\infty}, 3\frac{x}{\infty}, 4\frac{x}{\infty} \ldots\ldots$ $\infty\frac{x}{\infty} = x$. Etenim ordinata primae CL infinite propinqua habet abscissam partem infinite parvam rectae CP, hoc est $1\frac{x}{\infty}$; sequentis abscissa est prioris dupla, utpote respondens puncto alteri ab origine C; est itaque $2\frac{x}{\infty}$; tertiae y abscissa est tripla primae, sive $3\frac{x}{\infty}$, & sic deinceps; unde manifestum est, omnes abscissas exhiberi posse hac serie infinita $\frac{x}{\infty}$ 1. 2. 3. 4. . . . x. Et quia aequatio ad curvam nullam aliam indeterminatam involvit, quam y & x, totidem valores de y accipi possunt, quot sunt x, seu quot sunt termini dictae progressionis; habebitur ergo series infinita ordinatarum inter CL & PM; & siquidem

ea

ea series summari possit, areæ CLMP quadratura exacta habebitur, secus vero, si satis cito dicta series convergat, quadratura datur prope vera, eoque accuratior, quo plures termini seriei ordinatarum summantur.

His problematis ut satisfiat, duplicis generis calculus plerumque adhibetur, nempe Analysis vulgaris, & *calculus infinitesimalis*, cujus principia in sequentibus dabimus.

De natura, & proprietatibus præcipuis Sectionum Conicarum in plano descriptarum, atque ad earum axes relatarum.

780. *Sectionem Conicam* dico eam lineam, cujus singulorum punctorum distantiæ, altera MG a recta AG (Fig. 70, 71, 72) (quam *directricem sectionis* appellabo); altera MF ab eodem puncto F (quod *focum sectionis* vocabo) extra rectam AG sito, semper sunt in eadem ratione.

781. Sectio porro est *Ellipsis*, si sit MG > MF; *hyperbola*, si MG < MF; *parabola*, si MG = MF; *circulus*, si $\frac{MG}{MF} = \frac{1}{\infty}$; recta, si $\frac{MG}{MF} = \frac{1}{\infty}$. In præsens priores tres rationes tantum considerabimus, ex quibus habentur curvæ, proprie *sectiones conicæ* dictæ.

782. Recta AF per focum F ad directricem AG perpendicularis ducta, est sectionis *axis principalis*. Punctum hujus S inter F & A situm, ita, ut sit SA ad SF in ratione constante sectionis, est *vertex sectionis*, *origo*, vel *extremum axis principalis*.

783. Igitur *sectio conica est Ellipsis, hyperbola, vel parabola, ut ejus vertex propior, remotior, vel in eadem distantia a foco fuerit, ac a directrice.*

784. Si datis directrice positione, foco, ac vertice S, oporteat quotcunque sectionis puncta invenire, ac ipsam curvam describere, erigatur ex vertice S, ad axem perpendicularis SB = SF; ducatur indefinita ABD, & erectis quotlibet ad axem perpendicularibus PD, PD, PD, atque etiam, si lubet ex altera verticis parte, accipiantur in iisdem puncta M, M ea lege, ut semper sit FM = PD; transferantur quoque PM in productas ad alteram partem axis, ut sit quævis PM = P*m*; denique curva per puncta M, M, m, m, transiens erit sectio conica quæsita.

sita. Etenim si ex quovis ejus puncto ducatur ad directricem perpendicularis MG, erit, ob triangula similia ASB, APD, DP (seu FM) : PA (seu MG) :: SB (vel SF) : SA.

Et quia puncta m, m sunt in iisdem rectis, atque ad easdem ab axe distantias cum punctis M, M; quod dicitur de ramo curvæ S M M, idem dicendum est de altero Smm, priori æquali & simili, qui propterea easdem habet proprietates. Ex allata constructione facile sequentes proprietates deducuntur.

785. I. *In parabola angulus SAB est 45°; in ellipsi minor; major in hyperbola.*

786. II. Quamdiu rectæ FP minores sunt, quam rectæ PD, semper puncta M determinari possunt: etenim rectæ PD debent esse æquales rectis FM (784); & rectæ FM sunt hypotenusæ triangulorum rectangulorum FMP, consequenter majores rectis FP. Unde si aliqua FP fiat æqualis correspondenti suæ PD, punctum M necessario cadet in punctum P axeos; at si FP evadat major correspondente PD, punctum M determinari nequit. Hoc posito . . . .

In ellipsi (Fig. 70.) rectæ AP crescunt magis, quam correspondentes PD; quia AS > SB (784): igitur rectæ FP, quæ sunt ultra focum F respectu verticis S, debent primo quidem æquare: dein vero etiam excedere sibi correspondentes PD. Sit FP''' = P''' D'''; jam Punctum M''' cadet in axem, ibique curvam terminabit. Quod si enim acciperetur aliqua PD ultra P''' D''', seu etiam inter A & SB, ea nimis brevis foret, quam ut posset determinari punctum M ejusmodi, ut sit FM = PD. Est ergo *ellipsis curva, cujus rami* SMM, Smm *ab initio ab axe ex utraque parte discedunt, dein ad eundem revertuntur, ac se in* s *conjungunt ita, ut axis ejus principalis terminetur in hoc puncto* s, *quod est alter ellipseos vertex.*

787. In hyperbola (Fig. 71) cum sit AS < SB, rectæ AP minus crescunt, quam correspondentes iis PD; unde nulla FP ultra F respectu directricis potest æquare suam PD, ut adeo *rami* SMM, Smm *hyperbolæ utrinque in infinitum ab axe* SP, *discedant.* At si, producta BA ultra directricem versus H, accipiantur rectæ FP trans directricem, erunt eæ quidem ab initio majores, quam correspondentes PD; sed quia rectæ PD magis crescunt, quam earum FP, paulo post devenietur ad unam, velut FP''', quæ sit = P''' D'''; dein erunt FP minores, quam correspondentes PD. Jam vero ob FP''' = P''' D''', punctum

P

P‴ pertinet ad hyperbolam, cum ex triangulis similibus D‴ P‴ A, ASB sit P‴ A : P‴ F (vel P‴ D‴) :: AS : SB. Et quia rectæ PD ultra P‴ D‴ semper crescere pergunt, atque magis semper, magisque excedunt correspondentes sibi FP, etiam ultra directricem determinari poterunt puncta μ ejus conditionis, ut rectæ F μ sint æquales PD rectis, fientq; utrinq; ad axem novi rami hyperbolici in infinitum excurrentes, qui ad focum F, & directricem AG pertinent: unde recta SP‴, vel S*s* sit axis communis, & determinatæ magnitudinis inter vertices S, *s* duarum hyperbolarum oppositarum.

788. Quoniam in parabola (Fig. 72) ob AS = SB, etiam AP = PD, omnes rectæ PF cis S respectu directricis sunt necessario majores, quam correspondentes PD; & omnes PF trans S acceptæ sunt necessario minores suis PD: unde ultra verticem S possunt infinita puncta M in rectis PD determinari, eritque *parabola curva, cujus duo tantum sunt rami æquales, & in infinitum ab axe recedentes.*

789. III. Si datis (Fig. 70, 71, 72) directrice AG, foco F, & vertice S, quæratur, utrum sectio habeat axem finitum, adeoque alterum verticem *s*; ducatur per focum F sub angulo 45° ad axem indefinita FH, & ex puncto H, in quo occurrit rectæ AB (productæ, si opus sit), demittatur perpendiculum ad axem H*s*, quod abscindet axem in *s*, alterumque verticem sectionis determinabit. Nam triangulum rectangulum F*s*H est isosceles, adeoque F*s* = *s*H, habeturque *s*A : *s*H (*s*F) :: SA : SB (vel SF); est igitur punctum *s* curvæ, atque in ipso ejus axe situm, ideoque sectionis vertex.

790. Colligitur hinc, *ellipsin, & hyperbolam semper habere axem* S*s* *determinatæ magnitudinis.* Ac in ellipsi axis semper terminatur ultra focum F respectu verticis S, cum angulus SAB minor sit 45 gradibus (785); in hyperbola terminatur ad partem oppositam, quia angulus SAB est 45 gradibus major. *In parabola vero axis est infinitus*, quoniam FH parallela est ad AB, neque nisi utrinque ad distantiam infinitam versus A vel D, cum ea concurrere potest.

791. IV. Si in axe S*s* producto accipiatur *sa* = SA (Fig. 70, & 71) & in producta P‴ D‴ fiat *sb* = SB, erit recta indefinita *abd* ad ABD parallela, cum anguli alterni SAB, *sab* æquales sint; & parallelæ D*d* &c, erunt singulæ axi principali S*s* æquales. Nam in ellipsi (Fig. 70) axis S*s* = *s*F + F

S

$S = s H + s b = b H$; & in hyperbola (Fig. 71) est $S s = s F - F S = s H - s b = b H$; sunt autem omnes $d D$ ad $b H$ parallelae & aequales.

792. Illud etiam verum est, quod si accipiantur binae PD a verticibus S, s aequidistantes, fit $S s = P D \pm P d$; hoc est, in ellipsi summa duarum PD a verticibus aequidistantium sit aequalis axi principali $S s$; (nam omnes PD inter $S B$, & $s H$, aequidistantes, sunt in proportione Arithmetica); in hyperbola autem axis principalis $S s$ sit aequalis differentiae duarum PD a verticibus S, s aequidistantium.

793. V. Ex hoc autem sequitur, *ordinatas a verticibus sectionis $S s$ utrinque aequaliter distantes, esse inter se aequales*, quod nempe tunc triangula rectangula $a P m$, $A P M$ aequalia sunt, ob angulos ad A, a, & latera AP, $a P$ aequalia.

794. VI. Item deducitur, quod si ducatur $a \gamma$ ad $A G$ parallela, accipiaturque in $S s$ punctum f ita, ut sit $s f = S F$, ellipsis & hyperbola aeque describi possunt e puncto f tanquam foco, & directrice $a \gamma$, quemadmodum descriptae sunt ope foci F, & directricis $A G$.

795. VII. Pariter infertur, esse $S s = F M \pm f M$ (signo $+$ obtinente in ellipsi, & signo $-$ in hyperbola). Nam quaevis $F M$ est aequalis suae PD, & quaevis $f M$ suae PD tantum distanti a vertice S, quantum PD, in qua est punctum M, distat ab altero vertice s; atqui tunc est (792) $P D \pm P D = S s$; igitur etiam $M F \pm M f = S s$.

796. VIII. Quare *in ellipsi est cujusvis puncti perimetri distantiarum summa a duobus punctis fixis constans, seu axi principali aequalis; & in hyperbola cujusvis puncti distantiarum a duobus fixis differentia constans est, & aequalis axi principali.*

797. Ex hac proprietate fluit methodus facilis ellipsin aliquam majorem etiam super pavimento, vel in campo describendi. Figantur in F, & f (Fig. 70) duo paxilli, & extremis funiculi $F f M F$ inter se colligatis, tendatur is ope alterius styli ad M, itaque circa paxillos fixos circumducatur, ut styli vestigia in terra notentur: erit ea via ellipsis. Sit enim stylus in S, evidens est funiculum aequari $2 F f + 2 S F$, seu $2 F f + S F + s f$, hoc est, $S s + F f$; jam vero dum circumducitur stylus, pars funiculi $F f$ non nisi distantiam focorum metitur; igitur ejus residua pars est aequalis $S s$, & metitur distantias cujusvis puncti curvae a focis; est igitur quodvis punctum curvae ita descriptae in ellipsi.

798.

798. IX. Ex iis, quæ ſuperius (793) oſtendimus, ſequitur etiam: eſſe Ss: Ff:: SA: SB. Etenim eſt sA: sF:: SA: SB; igitur sA ∓ SA (ſeu Ss): sF ∓ SB (vel Ff) :: SA: SB; ſigno nempe — pro ellipſi, & + pro hyperbola adhibito.

799. X. Ulterius infertur, duplas ordinatas *m* M in ellipſi (Fig. 70) ab utrovis vertice S, s ſemper creſcere, uſque ad eam, quæ eſt inter vertices media, quæ proinde omnium maxima eſt, ac ellipſeos maximam latitudinem metitur (quemadmodum Ss ejus longitudinis menſura eſt); atque hinc etiam axis ſecundus ellipſeos dicitur, qui in Figura citata eſt *m*" CM". Punctum C, in quo occurrit axi majori Ss, eſt centrum ellipſeos. Ex quo facile apparet, 1*mo*, per axem minorem totum ſpatium ab ellipſi comprehenſum ſecari bifariam, uti etiam per axem majorem: atque adeo *per utrumque axem ellipſin ſecari in quatuor partes æquales.* 2*do*, dato axe majore Ss & focis F, *f*, determinari axem minorem, ſi ſecto axe majore bifariam, & e puncto biſectionis erecta perpendiculari *d*" D" in hac determinentur puncta *m*" & M", ſemiaxe majore ex alterutro foco in eam translato. Erit namque M" F = M" *f*, ob triangula rectangula FCM", *f* CM" æqualia, & M" F + M" *f* = Ss. 3*tio*. Viciſſim dato utroque axe inveniri focos, ſi ſemiaxis major ex puncto extremo axis minoris utrinque in axem majorem transferatur.

800. In hyperbola (Fig. 71) duplæ ordinatæ a vertice utrovis Ss, in infinitum creſcunt; atque ut analogia ejus cum ellipſi obſervetur, centrum hyperbolæ dicitur punctum C inter vertices medium; Ss vocatur *axis primus, axis principalis, axis tranſverſus*. At vero *axis ſecundus, axis rectus* appellatur recta *l* CL, ad axem primum normalis, & determinata in *l* & L, translata nempe in hæc puncta ex alterutro vertice S vel s dimidia diſtantia focorum CF, vel C*f*. Atque hinc intelligitur, qua ratione inveniantur foci datis axibus hyperbolæ.

801. Dupla ordinata per focum ſectionis conicæ tranſiens dicitur *parameter* axis principalis ſectionis.

802. XI. Ex conſtructione generali ſectionum conicarum, quam attulimus, præterea illud conſequitur, quod omnes ſectiones ad eandem ſpeciem pertinentes v. g. omnes ellipſes, ſint figuræ ſimiles, ſi diſtantiæ AS earum verticis a directrice cum diſtantiis earundem verticis a foco proximo, nempe SF, ſint proportionales. Hac enim in hypotheſi omnes AP, omnes PD,

Pp vel

vel FM unius ſectionis ſunt proportionales cum AP, PD, vel FM homologis alterius ſectionis; conſequenter omnes dimenſiones homologæ harum ſectionum ſunt proportionales, ideoque figuræ ſimiles.

803. COROLL. I. *Duæ ellipſes, vel duæ hyperbolæ ſunt ſimiles, ſi axes unius ſint proportionales axibus alterius; aut ſi diſtantiæ verticum ſint proportionales intervallis ſocorum.*

804. COROLL. II. *Omnes parabolæ ſunt figuræ ſimiles.* Eſt enim in omnibus $AS = SF$ (Fig. 72).

805. PROBLEMA I. *Ad punctum datum* M *ſectionis conicæ ducere tangentem.*

RESOLUTIO. Ducantur e focis F, f ſectionis (Fig. 76 & 77) per datum punctum M indefinitæ fMm, dividatur angulus FMm, per quem curva tranſit, bifariam recta TM, erit hæc tangens quæſita

DEMONSTRATIO. Deſcribatur puncto M tanquam centro, & radio MF, arcus Fm; metiens angulum FMm; patet, eſſe $fm = Ss$, ob $fm = Mf \pm MF$. Quod ſi jam e quovis puncto alio A rectæ TM ducantur Af, AF, Am, erit (441) $AF = Am$, conſequenter $Af \pm Af = AF \pm Am$. In ellipſi autem (Fig. 76) eſt $Af + Am > fm$ (494), e quo manifeſtum eſt, eſſe punctum A extra curvam (795); & in hyperbola (Fig. 77), ſi foret $Af - Am = fm$, (795) ut ejus natura poſcit, ſiquidem punctum A ad eam pertineat; eſſet ſimul $Af = Am + fm$ (545), quod eſt abſurdum. Igitur præter M nullum eſt punctum in recta TM, quod ſit in curva.

806. SCHOLIUM. Præcedens ſolutio applicari quoque poteſt parabolæ, ſi per datum punctum M (Fig. 78) ducatur recta MF, & altera Mm axi parallela, quæ proinde cenſetur ex altero foco infinite diſtante venire, & dividatur angulus FMm bifariam *

---

* *Si datur punctum extra ſectionem conicam, ac petatur, ut inde ducatur tangens; ſequens reſolutio adhiberi poterit: ſi ſectio ſit parabola, ſumpto centro in puncto dato, & radio æquali ejusdem puncti diſtantiæ a ſoco, deſcribatur arcus, qui directricem interſecet: ſi ex hoc puncto interſectionis ducatur parallela ad axem, ea in parabola determinabit punctum, in quo recta e puncto dato ducta parabolam tangit. Demonſtratio patebit*

807. COROLL. I. *Angulus* b M f *ad punctum contactus* (Fig. 76, 78), *inter tangentem* Mb, *& rectam* M f *tendentem ad alterutrum focum, semper est æqualis angulo* FMT *inter eandem tangentem, & rectam* MF *ad alterum focum ductam.* In hyperbola (Fig. 77) est $bMf = bMF$, quod eodem redit.

808 COROLL. II. Chorda F*m* per tangentem semper bifariam in partes KF & K*m*, & ad angulos rectos secatur.

---

tebit figuram construenti, si ex dato puncto ducantur ad focum, & ad punctum intersectionis arcus cum directrice radii, atque hoc idem intersectionis punctum cum foco conjungatur, focusque cum puncto contactus.

2do. *Si sectio sit ellipsis, describatur arcus e puncto dato, tanquam centro, radio æquali distantiæ ejusdem a foco viciniore; tum alter arcus e foco remotiore, & radio æquali axi majori, qui priorem arcum intersecet. Quod si focus remotior conjungatur recta cum puncto intersectionis arcuum, ea secabit ellipsin in puncto, ad quod ex dato ducenda est tangens. Demonstratio ex ipsa constructione facile intelligetur.*

3tio. *Si denique sectio sit hyperbola, eadem fere manet constructio; nempe e puncto dato tanquam centro describitur arcus, cujus radius sit æqualis distantiæ puncti dati a foco viciniore hyperbolarum oppositarum; tum assumpto pro centro foco altero, & radio æquali axi transverso prior arcus intersecatur; per punctum intersectionis agitur recta e foco posteriore, producenda, donec occurrat hyperbolæ, ac determinet ejus punctum, ad quod a puncto dato ducenda est tangens.*

Illud tamen isthic observandum, cum arcus tam sese, quam directricem parabolæ bis intersecare possint, tangentes posse duas duci, nisi si punctum datum sit in centro hyperbolarum; tunc enim utraque tangens fiet asymptotus: si detur in asymptoto, altera tangens duci poterit, altera cum asymptoto congruet. Ceterum methodus, quam pro ellipsi præscripsimus, etiam sufficit pro circulo, dum nempe distantia focorum in ellipsi evanescit.

809. *Observa.* Deinceps semper appellabimus *abscissam* ordinatæ ad axem, vel generaliter ad diametrum, distantiam punctorum extremorum diametri ab eo puncto, in quo ei ordinata, etiam si opus est, productæ, occurrit, itaque ellipsis, circulus, hyperbola semper habent duas abscissas singulis ordinatis respondentes. Sed quoniam eadem litera x diversæ abscissæ exprimi nequeunt, semper vocabimus x, & abscissam, illam partem diametri, quæ inter ordinatam, & punctum diametri determinatum, nempe originem abscissarum, comprehenditur.

810. PROBLEMA II. *Invenire æquationem, quæ exprimat rationem functionum ordinatarum ad functiones suarum abscissarum, earum origine in vertice diametri sumpta.*

RESOLUTIO. Sit in ellipsi (Fig. 76) $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF, seu $sf = c$; $SP = x$, $PM = y$: erit $Ps = 2a - x$, $PC = a - x$, $PF = x - c$, $CF = a - c$, $Ff = 2a - 2c$, & $Pf = 2a - c - x$. Jam in triangulo FlC est (562) $Fl^2 = FC^2 + lC^2$, seu $aa = aa - 2ac + cc + bb$; atque hinc $cc = 2ac - bb$. His positis in triangulo FMf habetur (750) $fM + MF$ $(2a)$: Ff $(2a - 2c)$ :: $fP - PF$ $(2a - 2x)$; $fM - MF = 2a - 2x - 2c + \frac{2cx}{a}$. Igitur (232) $MF = a - a + x + c - \frac{cx}{a} = x + c - \frac{cx}{a}$. Est autem in triangulo rectangulo PMF, $PM^2 = FM^2 - PF^2$, seu $yy = xx + 2cx + cc - \frac{2cxx}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa} - xx + 2cx - cc$, & facta reductione, $yy = 4cx - \frac{2cxx - 2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$; & substituto $2ac - bb$ pro cc, ac reductione adhibita, tandem habetur $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$.

Pro hyperbola (Fig. 77) positis eodem modo $Ss = 2a$, $Ll = 2b$; SF, vel $sf = c$, $SP = x$, & $PM = y$, est $Ps = 2a + x$, $PC = a + x$, $PF = x - c$, $Pf = x + 2a + c$, CF vel $Sl = a + c$ (800). Est igitur in triangulo rectangulo SCl, $Sl^2 = Cl^2 + SC^2$, sive $aa + 2ac + cc = bb + aa$, adeoque $cc = bb - 2ac$. Sumatur dein $M\varphi =$ MF, MF, & transferatur ex M in partem alteram ordinatæ MP, fiet $P\varphi = PF$, & in triangulo φMf habebitur $Mf - M\varphi$, seu $fM - FM\,(2a) : f\varphi\,(2a+2x) :: Pf - P\varphi\,(2a+2c) : FM + fM = 2a + 2c + 2x + \frac{2cx}{a}$; & hinc $FM = c + x + \frac{cx}{a}$. Quoniam igitur $PM^2 = FM^2 - PF^2$, facta substitutione, ac reductione, ut superius, obtinetur $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$, *æquatio hyperbolæ ad suos axes relatæ.*

811. Calculi ad ellipsin, & hyperbolam eodem prorsus modo instituuntur, neque in consectariis inde formulis aliud plerumque adest discrimen, nisi signorum. Unde ubi deinceps in calculis utrique huic curvæ communibus occurrent ante terminos nonnullos signa $\pm$ vel $\mp$, superius signum ad ellipsin, inferius ad hyperbolam pertinere notetur. Exempli causa superiores duæ æquationes ad hanc reducuntur $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$.

812. In parabola, in qua $a = \infty$, æquatio $yy = 4cx \mp \frac{2cx}{a} \mp \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$ reducitur ad $yy = 4cx$. Itaque hæc erit *æquatio ad parabolam.*

813. COROLL. Quoniam $cc = \pm 2ac \mp bb$, habetur $bb = 2ac \mp cc = c \times (2a \mp c) = SF \times Fs$; hoc est, *semiaxis minor est media proportionalis inter distantias unius e focis ab utroque vertice.*

814. PROBLEMA III. *Invenire expressionem analyticam parametri axis principalis sectionis conicæ.*

RESOLUTIO. In æquatione superiore nondum reducta $yy = 4cx \mp \frac{2cxx \mp 2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$, ponatur $x = c$, & fiet $yy = 4cc, \mp \frac{4c^3}{a} + \frac{c^4}{aa}$; extractis hinc radicibus habetur $y =$

$= 2c \mp \frac{cc}{a}$, qui eſt valor ordinatæ per focum F tranſeuntis, cujus duplum (801) eſt ipſa parameter p; quare $p = 4c \mp \frac{2cc}{a}$.

815. COROLL. I. In parabola ob $a = \infty$; eſt, $p = 4c$.

816. COROLL. II. *Parameter axis principalis eſt in parabola æqualis quadruplo diſtantiæ verticis a foco; in hyperbola eſt major quadruplo illius diſtantiæ; in ellipſi minor.*

817. COROLL. III. Si in æquatione parametri $p = 4c \mp \frac{2cc}{a}$, ſubſtituatur pro cc ejus valor $\pm 2ac + bb$, fit $p = \frac{2bb}{a}$, vel $p = \frac{4bb}{2a}$; ex qua æquatione habetur analogia $2a : 2b :: 2b : p$; hoc eſt, *parameter axis principalis eſt tertia continua proportionalis ad axem majorem & minorem.*

818. PROBLEMA IV. *Invenire æquationem, quæ exprimat rationem parametri axis principalis ad functiones abſciſſarum & ordinatarum ſectionis conicæ.*

RESOLUTIO. Quia $p = \frac{2bb}{a}$, eſt $\frac{1}{2}ap = bb$; quare ſubſtituto hoc valore in æquatione generali $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$, obtinetur $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$.

819. COROLL. I. Quoniam in parabola eſt $a = \infty$, habetur $yy = px$, eadem nempe æquatio cum ſuperiore (812).

820. COROLL. II. Æquatio generalis $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$, vel $2ayy = 2apx \mp pxx$, reſolvitur in hanc analogiam $yy : 2ax \mp xx :: p : 2a$. Eſt autem $2ax \mp xx = (2a \mp x) \times x = s\,P \times PS$; *igitur univerſim quadrata ordinatarum ad axem principalem ellipſeos, vel hyperbolæ, ſunt ad facta ex abſciſſis correſpondentibus, ut parameter ad axem principalem.* Et quia in eadem ſectione conica ratio parametri ad ſuum axem eſt conſtans, generaliter *ſunt quadrata ordinatarum inter ſe, ut facta earundem abſciſſarum.*

Si etiam æquatio ad axes $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$ solvatur in analogiam, habetur $yy : 2ax \mp xx :: bb : aa$, hoc eſt, *in ellipſi & hyperbola ſunt quadrata ordinatarum ad axem principalem, ad facta ex abſciſſis correſpondentibus, ut quadratum ſemiaxis minoris ad quadratum ſemiaxis majoris.*

821. Coroll. III. Quia in parabola parameter p eſt quantitas conſtans, ratio yy ad x conſtans quoque eſt; igitur *in parabola quadrata ordinatarum ſunt inter ſe, ut earum abſciſſæ.*

822. Problema V. *Invenire analyticam expreſſionem ſubperpendicularis, ſeu ſubnormalis* PN (Fig. 76 & 77).

Resolutio. Quia Fm (808) eſt ad MT perpendicularis, eſt quoque normali MN parallela, & triangula fMN, fmF ſimilia ſunt. Unde eſt $fm\,(2a) : f\mathrm{F}\,(2a \mp 2c) :: \mathrm{M}m$ (vel FM) $(x + c \mp \frac{cx}{a}) : \mathrm{FN} = x + c \mp \frac{cc}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$. Eſt autem $\mathrm{PN} = \mathrm{FN} - \mathrm{FP}$, & $\mathrm{FP} = x - c$. Igitur $\mathrm{PN} = 2c \mp \frac{cc}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$; & ſubſtitutis $\pm 2ac \mp \frac{1}{2}ap$ pro cc (814), factaque reductione, obtinetur $\mathrm{PN} = \frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}$; & ſi denique $\frac{2bb}{a}$ adhibeatur loco p (817); habetur $\mathrm{PN} = \frac{bb}{a} \mp \frac{bbx}{aa}$.

823. Coroll. I. *In parabola ſubnormalis æquatur ſemiparametro, ideoque eſt conſtans;* nam ob $a = \infty$, fit $\mathrm{PN} = \frac{1}{2}p = \mathrm{FA}$ (Fig. 78).

824. Coroll. II. *In ſectionibus conicis eſt ſubnormalis parabolæ æqualis ſemiparametro; in ellipſi minor; in hyperbola major.*

825. Problema VI. *Invenire æquationem ad ſubtangentem* PT.

Resolutio. In triangulo rectangulo MNT habetur (561) $\div\, \mathrm{PN}.\ \mathrm{PM}.\ \mathrm{PT}$; conſequenter $\mathrm{PT} = \frac{\mathrm{PM}^2}{\mathrm{PN}}$. Quod ſi itaque

taque $px \mp \frac{pxx}{2a}$ dividatur per $\frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}$, fiatque debita reductio, obtinetur $PT = \frac{2ax \mp xx}{a \mp x}$.

826. COROLL. I. In parabola est $PT = 2x$, ob $a = \infty$; fit enim $PT = \frac{2\infty x \mp xx}{\infty \mp x} = \frac{2\infty x}{\infty} = 2x$.

827. COROLL. II. *Subtangens sectionis conicæ est in parabola duplæ abscissæ æqualis; in ellipsi major; in hyperbola minor.* Nam si solvatur æquatio in analogiam, pro ellipsi est $PT : 2a - x :: x : a - x$, & ratione secunda multiplicata per 2, fit $PT : 2a - x :: 2x : 2a - 2x$; est autem $2a - x > 2a - 2x$; igitur etiam (306) est PT major quam $2x$. In hyperbola est $PA : 2a + x :: x : a + x$, seu $PT : 2a + x :: 2x : 2a + 2x$; atqui $2a + x < 2a + 2x$; ergo etiam PT minor est, quam $2x$.

828 COROLL. III. *Apparet itaque, esse in parabola* ST *æqualem abscissæ; in ellipsi abscissa majorem; minorem in hyperbola.*

829. OBSERVA. Cum rami parabolæ & hyperbolæ in infinitum excurrant, potest in iis fieri $x = \infty$; quoniam itaque in parabola $x = ST$; etiam ST fit infinita. Verum posita in hyperbola $x = \infty$, æquatio $ST = \frac{ax}{a \mp x}$, reducitur ad $ST = a$. Ex quo colligitur 1mo: *puncta concursus* T *omnium tangentium hyperbolæ cum axe principali, semper cadere intra verticem & centrum. 2do: per centrum hyperbolæ duci posse ex utraque axis parte rectam, quæ ramum utrumque hyperbolæ in distantia infinita tangat.*

830. COROLL. IV. Quia $CP \pm PT = CT$; est $CT = \frac{aa}{a \mp x}$; hæc æquatio suppeditat analogiam $a \mp x : a :: a : CT$. Ergo CP, CS, CT sunt in proportione continua, ex qua facile est reperire in axe principali punctum T, per quod transire debet tangens sectionis in puncto dato M.

831. PROBLEMA VII. *Invenire æquationem ad perpendicularem* SB *ex vertice* S *usque ad tangentem TM.*

RESOLUTIO. Ob triangula TPM, TSB similia, est TP $\left(\frac{2ax \mp xx}{a \mp x}\right)$: TS $\left(\frac{ax}{a \mp x}\right)$ :: PM : SB; sive, quia denominator in prima ratione $a \mp x$ est idem, $2ax \mp xx : ax ::$ PM : SB; seu denique (296) $2a \mp x : a ::$ PM : SB; & singulis terminis ad quadratum elevatis, substitutoque pro PM^2 ejus valore (812), $4aa \mp 4ax + xx : aa :: \frac{2abbx \mp bbxx}{aa} : SB^2$. Igitur $SB^2 = \frac{2abbx \mp bbxx}{4aa \mp 4ax + xx}$, vel sumpto $\frac{1}{2}ap$ pro bb (820), $SB^2 = \frac{aapx \mp \frac{1}{2}apxx}{4aa \mp 4ax + xx}$.

832. COROLL. I. In parabola est SB $= \frac{1}{2}$ PM $= \frac{1}{2}y$; nam quia $a = \infty$, habetur $SB^2 = \frac{\infty^2 px}{4\infty^2} = \frac{1}{4}px = \frac{1}{4}yy$; & SB $= \frac{1}{2}y$.

833. COROLL. II. Posita in hyperbola $x = \infty$, formula prior pro SB^2 reducitur ad hanc $SB^2 = \frac{bb\infty^2}{\infty^2} = $: consequenter SB $= b$. Unde si fiant SB, & Sβ (Fig. 74) æquales axi dimidio conjugato, ducanturque per centrum C rectæ $\mathfrak{b}\beta$, bB, erunt hæ hyperbolarum MSm, O$s$$o$ asymptoti.

834. PROBLEMA VIII. *Invenire æquationem Normalis* NM.

RESOLUTIO. In triangulo NPM habetur $NM^2 = PM^2 + PN^2$. Igitur $NM^2 = \frac{2a^3bbx \mp aabbxx + aab^4 \mp 2ab^4x + b^4xx}{a^4}$; si in hac æquatione adhibeatur valor parametri, est $NM^2 = \frac{4aapx \mp 2apxx + aapp \mp 2appx + ppxx}{4aa}$.

835. COROLL. I. In parabola, in qua $a = \infty$, habetur $NM^2 = px + \frac{1}{4}pp$.

836. COROLL. II. Posita $x = 0$ in formula secunda, ea redu-

reducitur ad $NM^2 = \frac{1}{4}pp$, ideoque $NM = \frac{1}{2}p$. Quod si ponatur $x = a$ in formula prima, habetur pro ellipsi $MN = b$. Quod ostendit, 1mo, *in omni sectione conica normalem saltem æquari semiparametro, sive ordinatæ per focum transeunti.* Etenim sumpto M adeo vicino vertici S, ut abscissa correspondens ordinatæ MP fiat infinite parva, seu evanescat, erit normalis $= \frac{1}{2}p$. 2do, *in ellipsi normalem non posse esse majorem semiaxe minore.*

837. PROBLEMA IX. *Invenire æquationem rectæ SN, seu distantiæ verticis S a puncto N, in quo normalis occurrit axi.*

RESOLUTIO. $SN = SP + PN = \dfrac{abb \mp bbx + aax}{aa} = \dfrac{ap \mp px + 2ax}{2a}$, & in parabola $SN = \frac{1}{2}p + x$.

838. COROLL. Posita $x = 0$, fit $SN = \frac{1}{2}p$; & quia a & p sunt positivæ & constantes in formulis pro parabola, & hyperbola, patet, crescentibus x, crescere etiam in his duabus sectionibus SN. Hinc porro evidens fit, *normalem semper cadere ultra focum respectu verticis, & nunquam intra verticem & focum viciniorem.*

839. PROBLEMA X. *Invenire expressionem analyticam tangentis* TM.

RESOLUTIO. $PM^2 + PT^2 = TM^2$; igitur $TM^2 = \dfrac{2abbx \mp bbxx}{aa} + \dfrac{4aaxx \mp 4ax^3 + x^4}{aa \mp 2ax + xx}$; sive $TM^2 = px \mp \dfrac{pxx}{2a} + \dfrac{4aaxx \mp 4ax^3 + x^4}{aa \mp 2ax + xx}$. Et in parabola $TM^2 = px + 4xx = 4AS \times SP + 4SP^2$.

840. PROBLEMA XI. *Invenire æquationem ellipseos & hyperbolæ ad axes relatarum, abscissis a centro computatis.* (Fig. 76. & 77).

RESOLUTIO. Servatis omnibus denominationibus, ut in prioribus problematis, præterquam quod CP ponenda sit $= x$, atque hinc SP abscissa prior $\pm a \mp x$, & $sP = a + x$, fit (820) $yy : \pm aa \mp xx :: bb : aa :: p : 2a$. Erit itaque æquatio sectionum ambarum, si referantur ad axes, $yy = \pm bb \mp \dfrac{bbxx}{aa}$; & si eædem referantur ad parametrum, $yy = \pm \frac{1}{2}ap \mp \dfrac{pxx}{2a}$.

841.

841. Coroll. I. Ad ellipsin. Quia ordinata MH ad axem minorem ellipseos (Fig. 76) $= CP = x$, & $CH = PM = y$, habentur abscissæ $LH = b - y$, & $Hl = b + y$: ideoque $LH \times Hl = bb - yy$. Jam vero æquatio $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ resolvitur in analogiam sequentem $xx : bb - yy :: aa : bb$. Sunt igitur *quadrata ordinatarum ad axem minorem, ad facta ex abscissis correspondentibus; ut est quadratum axis majoris ad quadratum axis minoris*. Hinc autem si fiat $\div\, 2b \,.\, 2a \,.\, q$, sive $q = \frac{2aa}{b}$, accipiaturque q pro parametro axis minoris, substituta ea in præcedente analogia, erit $xx : bb - yy :: q : 2b$; hoc est, quadrata ordinatarum ad axem minorem, sunt ad facta ex suis abscissis, ut parameter axis minoris ad eundem axem minorem. Et universim *quadrata ordinatarum ad axem minorem sunt inter se, ut facta ex earum abscissis.*

842. Coroll. II. *Ordinatæ ad axem minorem ellipseos easdem omnino proprietates habent, quas ordinatæ ad axem majorem.*

843. Coroll. III. Si vel super majore axe ellipseos Ss, vel super minore, tanquam diametro describatur circulus $SNsQ$ (Fig. 81), ducanturque NP, np ordinatæ ad eam diametrum, earum quadrata sunt inter se (768) ut facta abscissarum $sP \times PS$, & $sp \times pS$. Sunt autem etiam quadrata ordinatarum MP, mp in eadem ratione; igitur quadrata ordinatarum circuli sunt ut quadrata ordinatarum correspondentium ellipseos, consequenter etiam ipsæ ordinatæ circuli sunt inter se, ut ordinatæ ellipseos, sive eæ ordinatæ sunt ut OC, sive CS, ad LC, hoc est, *ut axis, super quo circulus descriptus est, ad axem alterum.*

844. Observa I. Ratio ordinatarum ad axem secundum hyperbolæ nequit esse eadem. Nam si æquatio ad hyperbolam $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$ solvatur in analogiam, fit $xx : yy + bb :: aa : bb$, ubi terminus secundus $yy + bb$ est summa quadratorum rectarum CH & CL (Fig. 77) non autem factum ex abscissis HL & Hl, quod ob $HL = y - b$, & $Hl = y + b$, foret $yy - bb$. Verum independenter ab hac analogia habetur formu-

formula generalis $xx = aa \mp \frac{aayy}{bb}$ pro ellipsi æque, ac hyperbola ad axem secundum relatis, & abscissis a centro computatis, posita ordinata $= x$, & abscissa $= y$.

845. II. Ad normam hujus solutionis potest etiam inveniri æquatio abscissis a foco computatis, imo a puncto quovis in axe accepto.

846. COROLL. IV. Si ex æquationibus præsentis problematis instituatur calculus triangulorum, quæ Problematis V, VI, VII, VIII, IX, & X adhibita sunt, reperientur sequentes formulæ; $PN = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}$; $PT = \mp \frac{aa \mp xx}{x}$; $CT = \frac{aa}{x}$; $ST = \pm \frac{aa \mp ax}{x}$; $SB^2 = \frac{\pm a^4bb \mp 2a^3bbx \pm 2abbx^3 \mp bbx^4}{a^4 - 2aaxx + x^4}$, seu $\frac{\pm a^5p \mp 2a^4px \pm 2aapx^3 \mp apx^4}{2a^4 - 4aaxx + 2x^4}$; $NM^2 = \frac{\pm a^4bb \mp aabbxx + b^4xx}{a^4} = \frac{\pm 2a^3p \mp 2apxx + ppxx}{4aa}$; $SN = \frac{\pm a^3 \mp aax + bbx}{aa} = \frac{\pm 2aa \mp 2ax + px}{2a}$; $MT^2 = \frac{a^6 - 2a^4xx + aax^4 \pm aabbxx \mp bbx^4}{aaxx}$; vel $MT^2 = \frac{2a^5 - 4a^3xx + 2ax^4 \pm aapxx \mp px^4}{2axx}$.

847. COROLL. V. Quia c in nulla formula præcedentium problematum reperitur, sequitur, quod eædem formulæ æque applicari possint axi secundo ellipseos, & hyperbolæ, atque proprietates inde pendentes exprimant, modo mutationes debitæ in literis observentur.

848. COROLL. VI. Cum magnitudo axis secundi Ll hyperbolarum oppositarum MSm, Oso (Fig. 74) determinetur translata CF, vel Cf ex puncto S in L & l; & asymptotorum situs (833), si fiant SB, $S\beta$ æquales rectis CL, vel Cl, consequens est, ut sumptis $C\Phi$, $C\varphi$ æqualibus rectis LS, ls, ductæ

b β, B $\mathfrak{C}$ transeant per L & l, sintque L b, L β; item l B, l $\mathfrak{C}$ æquales rectæ C s vel CS. Unde punctis Φ, φ tanquam focis, & axe principali L l, describi possunt hyperbolæ oppositæ dL D, N $l n$, quarum axis secundus sit S s, asymptoti vero eædem B b, β $\mathfrak{C}$. Hæ duæ hyperbolæ dicuntur *conjugatæ ad priores* MS m, O s o, & vicissim MS m, O s o sunt illarum conjugatæ.

849. Manifestum est *omnes æquationes, formulas, & proprietates hyperbolarum* MSm, Oso, *competere etiam hyperbolis conjugatis, mutatis nempe necessariis denominationibus;* uti L l sumpta pro axe principali, & S s pro secundo, &c.

850. Pariter liquet, *octo ramos quatuor hyperbolarum conjugatarum, sese illic alterum alteri jungere, quin se secent, ubi asymptoti eosdem tangunt; atque hac ratione efformari figuram ad quatuor concursuum puncta terminatam, quæ a centro infinite distant.* Est hæc figura polygonum symmetricum constans angulis gibbis infinitis, & infinite parum excedentibus duos rectos; quatuor vero angulis procurrentibus infinite acutis; ita, ut spatium intra quatuor hasce hyperbolas comprehensum eum in modum spectari possit, quo consideratur area elliptica. Ac propterea deinceps ita loquemur de hoc spatio, ac si unica curva terminaretur.

Proprietates Sectionum Conicarum ad diametros relatarum.

851. *Diameter* sectionis conicæ est quævis recta per centrum transiens; ostendemus enim, omnibus diametris commune esse, quod duplas suas ordinatas secent bifariam.

852. Magnitudo diametri determinatur a duobus punctis, in quibus utrinque sectioni occurrit, dicunturque *origo* diametri. Sic OM, ND (Fig. 74 & 75) sunt binæ diametri determinatæ punctis O, M; & N, D, in quibus est earum origo.

853. Hinc *diameter parabolæ est recta indefinita ex quovis ejus puncto, in quo diametri origo sumitur, ad axem parallela.* Centrum enim parabolæ a vertice infinite distat. Talis diameter est M f (Fig. 78).

854. *Diameter conjugata alterius diametri* est, quæ est parallela ordinatis alterius, vel tangenti per alterius originem ductæ. V. g. ND (Fig. 74 & 75) est diameter conjugata ad diame-

diametrum M O, quia N D est parallela tangenti per M transeunti. Vicissim est M Θ diameter conjugata ad diametrum N D.

855. Sequitur itaque, *in parabola non esse diametros conjugatas.*

856. THEOREMA I. *Quævis diameter* ND (Fig. 74 & 75) *in centro* C *bifariam dividitur.*

DEMONSTRATIO. Ducatur per N ad alterutrum axem ordinata NQ, & facta CE = CQ, erigatur ad eundem axem perpendicularis ED; dico, hanc perpendicularem occurrere diametro ND in puncto D, quod sit in sectione. Nam ex constructione triangula CQN, CED æqualia sunt, adeoque CD = CN, & DE = NQ. Atqui (793) ordinatæ æquidistantes a centro sunt æquales; cum igitur NQ sit ordinata, etiam ei æqualis DE erit ordinata; adeoque D est in sectione.

857. THEOREMA II. *Si ex extremis* M, N *duarum diametrorum conjugatarum ducantur* MP, NQ *ordinatæ ad axem principalem* Ss, *erit quadratum* CQ^2, *abscissæ interceptæ a centro* C, *& una ordinata, æquale facto ex abscissis respondentibus alteri ordinatæ.*

DEMONSTRATIO. Servatis denominationibus, ut in Problemate XI, & posita præterea $CQ = u$, habetur (Fig. 75) $SQ = a - u$, & $sQ = a + u$. In ellipsi est (820) $sP \times PS$ $(aa - xx)$: $SQ \times Qs$ $(aa - uu)$ :: $PM^2 : NQ^2$; & in hyperbola (844) $sP \times PS$ $(-aa + xx)$: $CS^2 + CQ^2$ $(aa + uu)$: : $PM^2 : NQ^2$. Igitur $\pm\, aa \mp xx : aa \mp uu : : PM^2 : NQ^2$. Porro ob triangula TPM, CNQ similia, est quoque $PM^2 : NQ^2 : : TP^2 \left(\frac{(\pm\, aa \mp xx)^2}{xx}\right) : CQ^2$ (uu); unde facile deducetur $uu = \pm\, aa \mp xx$, sive $CQ^2 = sP \times PS$.

858. COROLL. I. In ellipsi nulla ordinata cadere potest ultra verticem respectu centri; itaque semper est CE^2, vel $CQ^2 = SP \times Ps$; & $CP^2 = sQ \times QS$. Verum hæc postrema æqualitas non habet locum in hyperbola, in qua $CP^2 = CS^2 + CQ^2$, ob $xx = aa + uu$.

859. COROLL. II. In ellipsi est $aa : bb : : sQ \times QS$ (vel CP^2) (xx) : $NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Dein in triangulis CPM, CNQ, habetur $CM^2 = CP^2 + PM^2$; igitur $CM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{}$

$\frac{bbxx}{aa}$; & $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$; adeoque $CN^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$; quare $CM^2 + CN^2 = bb + aa$; hoc est, *summa quadratorum duarum diametrorum conjugatarum quarumvis, æqualis est summæ quadratorum duorum axium, consequenter etiam summæ quadratorum aliarum quarumlibet diametrorum conjugatarum*; sive, quod idem est, *in ellipsi summa quadratorum duarum diametrorum conjugatarum quarumcunque est constans.*

860. Coroll. III. In hyperbola habetur $aa : bb :: CS^2 + CQ^2$ (sive CP^2) $(xx) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$; & $CN^2 = CP^2 + PM^2$; quare $CM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa}$; & $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$. Unde $CN^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$; & $CM^2 - CM^2 = bb - aa$. Hoc est, *differentia quadratorum duarum diametrorum conjugatarum in hyperbola est constans.*

861. Theorema III. *Quadratum ordinatæ IH intra sectionem ad diametrum quamvis MO, est ad factum ex abscissis correspondentibus* $MH \times HO$, *ut est quadratum semidiametri conjugatæ* CN^2, *ad quadratum semidiametri alterius* CM^2, *ad quam HI ordinatur*; sive $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$.

Demonstratio. Ducta ad axem Ss ordinata IG, & ex H perpendicularibus HR, HK, fiat GK, sive $HR = r$, $CK = t$, $CM = d$; erit $GS = r \pm a \mp t$, & $sG = a \mp r + t$. Jam quia triangula CPM, CHK similia sunt, est imprimis CP $(x) : CM\ (d) :: CK\ (t) : CH = \frac{dt}{x}$; igitur $MH = \pm d \mp \frac{dt}{x}$; & $HO = d + \frac{dt}{x}$; adeoque $MH \times HO = \pm dd \mp \frac{ddtt}{xx}$. Deinde est $CP\ (x) : PM\ (y) :: CK\ (t) : KH$ (vel RG) =

$= \frac{ty}{x}$. Et ob triangulorum TPM, HIR ſimilitudinem, pariter habetur TP $\left(\frac{\pm aa \mp xx}{x}\right)$: PM (y) :: HR (r) : RI $= \frac{rxy}{\pm aa \mp x}$. Ergo $IG^2 = (IR + RG)^2 = \frac{rrxxyy}{(\pm aa \mp xx)^2} + \frac{2rtyy}{\pm aa \mp xx} + \frac{ttyy}{xx}$. Eſt autem (840) $sP \times PS\,(\pm aa \mp xx) : sG \times GS\,(2rt \pm aa \mp rr \mp tt) :: PM^2\,(yy) : IG^2$; ſi ex hac analogia repertus valor quadrati IG^2 comparetur cum valore ejusdem ſuperius invento; habetur æquatio $\frac{2rtyy \pm aayy \mp rryy \mp ttyy}{\pm aa \mp xx} = \frac{rrxxyy}{(\pm aa \mp xx)^2} + \frac{2rtyy}{\pm aa \mp xx} + \frac{ttyy}{xx}$, ex qua deducetur HR^2, ſive $rr = aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx}$. Hoc poſito, dico eſſe $MH \times HO \left(\pm dd \mp \frac{ddtt}{xx}\right) : CM^2\,(dd) :: HR^2 \left(aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx}\right) : CQ^2\,(\pm aa \mp xx)$; nam facta extremorum, & mediorum ſunt æqualia. Denique in triangulis ſimilibus HIR, CNQ, habetur $HR^2 : CQ^2 :: IH^2 : CN^2$; hinc $MH \times HO : CM^2 :: IH^2 : CN^2$, vel $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$.

862. COROLL. Quoniam ordinatæ ad quamvis diametrum ellipſeos nequeunt cadere extra ſectionem, hoc theorema de quacunque diametro ellipſeos verum eſt. Et univerſim apparet, *proprietates axium omnium ſectionum conicarum non pendentes a focis convenire etiam diametris conjugatis*. Illud ſolum eſt diſcriminis, quod ordinatæ ad axes ſint iisdem perpendiculares, ordinatæ autem ad diametros ſint obliquæ ad easdem. Itaque ducta ex I ordinata Ih ad diametrum DN, prorſus (841) ut ſuperius, oſtendetur, eſſe in ellipſi $Ih^2 : Dh \times hN :: CM^2 : CD^2$, & in hyperbola (844) $Ih^2 : Ch^2 + CD^2 :: CM^2 : CD^2$, adeo, ut eædem æquationes adhiberi poſſint pro diametris, quæ adhi-

adhibentur pro axibus conjugatis, eruntque earum parametri tertiæ proportionales ad easdem, prorſus ut N 817. Verum parameter alicujus diametri parabolæ, v. g. Mf (Fig. 78) ſemper eſt quadruplum diſtantiæ Mm, originis diametri M, a directrice Am, vel a foco parabolæ. Nam (839) $MT^2 = 4AS \times SP + 4SP^2$; quod ſi jam per verticem S ducatur SO ordinata ad diametrum Mf, erit $SO = MT$, & ejus abſciſſa $MO = ST = SP$ (828). Sed quoniam ordinatarum ad diametros ſunt eædem proprietates, ac ordinatarum ad axem, eſt $SO^2 = MO \times p$ (819). Porro $4AS \times SP + 4SP^2 = SP \times p$, ſeu omnibus per SP diviſis, $4AS + 4SP = p$; & $4AS + 4SP = 4AP = 4Mm = 4MF$; igitur $p = 4Mm = 4MF$.

863. Theorema IV. *Si ab extremo* M *diametri cujusvis* CM (Fig. 79. & 80) *demittatur ad ejus conjugatam perpendicularis* MR, *eſt* MR : CL :: CS : CD.

Demonstratio. Per NN. 859. & 860 eſt $CD^2 \pm CM^2 = bb \pm aa$. Eſt vero $CM^2 = xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$; ergo $CD^2 = \frac{bbxx \mp aaxx \pm a^4}{aa}$. Demittatur e centro C perpendicularis ad tangentem CI, & producatur CL, donec tangenti occurrat in X; triangula ſimilia CIX, MNP ſuppeditabunt hanc analogiam CI (vel MR) : CX :: MP (vel CV) : NM; & hinc $MR \times NM = CX \times CV$. Atqui (830, & 847) $CX \times CV = CL^2$: ergo etiam $MR \times NM = CL^2$; conſequenter $NM^2 \left(\frac{b^4xx \pm a^4bb \mp aabbxx}{a^4}\right) : CL^2\ (bb) :: CL^2\ (bb)$:

$$MR^2 = \frac{a^4bb}{bbxx \pm a^4 \mp aaxx}.$$

Quare $MR^2 \times CD^2 = aabb = CS^2 \times CL^2$, atque ideo $MR^2 : CL^2 :: CS^2 : CD^2$, & MR : CL :: CS : CD.

864. Coroll. Area parallelogrammi ſuper ſemidiametris conjugatis CM, CD deſcripti æqualis eſt rectangulo ſuper ſemiaxibus conjugatis CS, CL; illius enim menſura eſt $CD \times MR$; & hujus $CS \times CL$. Idem eſt de diametris & axibus conjugatis integris. Igitur *area parallelogrammi ſuper Diametris conjugatis quibuscunque conſtructi, æqualis eſt areæ rectanguli,* cujus

cujus latera sint axes, adeoque etiam æqualis alterius parallelogrammi areæ, cujus latera sint aliæ quævis diametri conjugatæ.

Proprietates hyperbolæ ad asymptotos relatæ.

865. Dum asymptotos $C\beta$, bB, determinavimus (Fig. 74) sumpsimus SB, Sβ æquales semiaxi secundo CL (833): hinc autem sequitur, *angulum asymptotorum* β CB *debere esse acutum, rectum, vel obtusum, ut semiaxis primus* CS *fuerit major, æqualis, vel minor, quam semiaxis conjugatus* CL. Nam angulus SCB, illius dimidius, est minor, æqualis, vel major 45°, prout SB est minor, æqualis, vel major, quam CS.

866. Cum diagonales SL, Cβ rectanguli CLβS, cujus latera sunt semiaxes, sint inter se æquales, atque se mutuo in Y bisecent, est SY $=$ CY, & CY^2 vel $SY^2 = \frac{1}{4}CS^2 + \frac{1}{4}CL^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$.

867. Si angulus asymptotorum sit rectus, hyperbola dicitur æquilatera. Unde patet 1*mo*, *parametrum hyperbolæ æquilateræ esse æqualem utrivis axi, qui tum inter se æquantur.* 2*do*, in eadem hypothesi abscissis a vertice computatis, *æquationem hyperbolæ ad axem relatæ & æquilateræ esse* $yy = 2ax + xx$; & abscissis a centro computatis, $yy = -aa + xx$, ob $a = b$, & $p = 2a = 2b$, qui valores nempe substituendi sunt in æquationibus hyperbolæ ad axes relatæ. 3*tio*, cum æquationes ad circulum sint $yy = 2ax - xx$, & $yy = aa - xx$, prout abscissæ vel a vertice, vel a centro computantur, *circulum esse id respectu hyperbolæ æquilateræ, quod est ellipsis respectu alterius hyperbolæ axium inæqualium.*

868. THEOREMA V. *Si ordinata ad axem principalem quævis* PM *producatur utrinque, donec occurrat asymptotis in* A & a, *erit* AM $\times$ Ma $= CL^2$, *sive* AM : CL :: CL : Ma.

DEMONSTRATIO. Ex æquatione $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ (840) habetur bb, sive $CL^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = \left(\frac{bx}{a} - y\right) \times \left(\frac{bx}{a} + y\right)$. Quia autem triangula CSL, CAP similia sunt, est CS : CL :: CP : PA $= \frac{bx}{a}$; igitur AM $= \frac{bx}{a} - y$, & Ma

$Ma = \frac{bx}{a} + y$; adeoque $AM \times Ma = CL^2$.

869. Coroll. Eodem modo eſt $IV \times Iu = CL^2 = AM \times Ma = am \times mA = iu \times iV$.

870 Theorema VI. *Si ex puncto quovis hyperbolæ M ducatur uſque ad aſymptotum proximam CA recta MR parallela aſymptoto alteri CB, erit* $MR \times RC = CY^2 = SY^2$; *ſive* $MR : SY :: SY : RC$.

Demonstratio. Ducatur MX ad AC parallela, ut ſit $MX = RC$. Ob triangula MAR, SβY ſimilia, eſt $MR : SY :: MA : S\beta$ (vel CL). Eſt autem (868) $MA : CL :: CL : Ma$; & quia triangula SβY, MaX ſimilia ſunt, $S\beta : Ma :: \beta Y$ (vel SY) $: MX$ (vel RC); igitur etiam $MR : SY :: SY : RC$.

871. Coroll. I. Quævis recta, velut MR e puncto quolibet hyperbolæ ad aſymptotum CA ducta, & parallela alteri aſymptoto, conſiderari poteſt inſtar ordinatæ, cujus abſciſſa ſit pars aſymptoti CA. Cum enim aſymptotus CB ſit tangens hyperbolæ, ejus poſitio determinat ſitum ordinatarum (772), & origo abſciſſarum erit C, velut CR eſt abſciſſa ordinatæ MR. Quod ſi itaque ponatur $CR = x$, $MR = y$, CY vel $SY = d$. habebitur $xy = dd$, vel $xy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$, *æquatio hyperbolæ ad aſymptotos relatæ.*

872. Coroll. II. Si producatur MR uſque ad hyperbolam conjugatam dLD, fiet $DR = RM$. Nam $DR \times CR = CY^2 = MR \times CR$.

873. Theorema VII. *Si ducatur recta quævis FE per hyperbolam* (Fig. 85), *partes EG, FI inter aſymptotos & curvam interceptæ, ſunt inter ſe æquales.*

Demonstratio. Per puncta G & I ducantur ad axem perpendiculares DT, BQ; erit (869) $DR \times RT$, ſeu $GT \times GD = BI \times IQ$; igitur $IQ : GT :: GD : BI$, & quia DT, BQ ſunt parallelæ, triangula GTE, EIQ ſunt ſimilia, uti etiam FBI, FGD; quare habetur $GD : BI :: GF : IF$. Et $IQ : TG :: IE : GE$. Ergo $GF : IF :: IE : GE$; & $GF - IF : IF :: IE - EG : GE$; hoc eſt $IG : IF :: IG : GE$, conſequenter $IF = GE$.

874. Coroll. I. Deducitur hinc methodus deſcribendi hyperbolam intra duas aſymptotos datas, quæ tranſeat per punctum datum I. Etenim ſi per hoc punctum I ducantur quotcun-

que rectæ A P, B Q, F E &c. fiantque $PH = AI$, $QK = BI$, $GE = FI$ &c. erunt puncta H, K, G &c. in hyperbola. Quod si dein unum ex his inventis assumatur loco dati I, ejus ope alia methodo eadem reperiri possunt. *

875. COROLL. II. Si sumatur aliquod punctum I extra, vel intra hyperbolam jam descriptam RSH, poterit describi alia intra easdem asymptotos, quæ cum priore RSH non nisi in distantia infinita concurrat.

876. COROLL. III. *Tangens hyperbolæ se utrinque ad asymptotos terminata in puncto contactus* t *bifariam dividitur.* Etenim si recta F E secet hyperbolam in punctis infinite propinquis, puncta G & I congruent cum puncto contactus, ideoque non minus erit $FI = GE$.

877. COROLL. IV. *Tangens hyperbolæ* e g *ad asymptotos terminata* (Fig. 74) *æqualis est diametro* DN *conjugatæ diametri* M O *per punctum contactus* M *transeuntis*, quod nempe in parallelogrammo D M g C sit $Mg = DC = Me$. Etenim ducta ex M recta M D, asymptoto CB parallela, erit (872) $MR = RD$; & ob triangula eMR, eCg similia, est $eR = RC$. Triangula ergo eRM, DRC inter se æqualia sunt (508); & hinc D C, & eM æquales & parallelæ. Igitur extremitas D rectæ M D cadit in hyperbolæ D L d punctum illud, per quod diameter DN, conjugata diametri M O, transit.

878. THEOREMA VIII. *Si e duobus punctis quibuscunque hyperbolæ* I & R (Fig. 85) *ducantur parallelæ* I A, R X, & I E, R Y, *binæ binis, quarum priores terminentur ad asymptotum vicinam, posteriores ad alteram; erit* $IA \times IE = RX \times RY$.

DE-

---

* *Quod si non detur punctum perimetri, sed focus hyperbolæ* F *(qui necessario est in recta angulum asymptotorum bisecante), describatur e centro* C *hyperbolæ (seu asymptotorum intersectione), radio æquali distantiæ foci ab eodem centro, arcus occurrens asymptoto in* G (Fig. 98); *e puncto occursus demittatur in axem jam positione datum perpendiculum* GS, *quod verticem principalem determinabit* (813, & 833). *Habito vertice (puncto nempe perimetri) cetera fiant methodo præscripta.*

DEMONSTRATIO. Ductis per I & R perpendicularibus ad axem, & utrinque ad aſymptotos terminatis BQ, DT, habentur triangula ſimilia BIA, DRX; item IQE, TRY: quare eſt IB : IA :: DR : RX; & IQ : IE :: RT : RY; & hinc compoſitis rationibus IB×IQ : IA×IE :: DR×RT : RX×RY. Eſt vero BI×IQ = DR×RT (869); ergo etiam IA×IE = RX×RY.

879. COROLL. I. Ductis per hyperbolam duabus parallelis quibuscunque FE, ZY, utrinque ad aſymptotos terminatis, ſemper habetur FI×IE = ZR×RY.

880. COROLL. II. Si altera e parallelis hyperbolam tangat in t, fiet ft^2 = FI×IE. &c.

Varia Problemata de Sectionibus Conicis.

881. PROBLEMA I. *Datæ portionis ſectionis conicæ determinare ſpeciem, & poſitionem axium.*

RESOLUTIO. Ducantur binæ quævis parallelæ, terminatæ utrinque ad ſectionem, & per utriuſque punctum biſectionis ducatur recta, quæ erit una è diametris. Tum ducantur rurſus aliæ duæ parallelæ ad priores obliquæ, & per puncta biſectionis nova diameter. Si hæc ad priorem diametrum fuerit parallela, ſectio eſt parabola; ſi eam ſecuerit extra curvam, vel ex parte convexitatis, ſectio eſt hyperbola; ſi tandem diametri ſibi occurrant intra curvam, vel ex parte cavitatis, ſectio eſt ellipſis; & punctum interſectionis diametrorum ſemper eſt centrum. Quare ſi e centro hunc in modum reperto deſcribatur circulus, qui in duobus punctis occurrat portioni datæ ſectionis, recta ex centro per punctum medium inter illa, in quibus circulus ſectioni conicæ occurrit, ducta, erit axis. Si ſectio ſit parabola, ducatur ad diametrum quamlibet perpendicularis, & utrinque ad curvam terminata; biſecetur, & ad punctum biſectionis ducta perpendicularis erit axis parabolæ. *

882.

* *Hæc reſolutio ſupponit tantam ſectionis portionem dari, ut vel circulus, qui deſcribitur reperto centro, vel perpendicularis ad diametrum, ſi ſectio ſit parabola, poſſit eidem occurrere ex altera axis inveniendi parte, adeoque ſupponit in ramo dato conti-*

882. PROBLEMA II. *Per data tria puncta* M, m, & μ, *non in directum jacentia, circa focum datum* F (Fig. 73) *describere sectionem conicam, ejusque speciem & axes determinare.*

RESOLUTIO. Ductis Mm, $m\mu$, fiat $FM : Fm :: ME : mE$; & $Fm : F\mu :: mH : \mu H$; sive, quod idem est, accipiatur $mE = \frac{Fm \times Mm}{Fm - FM}$, & $mH = \frac{Fm \times m\mu}{F\mu - Fm}$, & per puncta E & H hoc modo determinata agatur recta indefinita EH, quae erit sectionis directrix. Nam demissis ad eam perpendicularibus MG, mg,

---

contineri verticem axis. Quod si non sit, in parabola quidem habita semel ordinata diametri, & abscissa, facile reperiri potest parameter diametri (862), *adeoque ejusdem diametri verticis distantia a directrice, ipsaque directrix. Et cum distantia foci ab origine diametri repertae aequetur distantiae eidem, axis principalis facile innotescit ducta tangente ad verticem diametri, & ope anguli, quem haec facit cum diametro, recta usque ad focum* (806). *At si sectio sit ellipsis, habitis ordinata, & abscissa, nec non diametro quavis, ejus quoque conjugata reperitur* (861). *Hinc demisso ad conjugatam ex vertice alterius diametri perpendiculo, datur parallelogrammum super semidiametris conjugatis, aequale rectangulo ex sem axibus* (864): *praeterea cum summa quadratorum duarum semidiametrorum conjugatarum sit aequalis summae quadratorum semiaxium* (859), *ex his inveniri potest semiaxis major, calculo admodum facili. V. g. supponamus* (Fig. 80) *diametros conjugatas esse* MO, ND; MR *perpendicularem ad* ND. *Sit* $CS = x$, $CL = y$; *erit* $RM \times CD = xy$ & $CM^2 + CD^2 = x^2 + y^2$. *Hinc* $2\,CD \times RM = 2\,xy$. *Porro* (163) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2\,xy$; *adeoque* $CM^2 + CD^2 = (x+y)^2 - 2\,RM \times CD$, *sive* $CM^2 + CD^2 + 2\,RM \times CD = (x+y)^2$, & $\sqrt{CM^2 + CD^2 + 2\,RM \times CD} = x + y$. *Datur ergo summa semiaxium, & praeterea summa eorum quadratorum, sive etiam* $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, *hoc est, in triangulo quopiam rectangulo summa cathetorum una cum hypotenusa, quibus datis invenitur quaevis cathetus: igitur habebitur x, sive semiaxis major.*

Quod

mg, $\mu\gamma$, ob triangula gmE, GME similia, habetur MG : mg :: ME : mE :: FM : Fm. Similiter erit mg : $\mu\gamma$ :: mH : μH :: Fm : Fμ. Sunt igitur hæ perpendiculares inter se, ut rectæ MF, mF, μF. Quare (780) recta EH est directrix sectionis conicæ transeuntis per puncta M, m, & μ, cujus species pendet a ratione FM ad GM. Unde si per F ducatur perpendicularis FA ad directricem, ea erit axis sectionis; & si præterea fiat MG : FM :: AS : SF :: As : sF; seu si sumatur SF $= \frac{FA \times FM}{FM + GM}$; & F$s = \frac{FA \times FM}{GM - FM}$, habebuntur quoque vertices S, s axeos.

883. PROBLEMA III. *Datis duabus diametris conjugatis* MO, DN *hyperbolæ* (Fig. 74) *invenire ejus asymptotos.*

I.

Quod si jam centro reperto, radio æquali semiaxi majori fiant in tangente (quæ parallela ad diametrum conjugatam per verticem alterius duci potest) duæ intersectiones, & inde ad centrum ducantur rectæ, iisque ex puncto contactus parallelæ, quæ occurrant perpendiculis ex punctis intersectionum in tangente erectis, erunt puncta concursus foci ellipseos, quibus cum centro conjunctis habetur etiam situs axis. Constructionis demonstratio expedita est. Per N. 805 (Fig. 99) *est tam* FQ, *quam* fR *æqualis axi* Ss; & FNM, *item* fPM $= 90°$, *nec non* FN $=$ NR, fP $=$ PQ, CF $=$ Cf; *hinc* RF : NF $=$ fF : CF $= 2 : 1 =$ Rf : NC; *igitur* NC $= \frac{1}{2}$ Rf $=$ CS. *Idem est de* PC. *Quare si fuerint* NC, PC *æquales semiaxi* SC, *perpendicula* NF, Pf *ad tangentem concurrunt in focis* F & f *cum* MF, Mf, *quarum illa ad* PC, *hæc ad* NC *parallela.*
In hyperbola reperta diametro conjugata alterius (862) *ad assumptas ordinatas parallela, ex sequentibus* (883. 884) *prompta solutio datur, nempe repertis asymptotis, recta earum angulum bisecans situm axis præbet. Tum ducta tangente per diametri extremum, habetur ejus concursus cum axe, nec non ad axem demisso perpendiculo ex eodem puncto contactus, seu ordinata ad axem, habetur distantia ordinatæ a centro, sive (in* Fig. 77.) *habentur* CT, CP, *inter quas cum* CS *sit media continuo proportionalis* (830), *invenitur etiam vertex, & magnitudo semiaxis transversi* CS.

I. RESOLUTIO. Per extremum punctum M diametri primæ MO ducatur parallela eg ad ejus conjugatam ND, fiatque $Mg = Me = CD$ vel CN; erunt puncta g & e in aſymptotis.

884. II. RESOLUTIO. Recta DM extrema diametrorum jungens biſecetur in R; erit recta per centrum C & R ducta una ex aſymptotis; altera habebitur, ſi ex centro agatur ad DM parallela.

885. SCHOLIUM. E converſo *datis aſymptotis, & puncto hyperbolæ* M, *reperiuntur binæ diametri conjugatæ*, ſi ducatur recta indefinita MD, aſymptoto CB parallela, & fiat $DR = MR$, nam MD, DC erunt ſemidiametri conjugatæ. Vel vero ſi per M ducatur tangens eg ad aſymptotos terminata, & per C agatur CD parallela & æqualis rectæ Me vel Mg.

886. PROBLEMA IV. *Invenire radium curvaturæ ſectionis conicæ in quovis puncto* M (Fig. 79 & 80)

RESOLUTIO. Ductis per punctum M datum diametro MO, item ejus conjugata DN, nec non axibus Ss, Ll, ſupponatur punctum K acceptum in MO, eſſe in circumferentia circuli per tria puncta ſectionis infinite propinqua m, M, μ tranſeuntis; erit (566) $\mu H \times Hm = MH \times HK$, vel $mH^2 = MH \times HK$. Eſt autem (820) $mH^2 : MH \times HO :: CD^2 : CM^2$; igitur $MH \times HK : MH \times HO :: CD^2 : CM^2$; ſive $HK : HO :: CD^2 : CM^2$; & quoniam MH eſt infinite parva etiam reſpectu mH, habetur $MK : MO$ (ſeu $2\,CM$) $:: CD^2 : CM^2$; ergo $MK = \frac{2\,CD^2}{CM}$. Ponatur jam diameter circuli oſculatoris curvæ in m, M, μ eſſe MA, & ducatur chorda AK, erit triangulum AKM rectangulum ad K, & ſimile triangulo MCR rectangulo ad R, cum MA ſit normalis ad arcum $m\mu$, vel ejus tangentem MX, conſequenter etiam normalis ad diametrum conjugatam ND. Eſt itaq; $MR : MC :: MK \left(\text{vel } \frac{2\,CD^2}{CM}\right) : MA = \frac{2\,CD^2}{MR}$; & hinc $\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR}$ hoc eſt I° *radius curvaturæ ſectionis conicæ in quovis puncto dato* M *eſt æqualis quadrato ſemidiametri conjugatæ ad illam, quæ per punctum datum tranſit, diviſo per perpendicularem e puncto dato ad diametrum conjugatam demiſſam* Sed

quo-

Quoniam (863) $MR = \frac{CL \times CS}{CD}$, erit $\frac{1}{2} MA = \frac{CD^3}{CL \times CS}$, hoc est II° *radius curvaturæ sectionis conicæ in quovis puncto dato* M *est æqualis cubo semidiametri conjugatæ ad eam, quæ per punctum datum transit, diviso per factum ex semiaxibus.*

887. Demissis e foco F, & centro C perpendiculis CI FG ad tangentem sectionis in M, habetur (863) $MR^2 : CS^2 :: CL^2$ (vel $MR \times MN$) $: CD^2 = \frac{CS^2 \times MN}{MR}$. Jam vero quia $\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR}$; erit etiam $\frac{1}{2} MA = \frac{CS^2 \times MN}{MR^2}$. Est autem parameter p axis Ss, æqualis $\frac{2\,CL^2}{CS}$, & $\frac{1}{2} p = \frac{CL^2}{CS}$; igitur $\frac{1}{2} p \times CS = CL^2 = MR \times MN$, consequenter $MR = \frac{p \times CS}{2\,MN}$; & $MR^2 = \frac{pp \times CS^2}{4\,MN^2}$. Unde facta substitutione fiet $\frac{1}{2} MA = \frac{4\,MN^3}{pp} = \frac{MN^3}{\frac{1}{4} pp}$; hoc est, III° *radius curvaturæ sectionis conicæ in quovis puncto dato* M *est æqualis cubo normalis diviso per quartam partem quadrati parametri axis principalis.*

In parabola formula ad radium curvaturæ est $\frac{(4px + pp)\sqrt{(4px + pp)}}{2pp}$. Nam (835) $NM^2 = px + \frac{1}{4} pp$, hinc $4NM^2 = 4px + pp$, & $4NM^3 = (4px + pp)\sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)}$ Quod si jam quantitas sub signo radicali $\sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)}$ ducatur in 4, quin mutetur valor (195), habebitur $\sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4px + pp)}$: consequenter $4NM^3 = (4px + pp)\,\frac{1}{2}\sqrt{(4px + pp)}$; & $\frac{4NM^3}{pp} = \frac{(4px + pp)\sqrt{(4px + pp)}}{2pp}$. In aliis sectionibus formulæ obveniunt multo magis complicatæ.

888. PROBLEMA V. *Sectiones Conicas quadrare.*

RESOLUTIO pro parabola. Detur quadrandum ſpatium S nMP (Fig. 78), origine abſciſſarum ſtatuta in vertice S. Habetur PM $= y = \sqrt{px}$. Ponatur $p = 1$, erit $y = \sqrt{x}$, ſive $y = x^{\frac{1}{2}}$. Quare ut habeatur ſumma ordinatarum inter S & PM, alia re opus non eſt, quam ut ſummetur ſeries $1^{\frac{1}{2}}.\ 2^{\frac{1}{2}}.\ 3^{\frac{1}{2}}.\ 4^{\frac{1}{2}} \ldots x^{\frac{1}{2}}$; hujus autem ſumma eſt (384) $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} =$ (194) $\frac{2}{3} x \sqrt{x}$, ſeu, ob $y = \sqrt{x}$, $= \frac{2}{3} xy$. Ergo *ſpatium parabolicum* SMP *eſt æquale duabus tertiis facti ex abſciſſa in ordinatam*, ſive areæ parallelogrammi SPML.

889. COROLL. I. Si ducatur recta SM, ſegmentum parabolicum SMn eſt $= \frac{1}{6} xy$. Etenim ejus area æquatur areæ SPMn minus area trianguli rectanguli SPM, hoc eſt $= \frac{2}{3} xy - \frac{1}{2} xy = \frac{1}{6} xy$.

890. COROLL. II. Area ſegmenti SMn æqualis eſt dimidiæ areæ trilinei MnSL. Nam hoc ſpatium externum æquale eſt $\frac{1}{3} xy$.

891. COROLL. III. Si punctum P cadat in focum, erit $x = \frac{1}{4} p$, & $y = \frac{1}{2} p$, quare tunc $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} p \times \frac{1}{2} p = \frac{1}{12} pp$. Hoc eſt, area parabolica erit $\frac{1}{12}$ quadrati parametri.

892. RESOLUTIO pro ellipſi. Abſciſſis a centro computatis æquatio ad ellipſin eſt $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$, ſive $yy = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$; hinc $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{aa - xx}$. Quare quævis ordinata, quæ inter CL & PM (Fig. 81) duci poteſt, erit (779) $\frac{b}{a} \times a - \frac{b}{a} \times \frac{xx}{2a} - \frac{b}{a} \times \frac{x^4}{8a^3} - \frac{b}{a} \times \frac{x^6}{16a^5} - \frac{b}{a} \times \frac{5x^8}{128a^7}$, &c; ſeu $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8}$, &c. Unde ſi hæc ſeries toties ſummetur, quot inter C & P eſſe poſſunt abſciſſæ, habebitur ſumma omnium ordinatarum, ſeu area CLMP. Quod ſi itaque pro omnibus abſciſſis ſumatur ſeries infinita 1. 2. 3. 4. 5. ... x, liquet 1*mo*, ſummam omnium termino-

minorum primorum ſerie $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4}$ &c. toties ſumptæ, quot ſunt abſciſſæ, haberi, ſi accipiatur $b \times x$, ſive bx. 2do, Summam omnium terminorum ſecundorum $-\frac{bxx}{2aa}$ eſſe æqualem $-\frac{b}{2aa}$ ducto in ſummam omnium quadratorum terminorum ſeriei infinitæ 1. 2. 3. 4. 5. .... x, quæ eſt (383) $= \frac{x^3}{3}$; hinc ſumma terminorum ſecundorum fiet $-\frac{bx^3}{6aa}$. 3tio, ſummam omnium terminorum tertiorum $-\frac{bx^4}{8a^4}$ æquari facto ex $-\frac{b}{8a^4}$ in ſummam omnium potentiarum quartarum terminorum ſeriei 1. 2. 3. 4. 5..... x, quæ eſt (383) $= \frac{x^5}{5}$; igitur ſumma terminorum tertiorum $= -\frac{bx^5}{40a^4}$. Eodem modo invenitur ſumma omnium terminorum quartorum $-\frac{bx^6}{16a^6}$ æqualis $-\frac{b}{16a^6} \times \frac{x^7}{7} = -\frac{bx^7}{112a^6}$; ſumma terminorum quintorum $= -\frac{5bx^9}{1152a^8}$, &c; ut adeo ſpatium CLMP habetur per ſeriem infinitam $bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8} - \frac{7bx^{11}}{2816a^{10}} - \frac{21bx^{13}}{13312a^{12}}$, &c, cujus ſummatio in terminis finitis adhuc reperiri non potuit; unde quadratura abſoluta ellipſeos eſt inter incognita.

893. COROLL. I. Si fiat $x = a$, facta ſubſtitutione habetur $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab$, &c pro ſpatio quadrantis ellipſes CLMS. Et ſi a & b ſupponantur axes integri, eadem ſeries exhibet totam aream ellipſeos.

894. COROLL. II. Si ponatur $a = b$, ellipſis abit in circulum, & ſeries prior in ſequentem $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa - \frac{1}{112}aa$, &c, quæ propterea dat ſpatium quadrantis circuli, aut etiam circuli

culi integri, si supponatur tota diameter $= a$.

895. COROLL. III. Hinc patet, aream ellipticam esse ad aream circuli descripti super axe majore, ut $ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab$ &c ad $aa - \frac{1}{6} aa - \frac{1}{40} aa$ &c, hoc est, ut ab ad aa, seu ut $b : a$, vel *ut axis minor ad axem majorem.* Et si circulus describatur super axe minore, erit ejus area ad aream ellipticam, ut axis minor ad majorem.

896. Eodem modo *portio* CPNO *circuli est ad portionem* CPML *ellipseos, ut axis major ad minorem,* sive ut a ad b. Etenim illa exhibetur per seriem $ax - \frac{ax^3}{6aa} - \frac{ax^5}{40a^4}$ &c; hæc per $bx - \frac{bx^5}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4}$ &c. Idem est de areis PNS, PMS Hæc omnia satis manifesta sunt, cum id genus areæ circulares nil aliud sint, quam summæ ordinatarum, quarum singulæ (844) sunt ad singulas correspondentes in ellipsi (& quarum summæ sunt itidem areæ ellipticæ), ut est axis major ad minorem.

897. COROLL. IV. *Si e puncto quovis* A *accepto in axe ellipseos circulo inscriptæ, vel circumscriptæ ducantur ad extrema ordinatæ communis* PN *rectæ* AM, AN, *area sectoris circularis* SAN *est ad aream sectoris elliptici* SAM, *ut axis, super quo descriptus est circulus, ad axem alterum.* Nam area circularis SPN est ad aream ellipticam SMP in dicta ratione, ut ostensum est; & area trianguli PAN est ad aream trianguli PAM, ejusdem basis PA, ut PN ad PM (595), vel (843) ut CO ad CL, hoc est, ut axis, qui est diameter circuli, ad axem alterum; quare (309) etiam areæ totæ SAN, SAM sunt in ratione eadem.

898. COROLL. V. *Area ellipsis æqualis est areæ circuli, cujus diameter est media proportionalis inter axes ellipseos.* Vocetur diameter circuli d; erit $dd = ab$ (316). Jam area circuli est (894) $dd - \frac{1}{6} dd - \frac{1}{40} dd$, &c, & area ellipseos $ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab$, &c, ergo æquales inter se.

899. COROLL. VI. *Areæ duarum ellipsium sunt inter se, ut rectangula axium.* Sint enim axes unius a & b; alterius c & d; erunt area illius $ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab$, &c, hujus $cd - \frac{1}{6} cd - \frac{1}{40} cd$ &c, quarum ratio manifeste eadem est, ac factorum ab ad cd.

RESOL: pro Hyperbola. Dicatur semiaxis transversus SC $= b$ (Fig. 77) & CL $= a$, abscissa CH $= x$, ordinata MH $= y$, erit

(840) $yy = \frac{aabb + bbxx}{aa}$; ſive $yy = \frac{bb}{aa} \times \overline{aa+xx}$; & hinc $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa+xx}$. Quare ordinata quælibet inter CS, & HM eſt $= b + \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} + \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8} +$ &c. Et quoniam hæc ſeries ab illa ad ordinatas ellipſeos non differt, niſi ſigno terminorum parium, eadem ratiocinandi methodo reperietur 1*mo*, ſpatium areæ hyperbolicæ haberi per ſeriem $bx + \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8} +$ &c. 2*do*, Subtracto ſpatio rectanguli SCHI $= bx$, remanere aream trilinei hyperbolici SIM $= \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^6} -$ &c. 3*tio*. Si in hyperbola æquilatera, in qua $b = a$, ponatur $a = x$, haberi $aa + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa + \frac{1}{112}aa -$ &c. Hinc analogia inter hyperbolam æquilateram, & aliam, cujus axes inæquales, eodem modo ulterius extendi poteſt, ut ſuperius cum circulo & ellipſi factum eſt.

900. Pro hyperbola intra aſymptotos. Sit quadrandum ſpatium ARMZ (Fig. 74) binis ordinatis AZ, & RM compreheNſum. Statuta abſciſſarum origine in R ſit $CY = a$, $CR = b$, $RA = x$, $AZ = y$; habetur (870) $CA \times AZ = CY^2$, ſeu $by + xy = aa$; ideoque $y = \frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aaxx}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} + \frac{aax^4}{b^5} -$ &c (370). Et ſumma terminorum quorumlibet hujus ſeriei toties acceptæ, quot ſunt termini in ſerie infinita 1. 2. 3. 4...... x, dabit ſeriem infinitam $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4} +$ &c æqualem areæ ARMZ. Et eo citius hæc ſeries converget, quo fuerit x minor, quam b.

901. Coroll. Si ponatur $b = a$, hoc eſt, ſi origo abſciſ-

ſarum

ſarum ſtatuatur in Y, erit ſpatium SYAZ $= ax - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{aa} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^3}$ — &c, & ſumpto $a = 1$, fiet $= x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.

902. SCHOLIUM I. Sit CY $= 1$, & abſciſſæ CR, CA, Ct, in progreſſione Geometrica; CA $= f$, A$t = z$ erit $f = b + x$, & C$t = f + z$ ideoque $b : b + x :: f : f + z$; conſequenter $\frac{x}{b} = \frac{z}{f}$. Unde manifeſtum eſt, aream RMZA æqualem ſeriei $\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} - \frac{x^4}{4b^4} +$ &c, eſſe etiam æqualem areæ AZkt, pro qua eſt ſeries $\frac{z}{f} - \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{3f^3} - \frac{z^4}{4f^4} +$ &c. Igitur *areæ hyperbolicæ, quarum baſes ſunt differentiæ abſciſſarum in progreſſione Geometrica ſumptarum, ſunt inter ſe æquales.* Hinc porro apparet, quod ſi CY, CR, CA, Ct ſint abſciſſæ ejusmodi, ut repræſentent ſeriem quantitatum progreſſionis Geometricæ $\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3$, cum areæ ſuper baſibus YR, YA, At ſint æquales; areæ ſuper baſibus YR, YA, Yt, ſint inter ſe, ut numeri 1, 2. 3. Sunt igitur areæ iſtæ ut exponentes quantitatum CR, CA, Ct, conſequenter (337) ut logarithmi earundem. Quare *logarithmi ope arearum hyperbolicarum inveniri poſſunt, & viciſſim.*

903. SCHOLIUM II. Si deſideretur area comprehenſa aſymptoto CB, & parte aſymptoti alterius CR, ordinata MR, & ramo infinito MSi, ob $aa = xy$ (871), ſi ponatur a (ſeu CY) $= 1$, erit $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (168). Eſt autem (384) ſumma omnium x^{-1} æqualis $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$. Cum igitur quotiens ex 1 diviſa per 0 ſit infinitus, etiam ſpatium illud infinitum eſt. Supereſt jam, ut videamus, quomodo curvæ, quas adhuc conſideravimus, e ſectione coni oriantur, ſeu ſint reipſa *ſectiones conicæ.*

904. Conus rectus non niſi quatuor ſequentibus modis per planum aliquod in duas partes ſecari poteſt.

I°. Vel planum secans erit basi coni parallelum; & tunc manifestum est, curvam, quæ terminat planum utriusque partis sectæ, fore circulum, quippe cum sit illud planum elementum coni.

905 II°. Vel planum Sp (Fig. 82.) erit parallelum alicui lateri coni AB, hoc est, faciet cum plano BC baseos angulum $S p C$, illi æqualem, quem facit latus coni; & tunc curva indefinita m M S M m sectionem terminans (cono enim in infinitum producto, planum eodem semper modo illum secaret) est *parabola.*

906. III°. Vel planum Sp (Fig. 83) nec basi, nec lateri coni parallelum, erit magis inclinatum ad planum baseos C B, quam coni latera; & tunc patet, utrinque coni latera per hoc planum secari, sectionemque terminari curva finita, in seipsam redeunte, quæ erit *ellipsis.*

907. IV°. Vel denique planum secans Sp (Fig. 84) erit minus inclinatum ad basin coni, quam ejus latera; & tunc manifestum est, ab eo non posse omnia utrinque latera coni secari; ideoque curva sectionem terminans mMSM erit indefinita. Si porro ad verticem coni A constituatur alter conus similis, planumque secans producatur, etiam hunc conum ad s eodem modo secabit. Hæc sectio erit *hyperbola*, & si utraque sumatur, habebuntur *hyperbolæ oppositæ.*

908. Illud autem per se liquet, quod si planum secans sit ad basin coni perpendiculare, sectiones futuræ sint hyperbolæ; at si transiret simul per verticem, & axem coni, sectiones hyperbolicæ abire deberent in triangula rectilinea isoscelia, & similia.

909. Demonstratio pro Parabola. Sit (Fig. 82) aliquod planum basi parallelum; ejus sectio erit circulus EMD, cum sit unum ex elementis coni. Jam vero cum circuli EMD, BmC a curva secentur in M M, & $m m$, & præterea a plano triangulari A B C (quod ad basin perpendiculare per axem coni transire concipitur) in E D, & BC; evidens est, M M, $m m$ esse inter se parallelas, uti & diametrum E D ad diametrum B C; & quia per hypothesin planum A B C est perpendiculare ad planum secans, erit $m m$ perpendicularis ad B C, ideoque etiam M M ad E D. Præterea cum diametri E D, B C ab axe sectionis Sp intersecentur in P & p, hic axis (623) debet esse in plano eodem cum diametri, vel in plano trianguli A B C. Sunt igitur M M, $m m$ etiam ad Sp perpendiculares; & hinc $p m$, P M sunt ordinatæ communes tam circulorum BmC, EMD,

quam

quam curvæ mSm. Eſt autem (562) $pm^2 = Bp \times pC$; & $PM^2 = EP \times PD$; ergo $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$. Sed quoniam AB & Sp ſunt parallelæ, eſt $EP = Bp$; igitur etiam (296) $pm^2 : PM^2 :: pC : PD$; & ob triangula SPD, SpC ſimilia, habetur $pC : PD :: Sp : SP$; ergo $pm^2 : PM^2 :: Sp : SP$. Unde patet, curvam mSm eſſe ejuſmodi, ut ſint quadrata ordinatarum inter ſe, ut earum abſciſſæ; quare (821) eſt parabola.

910. DEMONSTRATIO pro ellipſi. (Fig. 83). Ductis duobus planis ad baſin coni parallelis, habentur duo circuli EmF, GMH, qui planum curvæ ſecant, & eodem modo, ac ſuperius, oſtendetur, mp, MP eſſe ordinatas communes circuli ac curvæ ſectionis, atque ex natura circulorum haberi $mp^2 : MP^2 :: Ep \times pF : GP \times PH$. Et quoniam triangula SPH, SpF; sEp, sGP ſimilia ſunt, erit etiam $pF : PH :: Sp : SP$; & $Ep : GP :: sp : sP$. Quare (307) $Ep \times pF : GP \times PH :: sp \times Sp : sP \times SP$; & conſequenter $pm^2 : PM^2 :: sp \times Sp : sP \times SP$. Eſt ergo ſectio sMS ejus naturæ, ut quadrata ordinatarum ſint inter ſe, ut facta abſciſſarum, id eſt, (820) ellipſis. Eadem foret demonſtratio, ſi ſolidum ABC eſſet cylinder rectus.

911. DEMONSTRATIO pro hyperbola. (Fig. 84). Quia in circulis EMD, BmC habetur $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$; & in triangulis DPS, CpS; item psB, PsE ſimilibus, eſt $pC : PD :: pS : PS$, & $pB : PE :: ps : sP$, conſequenter etiam compoſitis rationibus $pC \times pB : PD \times PE :: pS \times ps : PS \times sP$; erit quoque $pm^2 : PM^2 :: pS \times sp : PS \times sP$, quæ eſt proprietas hyperbolæ (820).

912. COROLL. Evidens eſt, quod ſi ducatur per verticem coni planum parallelum ad planum ſectionis, hoc planum, dum ſectio eſt parabola, conum tangat; dum vero ſectio eſt ellipſis, totum ſit extra conum; & denique dum ſectio eſt hyperbola, etiam ipſum tranſeat per conum. Quod ſi præterea ſint duo plana utrinque conum tangentia in rectis, per quas tranſit planum per verticem coni ad planum hyperbolæ parallele ductum, erunt interſectiones horum planorum cum plano hyperbolæ producto, aſymptoti hyperbolæ. Nam quia ab his planis omnia elementa coni tanguntur in punctis exiſtentibus in plano parallelo ad planum hyperbolæ, ea nequeunt in ullo alio puncto ab eiſdem planis contingi; adeoque neque ea plana poſſunt uſpiam occurrere hyperbolæ, cujus omnia puncta ſunt in plano parallelo ad illud, in quo ſunt puncta, in quibus conus a duobus planis contingitur.

PRINCIPIA CALCULI INFINITESIMALIS.

913. Quævis magnitudo ſpectari poteſt, velut perducta ad eum ſtatum, in quo eſt, per continua incrementa, atque licet etiam ſemper concipere aliquam quantitatem generatricem illorum incrementorum, quæ agat per gradus infinite parvos, & æquales, atque conſtante aliqua lege determinatos. Gradus iſti *differentiæ* dicuntur, ſeu *differentialia* illius magnitudinis, & calculus vocatur *infiniteſimalis*, in quo ejusmodi gradus infinite parvi adhibentur, ſeu ad inveniendas, ſeu demonſtrandas proprietates magnitudinis.

914. Quantitas *conſtans* appellatur quælibet, quæ ad ſtatum aliquem fixum perveniſſe concipitur; *variabilis* illa eſt, quæ ut actualis incrementi vel decrementi mutationi ſubjecta conſideratur. Sic in circulo dato diameter eſt quantitas conſtans, chorda variabilis. Quantitates conſtantes plerumque prioribus Alphabeti literis denotantur, variabiles poſterioribus.

915. Differentiale quantitatis variabilis litera d indicari ſolet, ſic adx exprimit factum quantitatis conſtantis a in incrementum infinite parvum variabilis x, ut proinde hæc litera d munere quantitatis algebraicæ non fungatur; ſed tantummodo nota ſit quantitatis infinite parvæ, cui præfigitur.

916. Dum in calculo infiniteſimali ſolummodo expreſſiones incrementi infinite parvi unius, pluriumve variabilium adhibentur, calculus *differentialis* appellatur; at dum per hujusmodi infinite parvorum expreſſiones, ac proprietates quantitatum iis affectarum, quæritur valor finitus variabilium, ſeu, quod idem eſt, dum incrementum finitum ex omnibus gradibus infinite parvis ortum quæritur, calculus dicitur *integralis*. Unde æquationem, ſive formulam aliquam *differentiare*, eſt quærere expreſſionem algebraicam quantitatum, quæ gradum infinite parvum incrementi variabilium conſtituunt, quæ in æquatione, ſeu formula data, occurrunt; *integrare* autem *æquationem*, *ſive formulam differentialem*, eſt quærere, quænam ea formula fuerit ante differentiationem; ſeu quænam ſit ſumma omnium incrementorum, quorum in formula differentiali pro ſingulis variabilibus tantum unicus gradus infinite parvus exhibetur.

917. Hinc autem consequitur, quod si detur lex, juxta quam quantitas aliqua generatur, facile sit omnium variabilium, quæ eam ingrediuntur, differentialia reperire, ideoque calculus differentialis omni difficultate caret; At ex opposito datis solis differentialibus non æque pronum est reperire legem, juxta quam quantitas producitur: unde in calculo integrali non exiguæ occurrunt difficultates.

918. Quod isthic de incrementis dictum est, æque de decrementis intelligi debet, cum utrorumque expressiones algebraicæ solis signis + & — differant.

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

Formulæ differentiales.

TOta ars differentiandi quantitates algebraicas in eo versatur, ut si qua proponatur, ei rite una sequentium formularum applicetur.

919. I. *Differentiare* a x. Formula, $a\,dx$.

DEMONSTRATIO. Evidens est (Fig. 86), si parallelogrammi lateris variabilis AD incrementum sit DF, alterum vero latus BD maneat constans, incrementum parallelogrammi CD $= ax$, fore parallelogrammum ED $= a \times dx$.

920. COROLL. Differentiale igitur quantitatis $ax + by - cz$ est $adx + bdy - cdz$. Et si differentietur $ab + bb - cy$, fiet $-cdy$. Pariter differentiale quantitatis $aa - bcz$ obtinetur $-bcdz$.

921. II. *Differentiare* x y. Formula, $xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO. In (Fig. 87.) apparet, per incrementa laterum dx & dy, rectangulum CD augeri tribus rectangulis infinite parvis, nempe xdy, ydx, & $dxdy$. Postremum ex his negligendum est, cum sit (361) quantitas infinite parva secundi ordinis. Igitur incrementum infinite parvum rectanguli xy, est $xdy + ydx$.

922. OBSERVA. Si crescente altera, altera variabilium decrescat (vide Fig. 88) differentiale decrescentis fit negativum. Sic habetur hic $ydx - xdy$.

923. COROLL. I. Differentiale de xyz, si supponantur omnes

omnes variabiles crescere, est $yzdx + xzdy + xydz$. Sit enim $xy = p$, consequenter $xyz = pz$, & $dp = ydx + xdy$. Est autem differentiale de pz (911) $= pdz + zdp$; & substituto xy pro p, ac $xdy + ydx$ pro dp, habetur $xydz + yzdx + xzdy$. Eodem modo differentiale quantitatis $uxyz$ est $xyzdu + uyzdx + uxzdy + uxydz$.

924. COROLL. II. Differentiale de axy est $axdy + aydx$. Ponatur enim $ax = p$, ideoque $axy = py$; & $dp = adx$. Jam vero differentiale de py est $pdy + ydp$; igitur facta substitutione habetur $axdy + aydx$.

925. COROLL. III. Differentiale quantitatis xx est $xdx + xdx = 2xdx$. Differentiale cubi $x^3 = 3x^2dx$; potentiae quartae $x^4 = 4x^3dx$; & universim differentiale de $x^m = mx^{m-1}dx$. Sic pariter differentiale de $\sqrt[n]{x^m}$, sive $x^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$. De $\frac{1}{x^m}$ seu x^{-m} est $-mx^{-m-1}dx$. Si differentietur $\sqrt{(xy+yy)}$, fiet $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{(xy+yy)}}$; si $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ sive $x^{\frac{-m}{n}}$, obtinetur $\frac{-mdx}{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}$; fit enim imprimis $-\frac{m}{n} x^{\frac{-m}{n}-1} dx = -\frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{n}} dx$. Est autem $x^{\frac{-m-n}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{m+n}}}$ (168); igitur $-\frac{m}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x^{m+n}}} \times dx = -\frac{mdx}{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}$.

Si differentietur $\frac{a}{m+1} x^{m+1}$, habebitur $ax^m dx$. &c.

926. III. *Differentiare* $\frac{y}{a}$. Formula, $\frac{dy}{a}$.

DEMONSTRATIO. Nam in Fig. 91 manifestum est, esse $dy : d\left(\frac{y}{a}\right) :: a : 1$.

927. IV. *Differentiare* $\frac{ay}{x}$. Formula, $\frac{axdy - aydx}{xx}$.

DEMONSTRATIO. In Fig. 92 est $x + dx : y + dy :: a : \frac{ay}{x} + d\left(\frac{ay}{x}\right)$. Si multiplicatis mediis & extremis fiat æquatio $\frac{axy}{x} + \frac{aydx}{x} + xd\left(\frac{ay}{x}\right) + dxd\left(\frac{ay}{x}\right) = ay + ady$, facta reductione, & omisso infinitesimali secundi ordinis, habetur $\frac{aydx}{x} + xd\left(\frac{ay}{x}\right) = ady$, sive $xd\left(\frac{ay}{x}\right) = ady - \frac{aydx}{x}$; hinc $d\left(\frac{ay}{x}\right) = \frac{adx}{x} - \frac{aydx}{xx} = \frac{axdy - aydx}{xx}$.

928. COROLL. I. Differentiale de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$.

929. COROLL. II. Differentiale de $\frac{a}{x} = -\frac{adx}{xx}$.

930. OBSERVA. I. Quoniam infinitorum sunt diversi ordines sese in progressione Geometrica excipientes (359); eædem sufficiunt formulæ ad eorum calculos, modo diversi ordines infinite parvorum designentur per exponentes notæ infinitesimalis *d*. Exempli causa ddx, sit quantitas infinite parva secundi ordinis, seu $\frac{x}{\infty^2}$. Infinitesimalia altiorum, quam secundi ordinis, raro adhibentur. Quæ sunt primi ordinis, dicuntur *differentiæ primæ*; quæ secundi, *differentiæ secundæ* &c; sunt nempe *differentialia differentialium.*

931. Itaque differentia secunda quantitatis ax, est $addx$; $dd(xy) = xddy + yddx + 2dxdy$; $dd(xx) = 2dxx + 2xddx$ (observandum hic, dxx vel dx^2 idem esse, ac $dxdx$; $dd(x^m) = (mm - m)x^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$.

Sit

Sit enim $x^{m-1} = y$, erit $dy = (m-1)\, x^{m-2}\, dx$ (925) Sit porro $dx = z$. His pofitis erit differentia prima de x^m (quam invenimus $mx^{m-1}\, dx$) $= myz$. Eft autem differentiale de $myz = mzdy + mydz$, five fubftituendo valores repertos, $m \times dx \times (m-1)\, x^{m-2}\, dx + m \times x^{m-1} \times ddx$. Differentia fecunda de $\frac{a}{y}$ eft $\frac{2ady^2 - ayddy}{y^3}$, &c.

932. OBSERVA II. Dum differentiatur aliquod differentiale, plerumque fit, ut differentia prima alicujus variabilis fit conftans, vel faltem inftar conftantis confideretur. In exemplo, fi facta differentiatione æquationis ad aliquam curvam quæratur per differentias fecundas incrementum inæquale ordinatarum, fupponi debet, differentias primas abfciffarum, feu dx, effe conftantes, hoc eft, quærendum eft incrementum inæquale ordinatarum refpondens incremento æquali abfciffarum. Sic differentia fecunda de $\frac{ydy}{dx}$, pofita dx conftante, eft $\frac{dyy + yddy}{dx}$.

Eodem modo differentia de $mx^{m-1}dx = dy$, fumpta dy pro conftante, eft $(mm-m)\, x^{m-2}\, dx^2 + mx^{m-1}\, ddx = 0$.

De Ufu Calculi Differentialis.

933. Calculus differentialis fere omnibus curvarum fymptomatis inveftigandis fufficit; fed ut problemata Phyfico-Mathematica accuratius folvantur, calculus integralis adhibetur. Nobis fatis eft in præfens afferre exempla pauca ufus calculi differentialis in curvarum theoria, adhibitis regulis maxime generalibus, quæ, quantum ad lineas primi, & fecundi ordinis, neque ulli exceptioni funt obnoxiæ, neque difficultati in applicatione fubjectæ. Nihil fpeciatim afferemus de cautelis neceffariis, dum ad curvas aliorum generum transferuntur. Hæc enim fi exequi liberet, integer de calculo differentiali Tractatus formandus effet.

Ufus Calculi Differentialis in tangentium, fubtangentium, normalium, & fubnormalium inveftigatione.

934. Ut ad punctum curvæ datum ducatur tangens, neceffe

ceſſe eſt, ut in axe, diametro, aliave recta poſitione data, determinetur præterea aliquod punctum, per quod tangens tranſire debet, ut ex utroque eo puncto ſitus tangentis habeatur; aut vero reperiendum eſt aliud quoddam punctum, per quod tranſeat normalis ad curvam in puncto dato, ut dein ad ipſam normalem in puncto dato erigatur perpendicularis.

Sit (Fig. 93 & 94) SR tangens curvæ in ipſo axis vel diametri vertice, ſit MP ordinata ad datum punctum M; pm altera ordinata infinite propinqua, & ad tangentem terminata. Ducatur per M ad diametrum vel axem parallela Rr, uti etiam MN ad curvam, vel tangentem perpendicularis; ex triangulo infiniteſimali rMm, in quo $rM = dx$, $rm = dy$, habebuntur ſequentes formulæ.

935. $PT = \frac{y\,dx}{dy}$. Nam $rm : rM :: MP : PT$.

936. $ST = \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$. Etenim $ST = PT - PS$: & $PS = x = \frac{x\,dy}{dy}$.

937. $SB = \frac{y\,dx - x\,dy}{dx}$. Nempe $PT : TS :: PM : SB$; vel $Mr : mr :: TS : SB$.

Sed quas his ſubjicimus, eæ non competunt niſi punctis curvarum ad axes relatis (Fig. 94).

938. $Mm = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$; ſive ſi dicatur $Mm = ds$, $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

939. $PN = \frac{y\,dy}{dx}$. Quippe $rM : mr :: PM : PN$.

940. $TM = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dy} = \frac{y\,ds}{dy}$. Etenim $rm : Mm :: PM : TM$.

941. $TB = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}\,(y\,dx - x\,dy)}{dx\,dy}$. Cum ſit $rm : Mm :: SB : TB$.

942.

942. $MB = \frac{x\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}$. Quia $Mr : Mm :: SP : MB$.

943. $MN = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}$. Ex analogia $Mr : Mm :: PM : MN$.

944. $TN = \frac{y(dy^2 + dx^2)}{dydx}$. Est namque $TN = TP + PN$.

945. Usus harum formularum generalium in eo consistit, ut sumptis æquationis ad curvam aliquam differentiis ita inter se combinentur dx & dy, ut obtineatur æquatio, cujus alterum membrum sit una e formulis præcedentibus, alterum contineat tantum quantitates finitas.

Detur exempli causa æquatio ad parabolam $yy = x$ (posita parametro $= 1$). Æquatio differentialis est $2ydy = dx$, ideoque $2y = \frac{dx}{dy}$; & $2yy = \frac{ydx}{dy}$, sive ob $x = yy$, $2x = \frac{ydx}{dy}$. Hujus æquationis membrum secundum est formula subtangentis PT; est ergo in parabola $PT = 2x$, ut supra (826) repertum est. Similiter ob $2ydy = dx$, habetur $ydy = \frac{1}{2}dx$, & $\frac{1}{2} = \frac{ydy}{dx} = PN$. Unde in parabola subnormalis æquatur semiparametro, prorsus ut supra (823).

946. Sit æquatio ad ellipsin $aayy = 2abbx - bbxx$ (810); si differentietur, fiet $2aaydy = 2bbdx - 2bbxdx$; & si omnia dividantur per 2, ac ducantur in y, obtinetur $aayydy = abbydx - bbxydx$; & hinc $\frac{aayy}{aabb - bbx} = \frac{ydx}{dy} = PT$. Substituatur pro $aayy$ ejus valor ex prima æquatione, & reducatur, habebitur $PT = \frac{2ax - xx}{a - x}$, ut N. 825.

Eadem ratione invenietur $ST = \frac{ax}{a - x}$, uti N. 828; nempe si in æquatione $\frac{2ax - xx}{a - x} = \frac{ydx}{dy}$, e membro priore subtrahatur

hatur x, e posteriore $\frac{xdy}{dy}$; est enim formula ad $ST = \frac{ydx - xdy}{dy}$ (936).

Eadem methodus adhibenda in reliquis linearum ad punctum contactus relatarum valoribus determinandis, non modo in sectionibus conicis, sed etiam aliis curvis.

Ejusdem calculi usus in radio curvaturæ inveniendo.

E pluribus methodis hanc in rem aptis, sequentem exempli loco adferemus.

947. Sit (Fig. 95) curva quævis SMK, cujus axis SN; quæratur ejus curvatura in M, sive in arcu infinite parvo Mm. Concipiatur circulus centro C descriptus per tria arcus Mm puncta transire; erit MC vel mC radius curvaturæ quæsitus. Ducantur ordinatæ MP, mp, & normalis ad M, MN, ac subnormalis PN. His positis, est Mm, vel ds, $= \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, $MN = \frac{yds}{dx}$ & $PN = \frac{ydy}{dx}$, ut superius vidimus. Quare $SN = x + \frac{ydy}{dx}$. Est autem Nn differentiale rectæ SN, quare differentianda est $x + \frac{ydy}{dx}$, ut acquiratur Nn. Unde habita dx pro constante, fit $Nn = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx} = \frac{ds^2 + yddy}{dx}$. Ducatur MB axi parallela, & Nt ad mC perpendicularis, habebitur ex triangulis rectangulis MmB, Ntn similibus, $Mm : MB :: Nn : Nt$: sive $ds : dx :: \frac{ds^2 + yddy}{dx} : Nt = ds + \frac{yddy}{ds}$. Ducatur item ex N recta NI ad Cm parallela, fiet $Im = Nt$, ideoque $IM = Mm - Im = ds - ds - \frac{yddy}{ds} = - \frac{yddy}{ds}$. Denique ob triangula rectangula IMN, MmC similia habetur $IM : MN = Mm : MC$, hoc

est

est $-\dfrac{yddy}{ds} : \dfrac{yds}{dx} :: ds : MC = \dfrac{ds^3\, ds}{-dxddy}$, & substituto $dy^2 + dx^2$ pro ds^2, formula generalis radii curvaturæ pro omnibus curvis ad axem relatis, est $MC = \dfrac{(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{-dxddy}$.

948. Dum hæc formula applicanda est ad curvas datas, ex earum æquatione inveniendus est imprimis valor de dx, dx^2, dy^2, $-ddy$, ita ut in ejus expressione non alia sit quantitas præter constantes, & y. Factis debitis substitutionibus, formula generalis reducetur ad quantitates finitas.

Exemplum. In parabola, cujus æquatio $yy = px$, habetur $2ydy = pdx$, consequenter $dx = \dfrac{2ydy}{p}$, & $dx^2 = \dfrac{4y^2\,dy^2}{pp}$. Si $dx = \dfrac{2ydy}{p}$ differentietur, ponaturque dx constans, quod etiam in constructione formulæ generalis fuit observatum, obtinetur $o = \dfrac{2dy^2 + 2yddy}{p}$. Jam quia primum æquationis membrum est o, fractio tollitur, eritque $o = 2dy^2 + 2yddy$; hinc $-2yddy = 2dy^2$, & $-ddy = \dfrac{dy^2}{y}$. His itaque substitutis jam habetur denominator formulæ $-dxddy = \dfrac{2ydy^3}{py} = \dfrac{2dy^3}{p}$. Deinde est $dx^2 + dy^2 = \dfrac{4y^2\,dy^2}{pp} + dy^2 = \dfrac{4y^2\,dy^2 + p^2\,dy^2}{pp} = \dfrac{dy^2}{pp}(4yy + pp)$; denique $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \dfrac{dy}{p}\sqrt{(4yy + pp)}$. Unde formula generalis abit in hanc $\dfrac{\dfrac{dy^2}{pp}(4yy + pp)\,\dfrac{dy}{p}\sqrt{(4yy + pp)}}{2dy^3 : p} = \dfrac{(4yy + pp)}{2pp}$

 $\sqrt{}$

$\sqrt{(4yy + pp)}$, quæ exhibet radium curvaturæ in quovis puncto parabolæ.

Si loco $4yy$ adhibeatur $4px$, obtinetur formula N. 887.

Usus Calculi differentialis in reperiendis Maximis & Minimis.

949. Si ea ſit lex, juxta quam quantitas aliqua producitur, ut exigat, quantitatem illam, vel ejusdem functionem quampiam, uſque ad certum terminum creſcere, dein rurſus decreſcere; quæri poteſt, quis ejus ſit valor, cum maxima fuerit; vel quis ſit ille terminus, ad quem cum pertingit, maxima evadit? Vel vero ſi lex productionis poſtulet, ut quantitas uſque ad certum terminum decreſcat, ſed ultra eum rurſus creſcat; itidem quæſtio eſſe poteſt, quis fuerit valor, dum erat minima, vel ubinam ſit terminus, in quo minima fuerat? Atque hæc dum fiunt, dicuntur *maxima*, vel *minima* quæri; methodus autem, qua tum utimur, appellatur *methodus de Maximis & Minimis*.

950. Illud imprimis manifeſtum eſt, quod in eo termino, in quo quantitas evaſit maxima, ejus incrementum fuerit nullum; uti & quod illic, ubi facta eſt minima, decrementum ejus nullum fuerit. Hinc ſequitur, quod facta differentiatione quantitatis, de qua agitur, ejus variabilis differentiale ponendum ſit $= 0$, quæ uſque ad certum limitem creſcit, dein decreſcit, vel ex oppoſito. Quod ſi hac methodo æquatio differentialis reducatur ad terminos finitos, *maximum*, vel *minimum* exhibebit, quod quærebatur.

951. Exemplum. In ellipſi ordinatæ ad axem majorem creſcunt, tum iterum decreſcunt. Si itaque deſideretur punctum axis, in quo ordinata ſit maxima, differentietur æquatio ad ellipſin (810) $aayy = 2abbx - bbxx$, quæ erit $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$: poſita $dy = 0$, primum æquationis membrum evaneſcit, & manet $0 = 2abbdx - 2bbxdx$, vel vero $2bbxdx = 2abbdx$, quæ æquatio reducetur ad $a = x$. Ex quo patet, punctum axis, in quo ordinata eſt maxima, eſſe centrum ellipſeos. Ut autem ipſe maximæ ordinatæ valor reperiatur, in æquatione ad ellipſin ſubſtituatur a pro x; eruetur $y = b$. Itaque ordinata maxima eſt ſemiaxis minor.

952. Quoniam methodus de maximis & minimis permagni momenti eſt, ejus conceptus, quantum fieri poteſt, diſtinctus formari debet, maxime ſi non aliqua æquatio proponatur,

ſed

fed formula alia quævis quantitatis variabilis. Id ut assequamur, assumemus curvam quampiam, quæ omnes possibiles valores quantitatis variabilis x repræsentet, quæ quantitas mutetur lege per formulam algebraicam expressa. Sit igitur ea lex $0{,}1125\,x^4 - 0{,}725\,x^3 + 0{,}9375\,xx + 0{,}875\,x$, secundum quam x variat, & supponamus, hanc legem esse primum membrum æquationis ad aliquam curvam Geometricam, cujus alterum membrum sit y; erit itaq; $0{,}1125\,x^4 - 0{,}725\,x^3 + 0{,}9375\,xx + 0{,}875\,x = y$.

Ut jam curva describi possit, ponatur successive $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, &c, atque his valoribus in æquatione substitutis, inveniuntur etiam valores correspondentes y, quemadmodum in tabella adjuncta videre licet.

x seu abscissæ	y seu ordinatæ
0	0
1	1, 2
2	1, 5
3	0, 6
4	0, 9
5	7, 5
6	28, 2
7	73, 5
&c.	&c.

Ducatur recta indefinita PE (Fig. 97) quæ sumatur pro linea abscissarum; & puncto S ad arbitrium pro origine abscissarum statuto accipiantur inde partes æquales ad A, B, D, E &c. Ex his erigantur perpendiculares Aa, Bb, Cc, Dd &c, quæ fiant ordine æquales ordinatis descriptis in tabella, scilicet A$a = 1, 2$; B$b = 1, 5$; C$c = 0, 6$, &c. Deniq; ducatur curva per omnia puncta hoc modo determinata S, a, b, c, &c. His ita peractis . . .

Ex ipso curvæ intuitu patet, ordinatas ab initio crescere usque ad r; dein decrescere usque ad t, tum vero versus e citissime augeri. Illud præterea manifestum est, curvam illic, ubi ordinata est maxima, axi obvertere cavitatem; ubi vero *minimum* datur, convexitatem. Quæri igitur potest imprimis punctum R, cui respondet *maximum* Rr, tum ipse valor *maximi*, Rr; deinde punctum T, cui convenit *minimum* Tt, ac ipsa hujus *minimi* quantitas.

953. In hunc finem differentietur æquatio ad curvam, quæ fiet $0{,}45\,x^3\,dx - 2{,}175\,x^2\,dx + 1{,}875\,x\,dx + 0{,}875\,dx = dy$; facta $dy = 0$, ceterisque terminis per dx divisis, est $0{,}45\,x^3 - 2{,}175\,x^2 + 1{,}875\,x + 0{,}875 = 0$, cujus æquationis tres radices sunt $x = 1{,}6925$; $x = 3{,}472$; $x = -3$,

891. Si hi valores successive in æquatione prima substituantur pro x, reperietur $y = 1, 578$; $y = 0, 342$; & $y = 0, 675$. Quare si accipiatur SR $= 1, 6925$, & R$r = 1, 578$, habetur & locus, & magnitudo *maximi* quæsiti. Et si postea fiat ST $= 3, 472$, ac T$t = 0, 342$, determinabit prior locum, posterior valorem *minimi*.

954. Quod ad radicem negativam $x = -3, 891$, ac correspondentem ordinatam 0, 675, res ita sumenda est, ut intelligatur SP $= 37, 891$ accipi ex parte sinistra puncti S, illicque erigi P$p = 0, 675$; pertinebit p ad curvæ portionem versus sinistram sitam, quæ descripta fuisset, factis abscissis $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ &c. Est itaque p locus *maximi*, vel *minimi*, in ea curvæ portione.

955. Si æquatio ad *Maximum* vel *Minimum* habeat omnes radices imaginarias, id indicio est, nullum dari in quantitate proposita *maximum*, nullum *minimum*.

956. OBSERVA I. Quoniam differentiæ dx sumuntur in eadem recta, correspondentes dy non possunt terminari ad curvam, & simul esse in eadem constante ratione cum dx. Id enim si esset, ipsæ ordinatæ, utpote summæ antecedentium, forent ad abscissas, tanquam summas consequentium, in eadem ratione constante (310), neque ad aliam, quam ad rectam terminari possent, qualis esset hypotenusa trianguli rectanguli (vide Fig. 96). E quo deducitur, *in curva rationem* dy *ad* dx *semper variari debere*; & quia dx sumuntur in eadem recta, res ipsa suadet, ut supponantur constantes, quo facilius cum dy, perpetuo variabilibus, conferri possint.

957. OBSERVA II. Ex natura *maximi* vel *minimi* in curva Geometrica exhibiti, tangentes in punctis r, t debent fieri cum linea SD parallelæ, cum in hisce punctis punctum curvam describens ejusmodi habeat directionem, ut neque ab axe discedat, neque ad eum accedat. Quare illic subtangentes fiunt infinitæ, normales æquales ordinatis rR, tT, & subnormales $= 0$. Hinc *maxima* & *minima* reperiri possunt *per formulas differentiales ad tangentes*. Apparet item, in ipso transitu per maximum vel minimum subtangentem, & subnormalem acquirere situm oppositum illi, quem ante eum transitum habebant: quin ex hac ipsa mutatione decidi potest, utrum valor ex applicatione regulæ generalis pro *maximis*, & *minimis* obtentus pertineat ad *maximum* vel ad *minimum*. Ex ipso enim figuræ

97

97 intuitu patet, quod si expressio subtangentis evadat negativa ex positiva, valor calculo repertus contineat *maximum*. Quod si subtangens e negativa debeat transire in positivam, valor inventus exhibet *minimum*.

958. OBSERVA III. Contingere potest, ut dy, dum ex crescente incipit decrescere, in ipso hoc transitu fiat respectu dx infinitum. Ut enim non aliunde, quam e sectionibus Conicis exemplum adducamus, si consideretur motus puncti quatuor hyperbolas conjugatas describentis (quæ (850) in se unam verius curvam, spatium undique claudentem, constituunt) manifestum est, hoc punctum per totam rami longitudinem moveri in extremo ordinatæ y, ab ipso vertice initium ducendo, cujus ordinatæ differentiæ dy perpetuo crescunt, usque dum hic ramus in infinita distantia conjungitur alteri conjugatæ hyperbolæ; atque dum punctum a ramo priore transit in novum, necesse est, ut dy sit infinitum respectu dx; verum in regressu per novum hunc ramum usque ad verticem, iterum decrescit, ac sic deinceps.

Infertur autem etiam hinc, non semper ponendum esse $dy = 0$, ut habeatur *Maximum* vel *Minimum*. Atque si posito $dy = 0$, nihil ex æquatione seu pro maximo, seu pro minimo elici possit, id ipsum obtineri, si fiat $dy = \infty$.

De Regulis, & usu Calculi Integralis.

Cum calculus integralis majoribus implicetur difficultatibus, quam ut accurate isthic exponi possit, ea solum, quæ & prima, & facilia sunt, delibabimus, unoque ac altero exemplo minus intricato ejus quandam imaginem primis solummodo ductibus delineabimus.

959. Litera $\int$ (prima scilicet vocis *summæ*) integrationis nota adhibetur; v.g. $\int a\,dx$ indicat, quantitatem $a\,dx$ debere integrari.

960. Et quoniam calculi integralis operationes inversæ sunt earum, quæ adhibentur in differentiali; formularum integralium vices agere poterunt omnes eæ quantitates, quas superius (a N. 919 usque ad 933) differentiandas proposuimus. Sic $\int a\,dx = ax$; $\int (x\,dy + y\,dx) = xy$, &c. At enim quia, dum quantitatum algebraicarum e terminis variabilibus & constantibus complexarum differentiæ accipiuntur, termini constantes

eva-

evanescunt, iidem in integratione rursus restitui debent; unde fieri potest, ut $\int dx$ vel sit $= x$ tantum, vel $= x$ addita, aut subtracta una, pluribusve constantibus, atque a solis problematis conditionibus pendet, quandonam, & quas constantes in integratione variabilibus adjungere oporteat. Exemplum hujus rei inferius occurret (970).

961. Si in expressione differentiali unica habeatur variabilis, aut si ejus generis expressio unico constet termino, difficile non est e formula N. 925 quantitatem integralem reperire, in qua habetur nempe $\int a x^m dx = \frac{a x^{m+1}}{m+1}$, cujus enunciatio sequentem suppeditat regulam: *deleatur differentiale; augeatur exponens variabilis unitate; dividatur totum per exponentem ita auctum.*

962. Totum vero artificium calculi integralis in eo versatur, ut regula hic exposita differentialibus datis applicetur, atque ut ejusmodi quantitates ita præparentur, ac disponantur, ut ope hujus regulæ integrari possint. Dum autem contingit, ut quantitas aliqua nulla arte eo reduci queat, ut perfecte integretur, illud agendum est, ut transformetur in aliam, cujus integrale idem sit cum integrali propositæ, vel cum integrali alterius, per quod rectificatio, vel quadratura alicujus sectionis conicæ, imo etiam alicujus curvæ ordinis superioris; aut logarithmus numeri cujuspiam, vel sinus &c habetur. Jam vero cum quadratura, & rectificatio in paucissimis curvis geometrice detur, plurimique etiam sinus sint incommensurabiles cum sinu toto; sequitur, in plurimis casibus ejusmodi integrationes non nisi incompletas esse, neque eas numeris, nisi prope veris, exhiberi posse. Denique ceteris omnibus deficientibus, ad series infinitas, tanquam ad sacram anchoram confugitur, quarum nempe summa integrali quæsito sit æqualis. Atque ex his, quæ diximus, satis intelligitur, calculum integralem esse artem non modo admodum imperfectam, sed etiam maximis difficultatibus implexam; quæ sæpe non nisi in quandam approximationem exeat. Unde nobis satis fuerit, pauca exempla usus hujus calculi in Geometria afferre, atque hæc ipsa e planiore ejus parte deprompta, qua nempe de seriebus agit, eum maxime in finem, ut consensus earum, quas ope hujus calculi deducemus, cum illis, quas Analysis communis suppeditat, ut Tract. de sect. Conic. vidimus, eluceat.

963.

963. Usus porro calculi integralis in Geometria pura est maximus in quadrandis superficiebus planis, & curvis, in cubandis solidis, sive reperienda soliditate corporum: in rectificandis curvis, hoc est, in invenienda longitudine arcuum curvarum datarum, si in directum extenderentur; in investiganda natura, vel æquatione curvarum, quarum tangentes, subtangentes, normales, subnormales &c, analytica expressione dantur. At nulla fere est scientia Physico-Mathematica, quæ ut penitus exhauriatur, non hujus calculi ope continua egeat.

Usus calculi Integralis in quadratura superficierum planarum & curvarum.

964. Extra dubium est, quadraturam spatii CPML (Fig. 67) haberi per summam omnium parallelogrammorum $pqnm$, quorum expressio differentialis est ydx. Igitur formula quadraturæ spatii inter binas ordinatas, arcum curvæ, & portionem axis comprehensi est $\int ydx$.

965. In parabola est $px = yy$, ideoque $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, & $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; consequenter $ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, quod si integretur juxta regulam generalem (961), habebitur $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = p^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}}$, ac substituto $\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$ pro $p^{\frac{1}{2}}$, fit $\frac{2yx^{\frac{3}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}yx$. Atque hæc est exacta parabolæ quadratura (888).

966. Ex æquatione ad ellipsin superius (892) jam invenimus $y = \frac{b}{a} \surd (aa - xx)$; & quia $\surd (aa - xx)$ est quantitas incommensurabilis; sublato signo radicali, reduci potest ad seriem infinitam, ut jam vidimus (371). Habebitur itaque $y = \frac{b}{a} \left(a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}, \&c. \right)$ $= b - \frac{bx^2}{2a^2} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8}$ &c. Si hæc series du-

ducatur in dx, obtinetur $ydx = bdx - \frac{bx^2 dx}{2a^2} - \frac{bx^4 dx}{8a^4} - \frac{bx^6 dx}{16a^6} - \frac{5bx^8 dx}{128a^8}$, &c. Et si porro integretur, spatium ellipticum erit $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{6bx^9}{1152a^8}$, &c, prorsus, ut superius N. 890.

967. Circuli, & hyperbolæ quadratura eodem calculo reperiuntur.

968. Quod ad quadraturas superficierum curvarum solidorum, quæ rotatione curvæ circa axem suum generantur, facile est, eas sequente methodo reperire. Evidens est, a quovis latere infinite parvo curvæ generatricis rotatione fieri conum rectum truncatum infinite parvæ altitudinis, qui sit elementum solidi inde geniti. Est autem superficies coni truncati (696) æqualis facto ex longitudine hujus lateris $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ducta in circumferentiam, quam describit punctum medium ejusdem lateris, hoc est, in circumferentiam descriptam ab extremo puncto ordinatæ y. Si igitur fiat ut radius quivis r est ad suam circumferentiam c, ita ordinata y est ad $\frac{cy}{r}$ circumferentiam ab extremo ordinatæ descriptam, erit superficies elementi unius solidi $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \times \frac{cy}{r}$, & $\int \frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ erit formula integrationis, ex qua tota superficies curva solidi habebitur.

969. Si exempli causa, parabola circa axem suum agatur, habetur $adx = 2ydy$; hinc $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$, & $\frac{cy}{r} \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{cy}{r} \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4yydy}{aa}\right)} = \frac{cy}{r} \sqrt{\left(\frac{aady^2 + 4yydy^2}{aa}\right)} = \frac{cydy \sqrt{(aa + 4yy)}}{ar}$. Ut jam hæc expres-

sio

ſio reducatur ad aliam, cui regula integrationis applicari poſſit, ponatur $\sqrt{(aa+4yy)}=z$; hinc $aa+4yy=z^2$; & $8ydy=2zdz$; denique $ydy=\frac{zdz}{4}$. His ſubſtitutis obtinetur $\frac{cydy\sqrt{(aa+4yy)}}{ar}=\frac{cz^2dz}{4ar}$, cujus integrale eſt $\frac{cz^3}{12ar}=\frac{cz^2z}{12ar}$, & rurſus reſtituendo valorem de z, tandem eſt $\frac{c(aa+4yy)\sqrt{(aa+yy)}}{12ar}$.

970. Ut autem ſciatur, utrum valori reperto aliqua conſtans addenda, vel demenda ſit, videndum eſt, an poſita $y=0$, tota formula fiat $=0$. Etenim ſolum verticis punctum eſt, ubi ſolidum ſuperficiem finitam non habet. Facta igitur $y=0$, manet $\frac{aac}{12r}$; igitur hæc quantitas conſtans ſubtrahenda eſt, ut verus valor quæſitus ſit $\frac{c(aa+4yy)\sqrt{(aa+4yy)}}{12ar}-\frac{aac}{12r}=\frac{c(aac+4yy)\sqrt{(aa+4yy)}-a^3c}{12ar}$.

Uſus Calculi integralis in rectificatione curvarum.

971. Rectificatio curvarum, dum ad axem referuntur, fit integratione formulæ $ds=\sqrt{(dy^2+dx^2)}$. Neque neceſſe plura in hanc rem exempla congerere, cum paucæ admodum ſint curvæ ex illis, quarum major eſt uſus, quæ perfecte rectificari poſſint.

972. Superius vidimus (948), in parabola eſſe $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=dy\frac{\sqrt{(pp+4yy)}}{p}=$ (poſita $p=1$), $dy\sqrt{(1+4yy)}$. Si quantitas radicalis $\sqrt{(1+4yy)}$ reſolvatur in ſeriem (371), habetur $1+2y^2-2y^4+4y^6-10y^8$, &c: unde $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=dy+2y^2dy-2y^4dy+4y^6dy-10y^8dy$, &c. cujus integrale ex regula generali eſt $y+\frac{2}{3}y^3-\frac{2}{5}y^5+\frac{4}{7}y^7-\frac{10}{9}y^9$ &c, quod dat longi-

longitudinem rectæ, inde a vertice usque ad ordinatam y parabolæ complicatæ.

973. Si radius circuli ponatur $= 1$, ejus æquatio est $yy = 2x - xx$; consequenter $2ydy = 2dx - 2xdx$, hinc $dx = \frac{ydy}{1-x}$, & $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-2x+xx}$, sive (ob $yy = 2x - xx$, vel $-yy = -2x + xx$), $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-yy}$, & proinde $dx^2 + dy^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-yy} + dy^2$, seu facta reductione ad eundem denominatorem, $= \frac{y^2 dy^2 + dy^2 - y^2 dy^2}{1-yy} = \frac{dy^2}{1-yy}$; quare erit $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} = dy\,(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$. Atqui ope formulæ N. 964 $(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$ reducitur ad seriem $1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \frac{35}{128}y^8$, &c.; igitur $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{3}{8}y^4 dy + \frac{5}{16}y^6 dy + \frac{35}{128}y^8 dy$, &c; Et si integretur, erit $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$ &c, quæ series etiam hac forma concinniore exhiberi potest $y + \frac{1}{2\ 3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3\ 5.}{2.4.6.7.}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$, &c.

974. Ordinata circuli est sinus arcus inter originem abscissarum, & ipsam ordinatam intercepti. Quare ope hujus seriei inveniri potest longitudo arcus, cujus sinus datur, eoque citius series converget, quo fuerit pauciorum graduum arcus, cui sinus datus competit. Hoc modo expedite calculari potest arcus 30 graduum, cujus sinus $=$ 0, 5; & si is multiplicetur per 6, habebitur tota circumferentia, adeoque ratio diametri ad peripheriam. Exempli causa, fiet series 0, 5 + 0, 020833 + 0, 002344 + 0, 000349 + 0, 000059; cujus summa est 0, 523585; & factum per 6 = 3, 14151, fere ut supra (615). Accuratior erit, si summentur plures termini, atque fractiones decimales accipiantur plurium notarum.

Usus

Usus Calculi Integralis in cubandis solidis.

975. Solidum cubatur, sive corporis soliditas habetur, dum expressio differentialis alicujus elementi, e quibus corpus constat, integratur. Exempli causa, dum solidum rotatione alicujus curvæ circa axem suum generatur, quodvis elementum est conus rectus truncatus, cujus soliditas æquatur facto ex ejus axe dx in superficiem circuli, quem describit ordinata y transiens per medium punctum lateris infinite parvi, quo superficies illius coni generatur. Jam vero (968) circumferentia circuli ab ordinata y descripti est $\frac{cy}{r}$, ejusque area (602) $\frac{cy}{2r} \times y$, sive $\frac{cyy}{2r}$. Unde formula generalis cubationis elementi alicujus solidi revolutione geniti est $\frac{cy^2\,dx}{2r}$, & formula integrationis, quæ præbet ipsum solidum, $\int \frac{cy^2\,dx}{2r}$, in qua valor de y^2 substituendus est, erutus ex æquatione ad curvam.

976. Hoc modo, si radius circuli genitoris sphæræ fit $= r$, ejus æquatio est $yy = 2rx - xx$; hoc valore in formula adhibito obtinetur $cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$, cujus integrale, $\frac{1}{2}cxx - \frac{cx^3}{6r}$ exhibet soliditatem segmenti sphæræ radii r, cujus altitudo est x. Et si porro fiat $x = 2r$, soliditas sphæræ integræ obtinetur $= 2crr - \frac{4crr}{3} = \frac{6crr - 4crr}{3} = \frac{2}{3}crr = \frac{2}{3} \times 2r \times \frac{1}{2}cr$; id est, soliditas sphæræ æquatur duabus tertiis facti ex area circuli maximi in axem.

Usus Calculi Integralis in Methodo inversa Tangentium.

977. *Methodus inversa tangentium* appellatur ea, qua ex data formula analytica tangentis, subtangentis, normalis, vel subnormalis quæritur natura, & æquatio curvæ. Pariter dicuntur ad methodum inversam tangentium pertinere illa problema-

ta, in quibus ex rectificatione, vel quadratura analytice expressa æquatio ad curvam quæritur, &c.

Quando igitur datur expressio algebraica alicujus lineæ, quæ ad tangentem refertur, ea fieri debet membrum æquationis cum formula differentiali lineæ ejusdem nominis e N. 935, & seqq. Et si quidem æquatio integrari possit, habebitur æquatio quæsita ad curvam.

978. Exemplum. Quæritur, quæ sit curva, cujus subtangens $= \frac{yy}{a}$? Est igitur (935) $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, seu $aydx = yydy$, vel $adx = ydy$; facta integratione habetur $ax = \frac{1}{2}yy$, seu $2ax = yy$, æquatio ad parabolam, cujus parameter $2a$.

979. Quæritur, quæ sit curva, cujus subnormalis est $a - x$? Per N. 939 habetur $\frac{ydy}{dx} = a - x$, sive $ydy = adx - xdx$. Et integrando $\frac{1}{2}yy = ax - \frac{1}{2}xx$, vel $yy = 2ax - xx$, quæ est æquatio ad circulum.

980. Quæritur curva, cujus subnormalis est constans, sive $= 1$? Erit $\frac{ydy}{dx} = 1$; vel $ydy = dx$; aut $\frac{1}{2}yy = x$, seu $yy = 2x$, quæ æquatio pertinet ad parabolam, cujus parameter $= 2$.

981. OBSERVA. In Geometria calculus differentialis & integralis etiam applicatur ad quantitates algebraicas tractandas, quæ habent exponentes variabiles, velut a^x, x^y &c, uti etiam ad æquationes curvarum ejusmodi terminos involventes, quorum exponentes sint mutabiles. Id genus curvæ *exponentiales* appellantur, atque ipse calculus, quo tractantur, *calculus exponentialis*. Verum isthæc omnia singillatim si exponere vellemus, longe ultra limites huic operi fixos nos provehi necesse foret.

INDEX
TITULORUM.

Pag.

PARS PRIMA
ARITHMETICA.

INDEX.

De

INDEX.

PARS

INDEX.

Pag.

PARS SECUNDA.
ELEMENTA GEOMETRIÆ.

fu-

TRA-

INDEX.

Pag.

TRACTATUS ANALYTICUS DE SECTIONIBUS CONICIS.

Principia Calculi infinitesimalis.

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

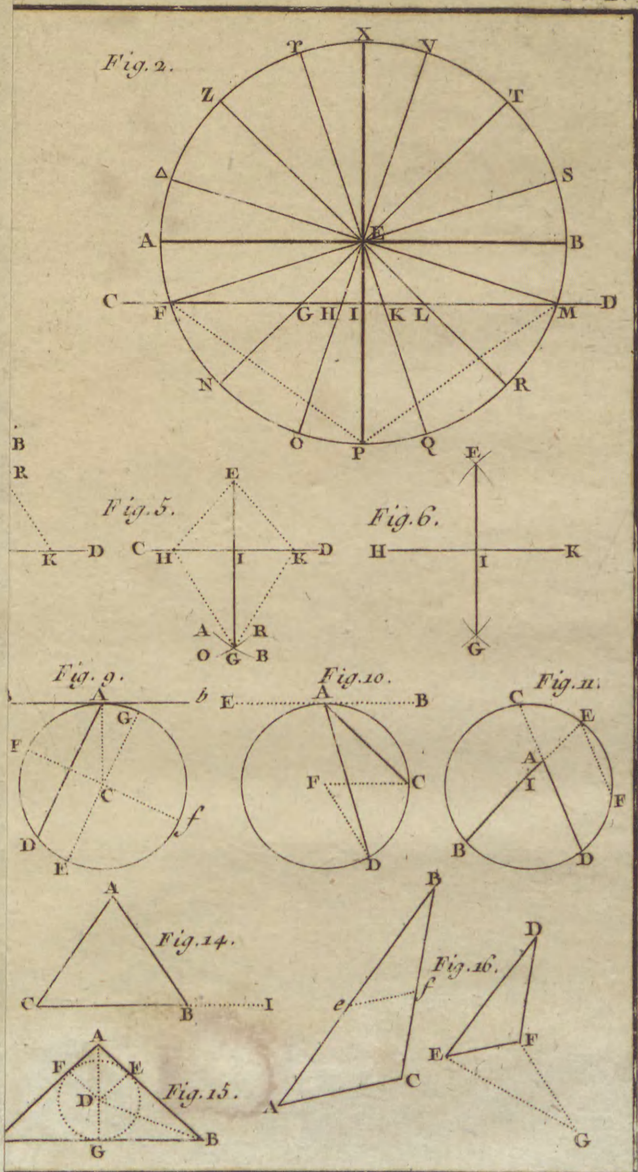


Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

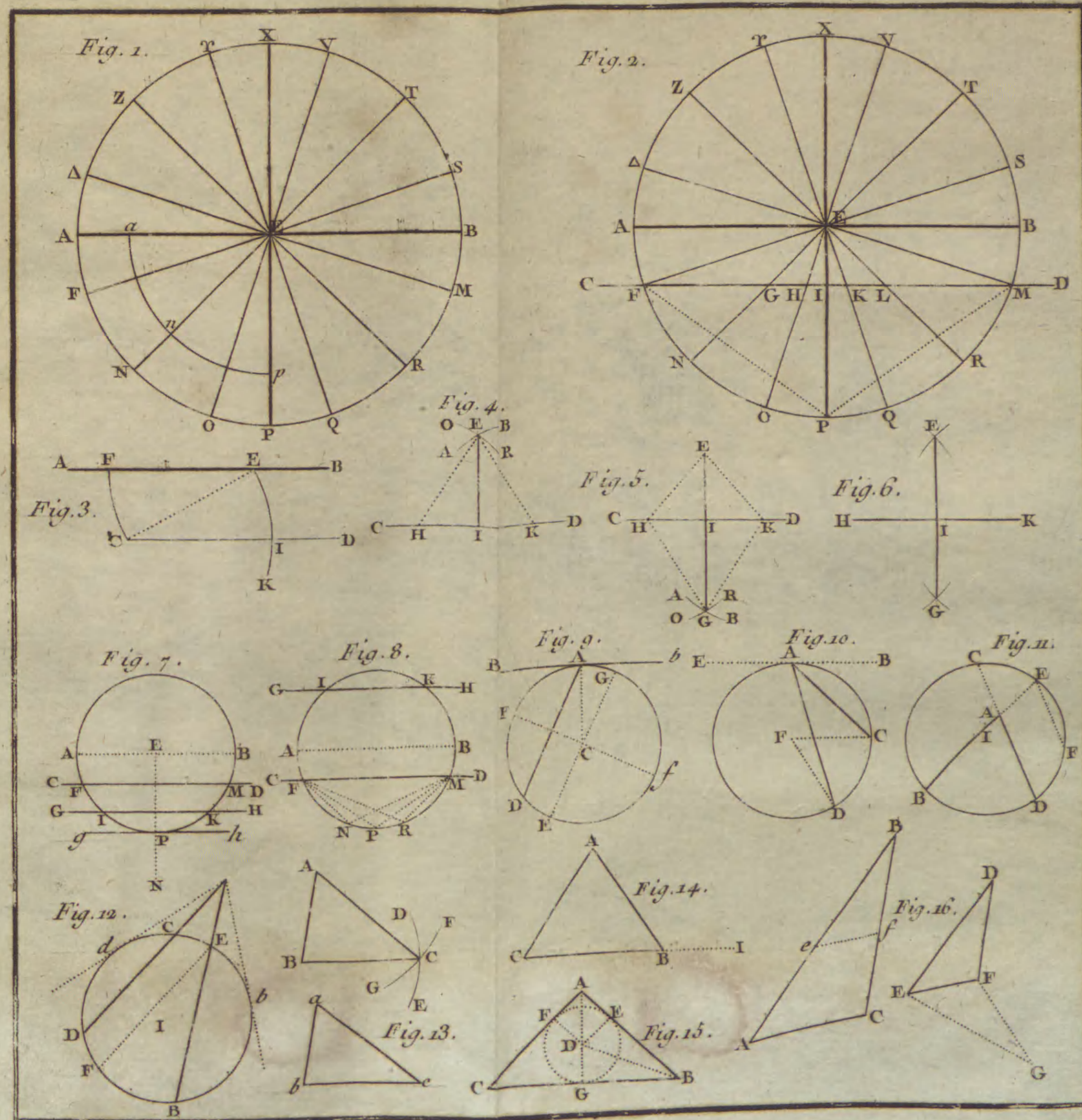


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

Dheulland, F.

8.

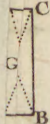


Fig. 19

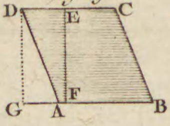


Fig. 20.

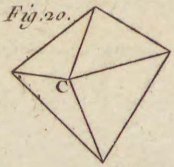
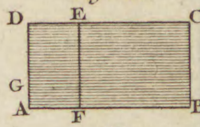


Fig. 21.



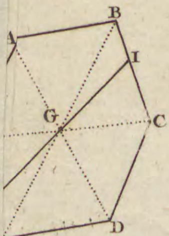


Fig. 23.

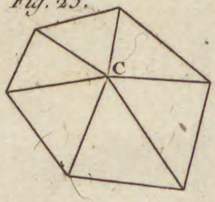
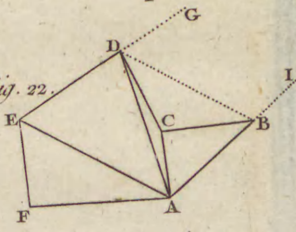


Fig. 22.



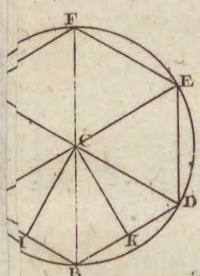


Fig. 28.

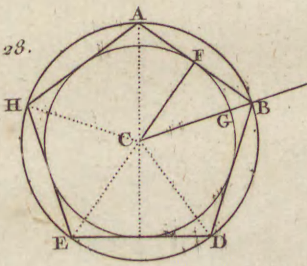


Fig. 31.

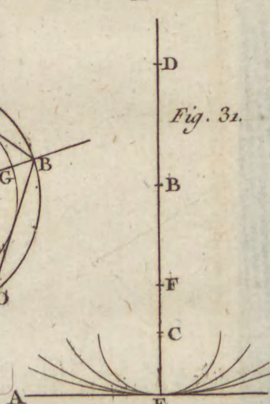


Fig. 30.

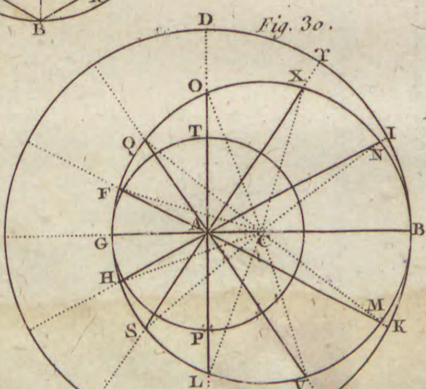
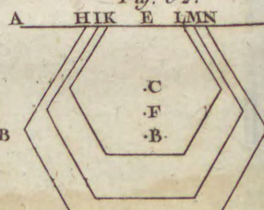


Fig. 32.



Pl. II.

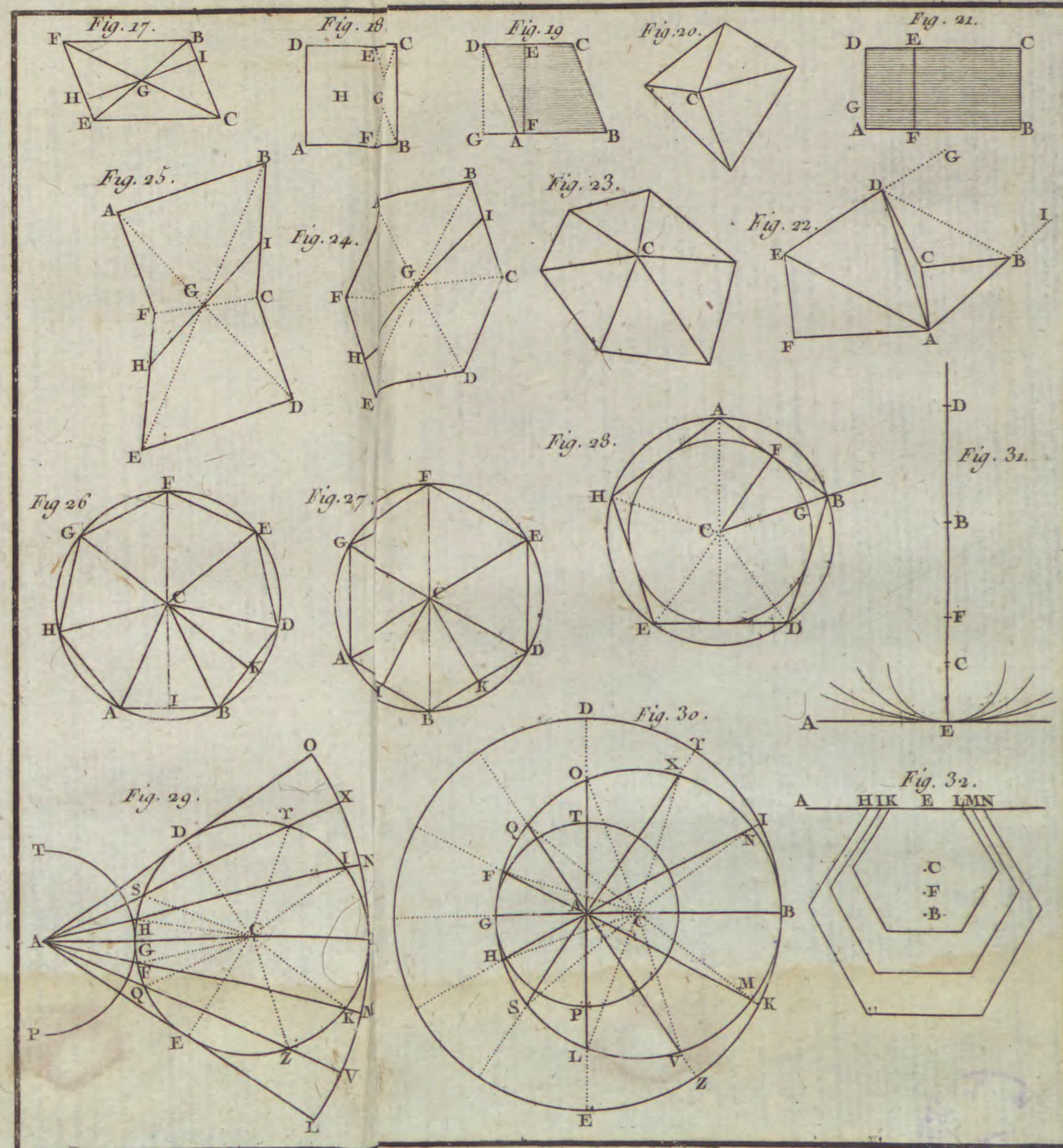


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 25.
Fig. 24.
Fig. 23.
Fig. 22.
Fig. 28.
Fig. 31.
Fig 26
Fig. 27.
Fig. 30.
Fig. 29.
Fig. 32.

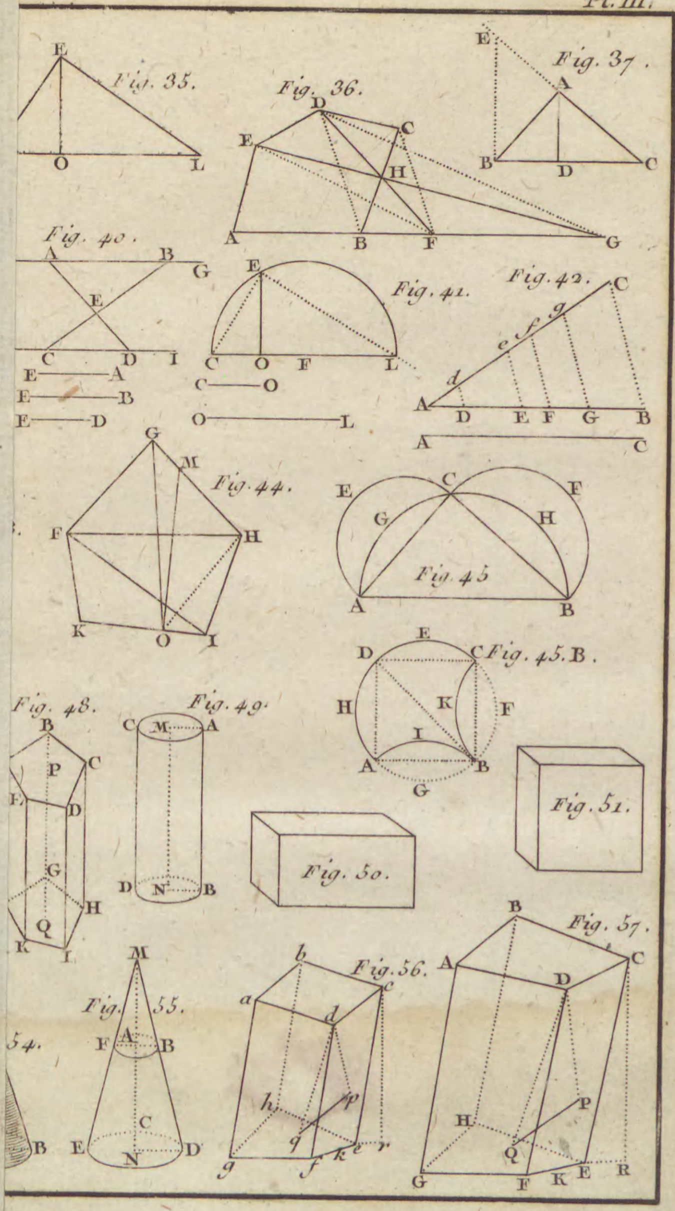


Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 44.
Fig. 45
Fig. 45. B.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

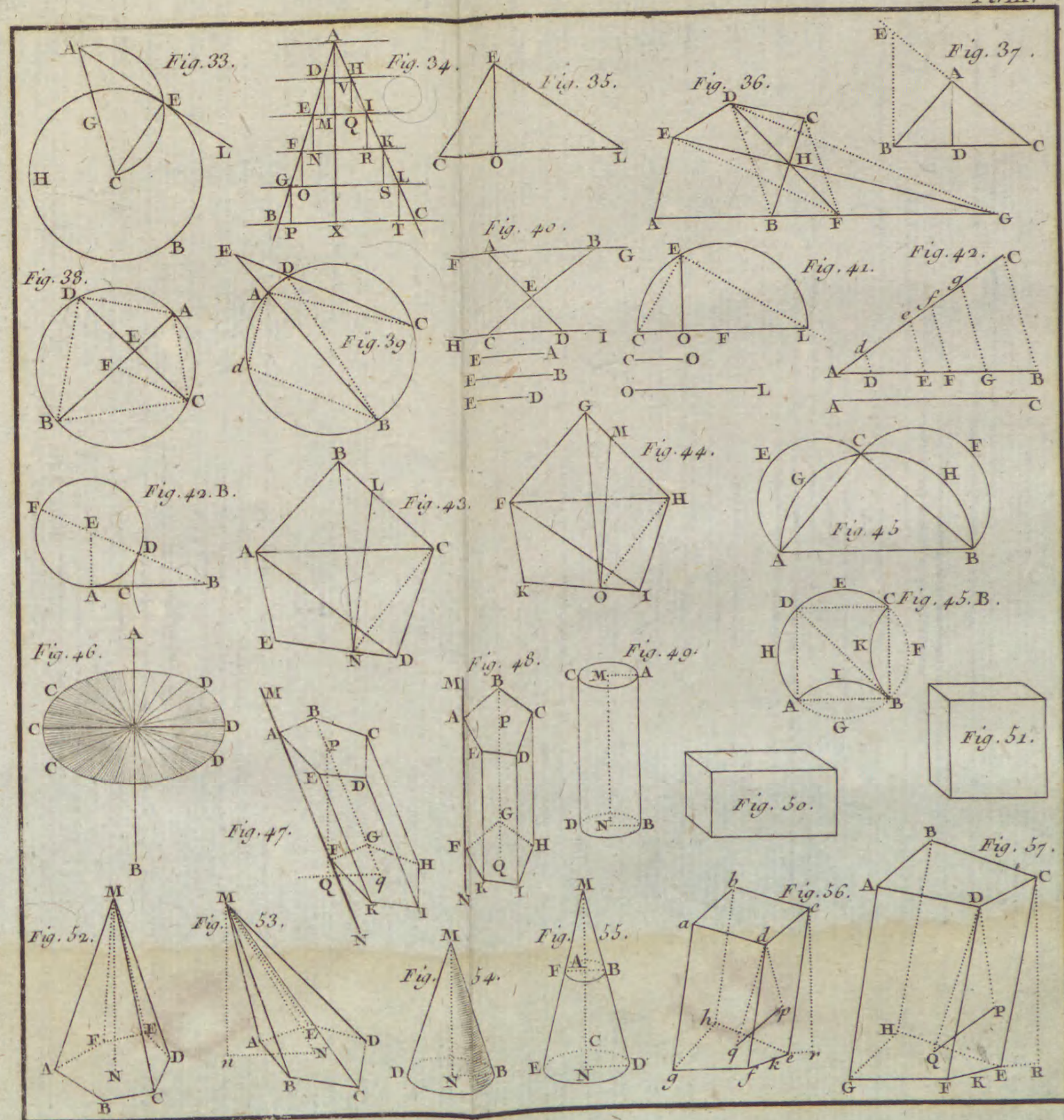


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 42. B.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45
Fig. 45. B.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

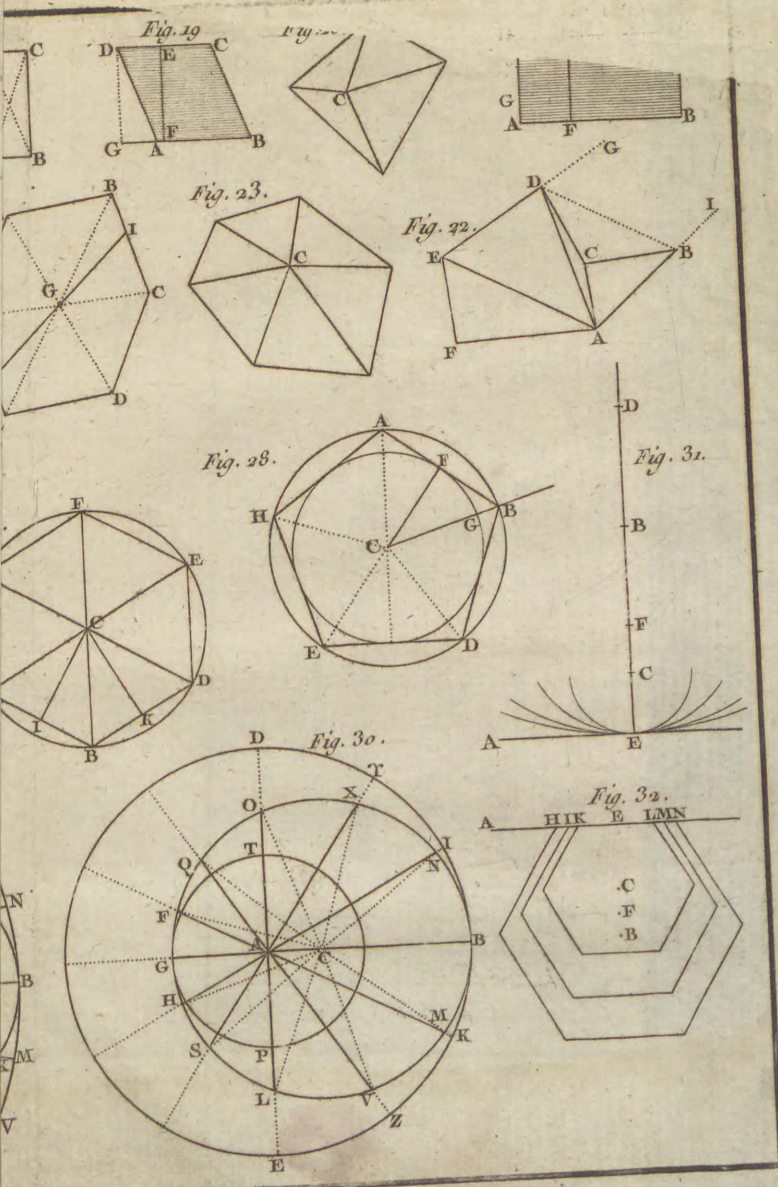


Fig. 19
Fig. 23.
Fig. 22.
Fig. 28.
Fig. 31.
Fig. 30.
Fig. 32.

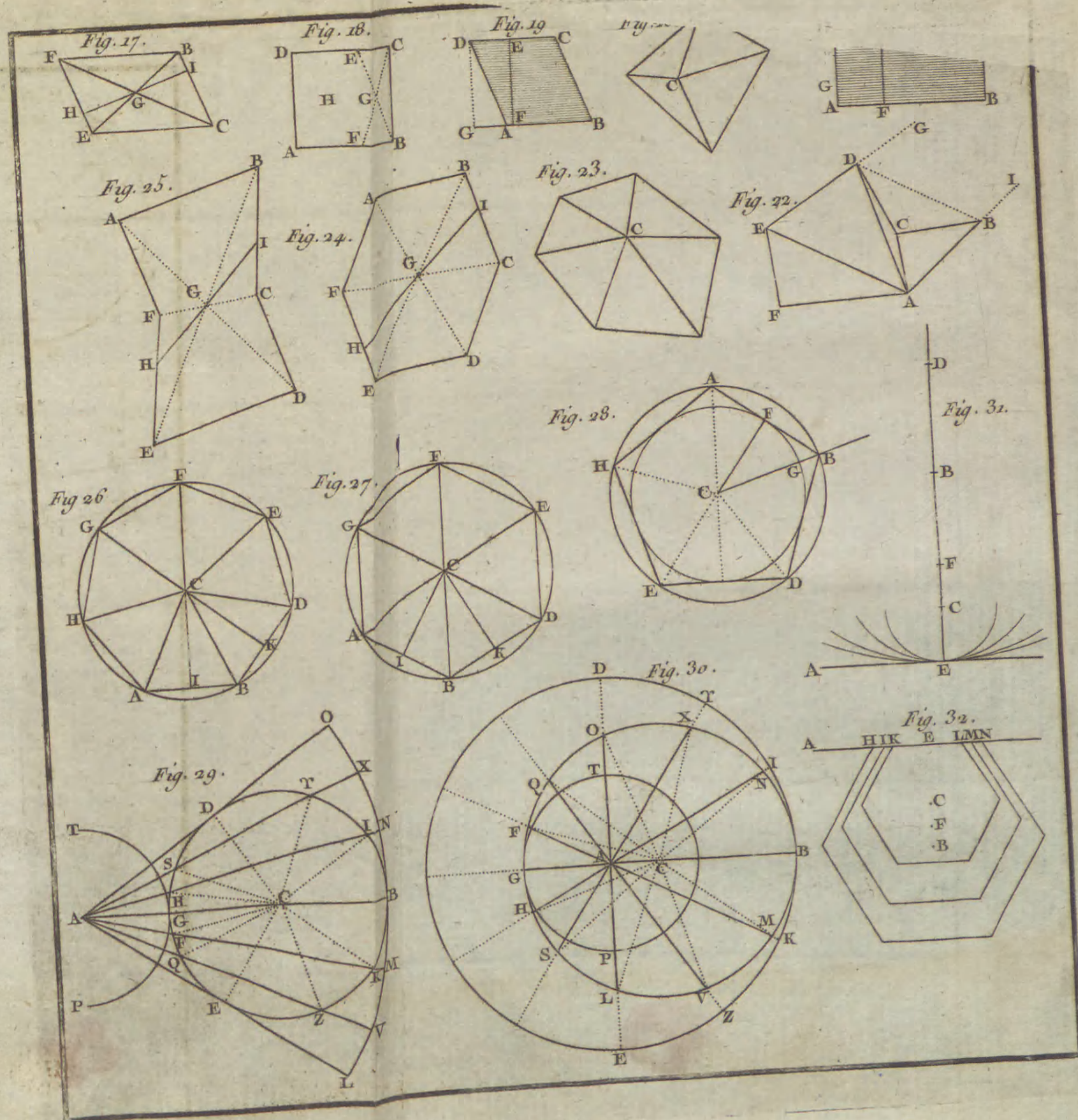


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig 26
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.

Pl. IV.

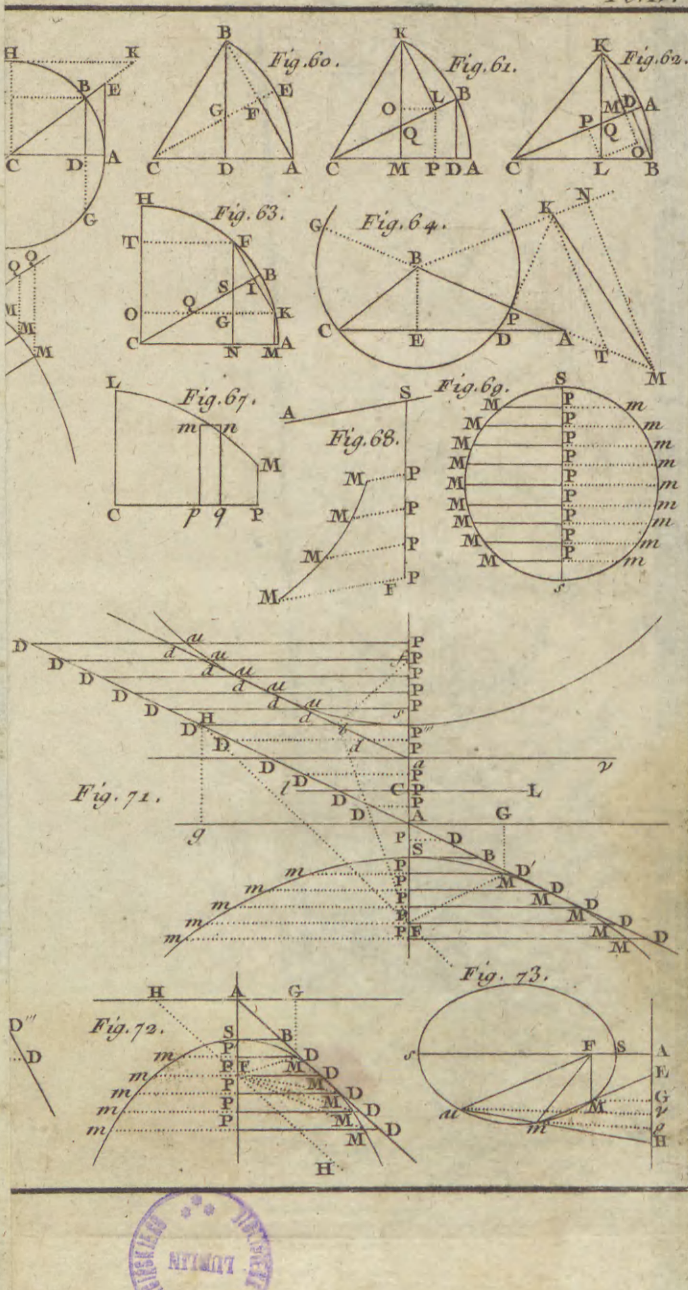


Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.

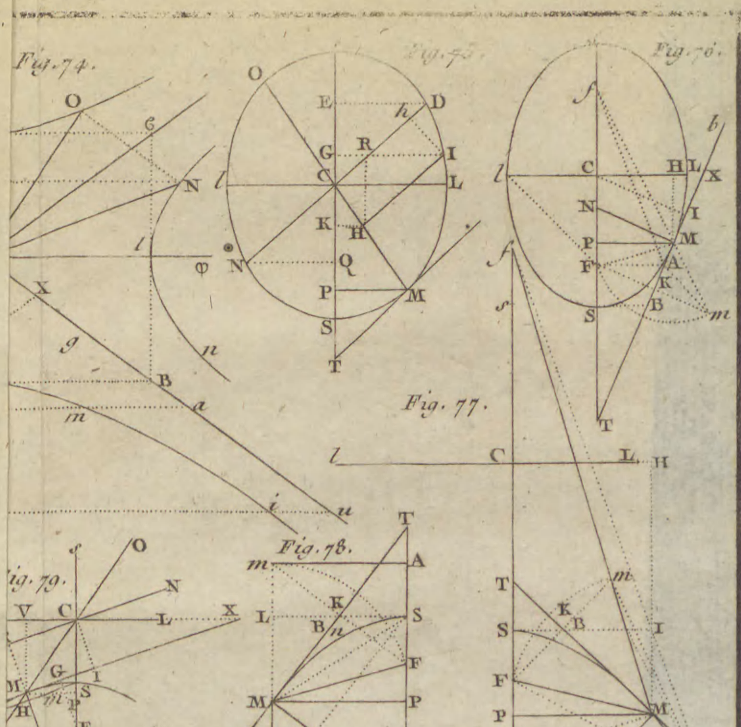


Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.

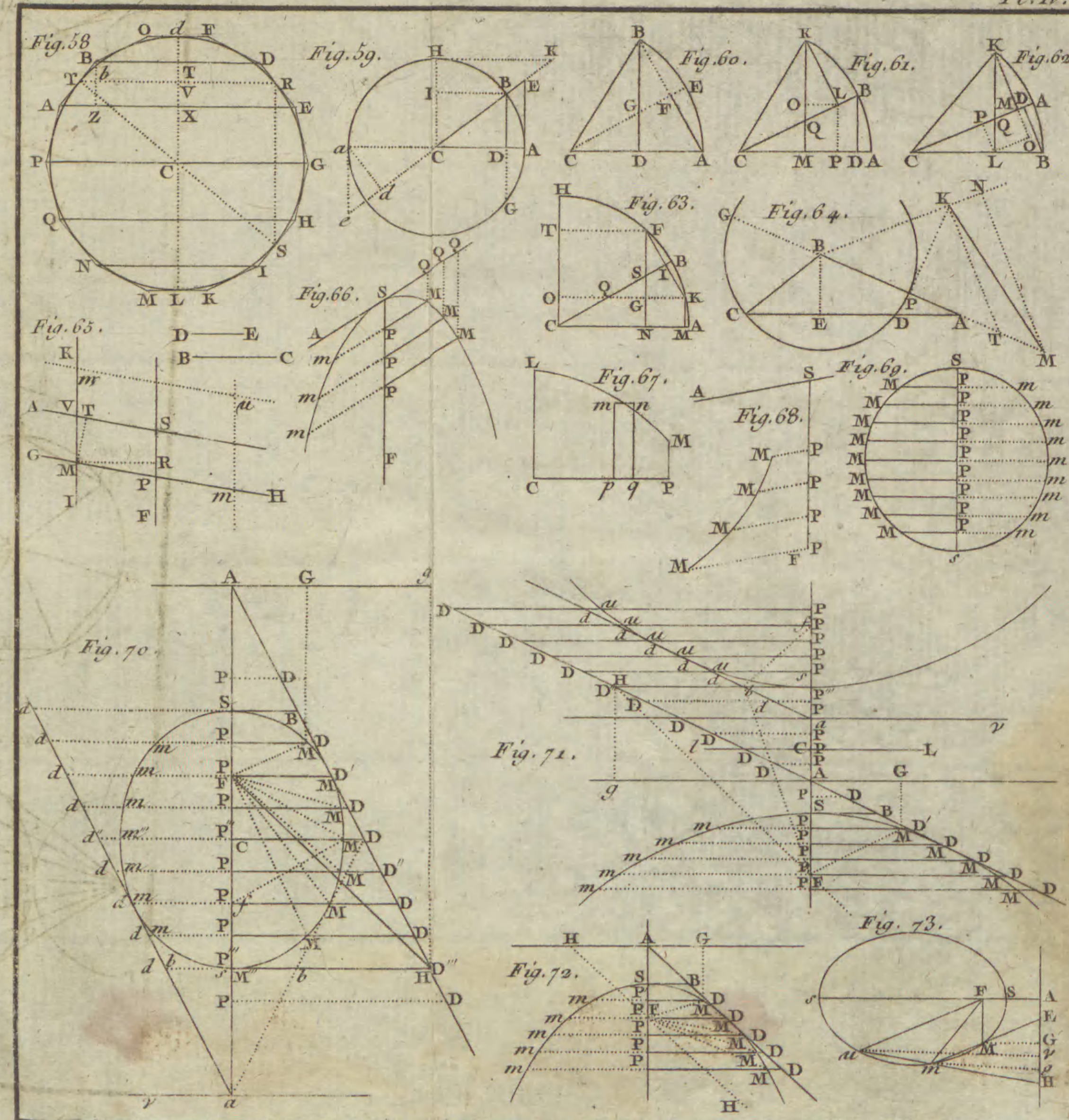


Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.

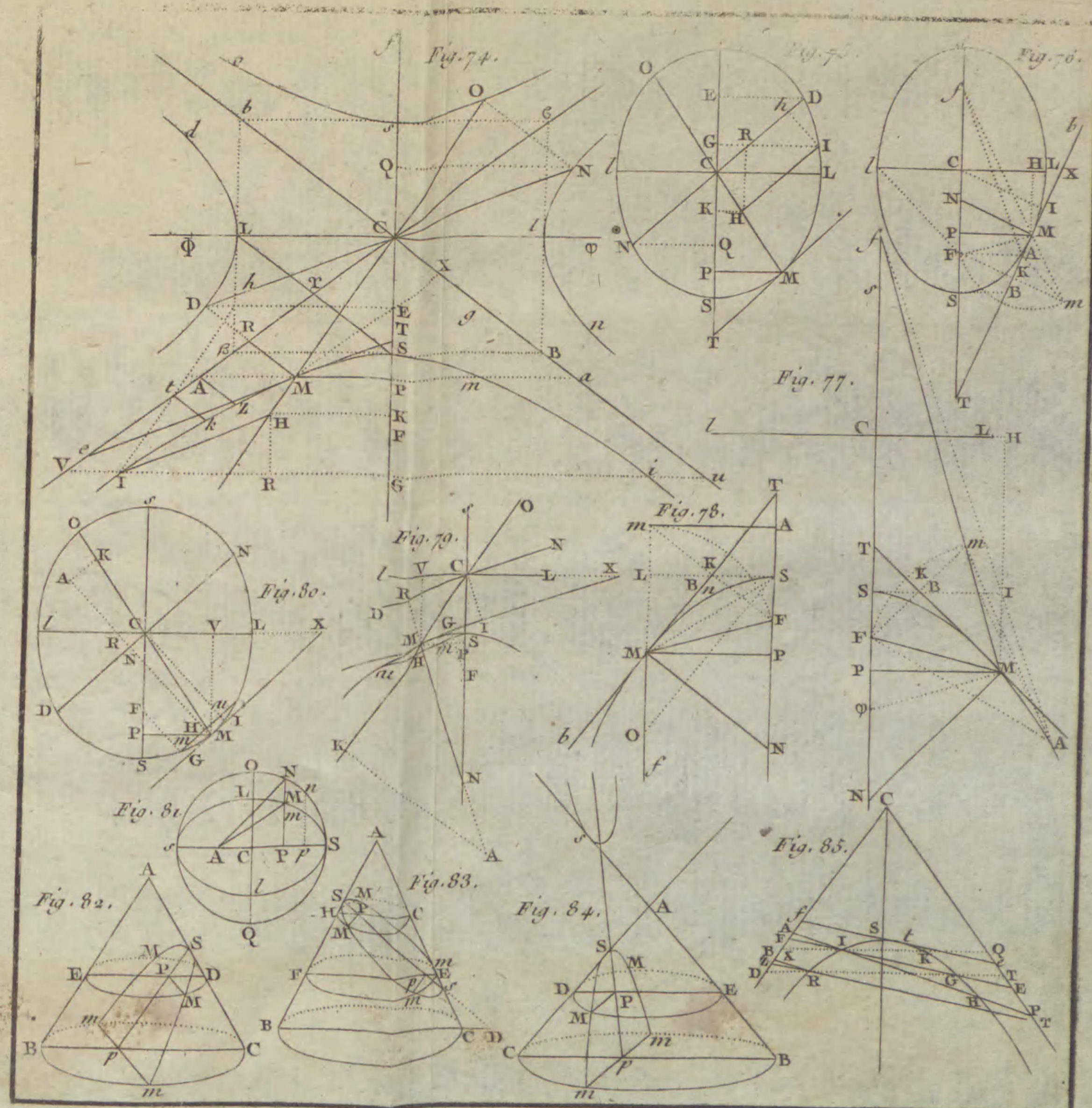


Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.

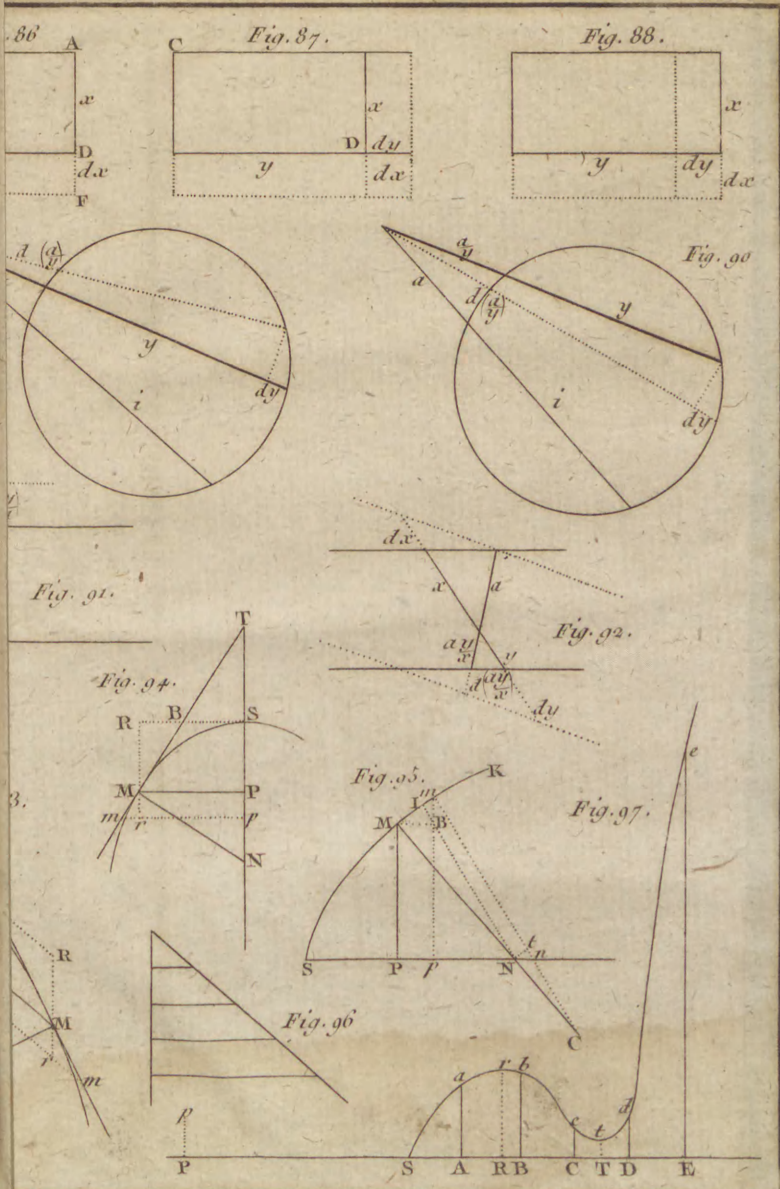


Fig. 86
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 90
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96
Fig. 97.

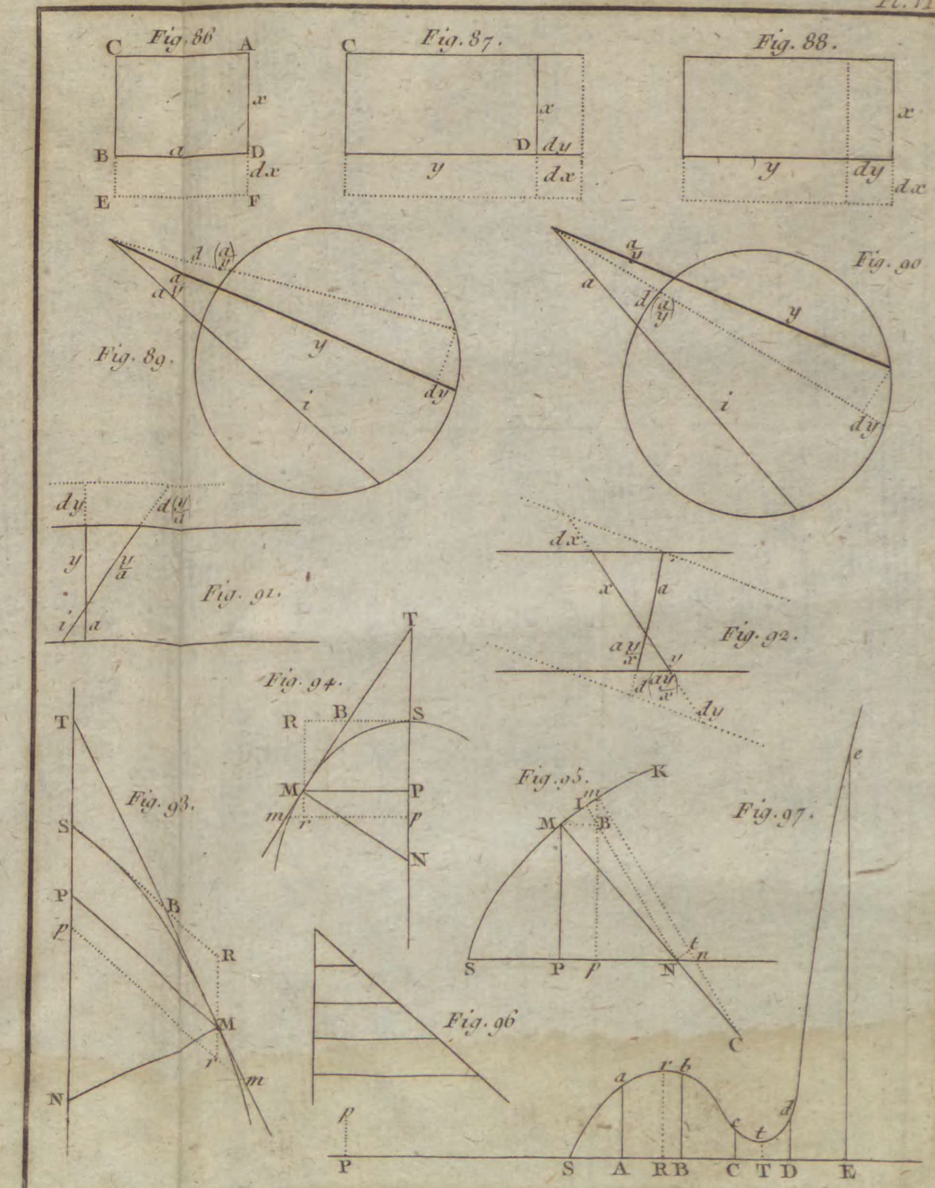


Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.