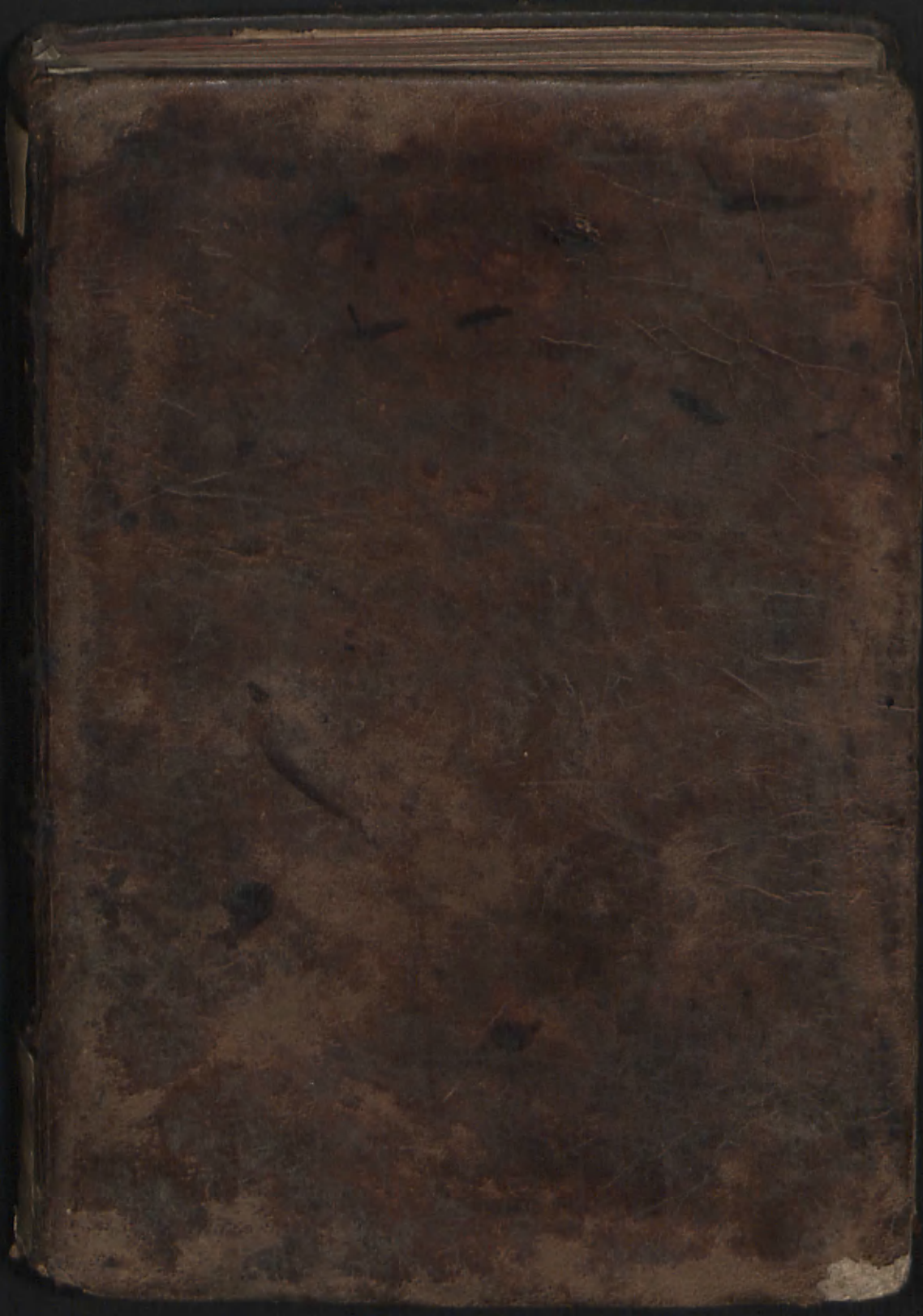




Geometriae et Geonspiratio Geometricae ad ppe

*Hier
Hach*

libr

**BIBLIOTHECAE
CONVENTUS
GENERALIS
VILNENSIS SANCTI
SPIRITUS ORDINIS
PRAEDICATORUM.**

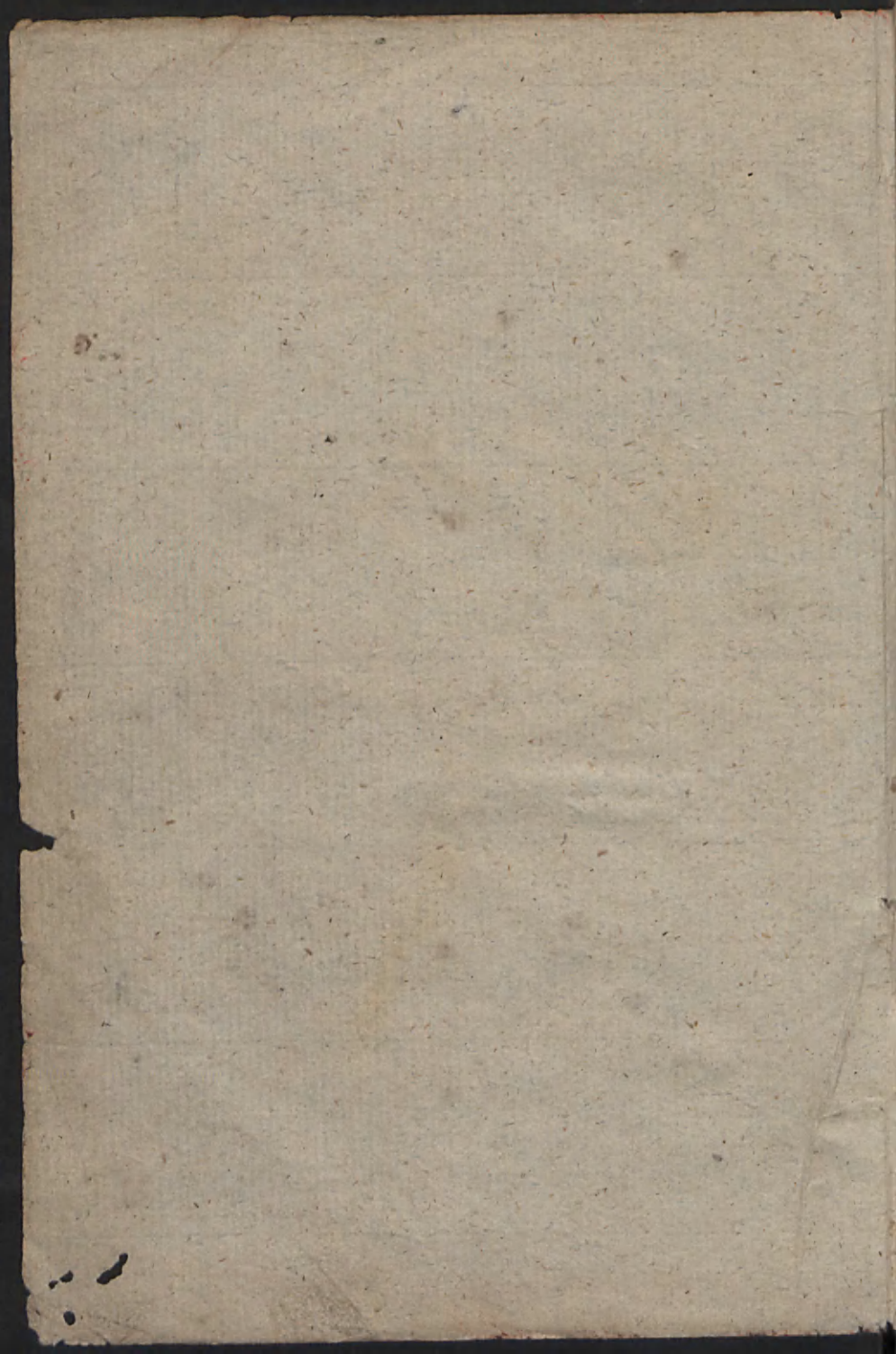
subia de leges equi

*Summae Hypocratis, it spatia curvilinea inter
semiperipheriam de catetis et semiperipheriam de
Hypotenusa in Triangulo Rectangulo intercepta -*

*Bibliotheca Conventus Sancti Spiritus Vilnensis
I Spiritus Ordinis*

O
I

Suppl. B



7

LECTIONES
ELEMENTARES
ALGEBRÆ ET GEOMETRIÆ.

CL. VIRI

R. D. DE LA CAILLE *Academiæ Regiæ Scientiarum
Parisiæ, Suevicæ, Borussicæ, & Goettinganæ, nec
non instituti Bononiensis Membri, ac Professoris
Matheos in Collegio Mazariniano Parisiis,*
IN LATINUM TRADUCTÆ

A
R. P. CAROLO SCHERFER

è Soc: JESU,

In Universitate Viennensi Matheos Professore.



V I L N Æ

Typis S. R. M. ET REIP: ACADEM: SOC: JESU.

Anno 1773.



P-18-g-449

40-1001

MONITUM AUCTORIS.

 Non eô consiliô scribendis hisce Elementis manum admovi, ut primorum Matheseos principiorum capita singula minutim discuterem, quando hac in re jam ali fuô meritô clari, & quorum libri plurimorum teruntur manibus, felicem posuerunt operam. Illud mihi potius constitutum erat, ut quæ scitu necessaria Mathematicarum disciplinarum Elementa habent, & breviter complecterer, & quàm possem perspicuè.

Qui juventuti scientiis hisce imbuendæ se addixerunt, non inviti dabunt, vix al ud majore cum emolumento præstari posse alumno, qui cæteris naturæ dotibus non obscurum jungit discendi desiderium, rerumque veritatem perspiciendi penitus, quàm si ejusmodi juvetur librô, qui unâ aut alterâ complectatur paginâ, quæ singulis prælectionibus Præceptoris voce diffusius explicata audivit. Hac quippe ratione fit, nè dum unico velut obtutu ea omnia percurrere licet, quæ ab Instituteore iam exposita altiùs menti imprimenda sunt, vel tiro afficiatur tædiô, vel animum despondeat, quod utrumque evenire solet, si longus minutimque deductus ratiociniorum nexus, de rebus à sensu alienis, oculis objiciatur, quem quidem aliàs persequi, cum alteri aures præbet, difficile non sit, atque etiam si quæ, cum dicuntur minus videantur perspicua,

illi-

illico Magistri voce planiora redduntur: at vero hæc ut ipse proluxa lectione exequatur, operosum sanè fuerit tironi. Contra autem nihil æquè mentem excitat, nihil ipsam recordandi vim juvat magis, quàm si ita rem habeat incompendium redactam, ut cum illud oculis subiit, verbum eum quodvis perceptæ iam ratiocinationis admoneat, demonstrationumque seriem in animum revocet. Atque hunc in modum literarum studiis qui vacant, animi attentionem conservandi facilitatem acquirunt, magisque ingenium excoli quàm memoriam, fructû uberrimò experiuntur.

At enim cùm præfens liber sæpiùs jam prælo subjiceretur, quamvis in eo complura seu correxerim, seu mutarim, seu addiderim, blandiri tamen mihi non ausim, id affectum me esse, ut consilii mei conditiones omnes explevisse videar; illud tamen præstitum existimo, ut quisquis cum ea animi attentione, quam hoc institutionum genus poscit, Elementa iusta legenda suscepit, præfens Magistri subsidium non requirat. Neque est sanè, quod præterea in libro desideres, qui ut explicaretur, est conscriptus.

Et si autem propositionum, quibus utor, numerus exiguus videri possit, plura tamen complexus sum, quàm quæ apud hujus generis scriptores tractari solent, idque etiam, dum vitandæ obscuritatis causâ plerùmque demonstratio amplior reddi debuit. Porro in theorematibus, quæ ad superficiem,

& solidorum dimensionem pertinent, demonstrandis, *indivisibilem*, ut appellant, methodo utar, non eò sane, quòd à veteribus adhibitæ, atque ad omnem rigorem exactæ præferendam existimen, sed quod plures multo, & tironum captui magis accommodatas demonstrationes suppeditet; quod numerum theorematum, quæ alias præmittenda forent, admodum contrahat; quod consimilem atque adeo eandem in omnibus, quæ ad Elementa pertinent, applicationem patiatur. Aptior igitur proposito meo fuit, eòque etiam præstat, quòd juvenum animos, quantum quidem fieri potest, brevi temporis intervallo eò perducatur, unde in universum Geometriæ systema prospectus quidam pateat; quæ res, sua jam propensione huc inclinatis, fere nunquam non acriores subdit stimulos profundius in Mathematicas disciplinas penetrandi.

Hanc qui methodum rejiciunt, eò id faciunt potissimum obtentu, quòd fieri nequeat, ut tiro ante tempus demonstrationum rigori assuescat. Equidem dicerentur hæc apprimè ad persuadendum apte, si demonstrationes omnes, quæ in Algebræ & Geometriæ Elementis adhibentur, aut partem saltem maximam hac una è methodo essent petitæ, & qui *indivisibilem* principiis semel imbutus est, hanc in omnibus perquisitionibus suis insistere viam cogere-
tur, quæ (ut, quod res est, dicamus) ne quidem ipsa unquam ad errorem deduceret. Verum cum fieri nequeat, ut quis cognitionem suam ad paulò sublimi-

miora provehāt citra librorum aliorum lectionem, quibus peculi ares Matheseos partes accuratius pertractantur, & quorum alii veterum, recentiorum alii methodō conscripti sunt, nunquam non in promptu habebit principia, è quibus, ut volet, Theoremata omnia demonstret, quæ ad superficierum & solidorum mensurationem sunt necessaria. Illud curavi quoque, ut majusculo Characterē exhiberentur, quæ ad ipsa Elementa pertinent, quorumq; notitiā carere non possumus, quo scilicet ab iis secernerentur commodè, quorum paulò minor est necessitas. Itaque qui nonnisi primis Matheseos principiis animum imbuerē constituerunt, ea, quæ typis minutioribus excusa sunt, omittere poterunt: quibus vero propositum est alios aliquando evolvere libros, qui res Elementari methodō paulò subtilius exequuntur; hi nil sibi transiliendum sciant, sed omnia accurata cum diligentia esse perscrutanda.

Porro ut observet, velim, Lector, quæ minoribus inserta sunt literis, ejusmodi esse, ut nisi quis principia ipsa majore Characterum formā proposita, rite animo comprehenderit, ad ea gradum facere non possit; ut adeo illis prius perfectè intellectis, hæc secundæ lectioni sint reservanda.

Denique eosdem fere numeros retinimus in hac editione, qui in prioribus singulis articulis præfixi erant, ut citationes, quæ in aliis nostris Lectionibus occurrunt, cuivis essent accommodatæ.



LECTIONES ELEMENTARES MATHematicæ.

*Notio Generalis Matheſeos, & præcipuorum
Terminorum Definitiones.*

I.



*Matheſeos nomine omnes eæ ſcientiæ cen-
sentur, quarum objectum magnitudo
eſt, vel quantitas.*

2. Cum autem *quantitatem* vel
magnitudinem dicimus, id omne intel-
ligimus, quod e partibus compositum
poſeſt concipi; & quidquid augmenti, vel decrementi
capax eſt.

3. Porro *quantitas* conſiderari poſeſt, ſeu ut com-
poſita e partibus ſeparatis inter ſe, ſeu conſtans par-
tibus unitis, atque invicem connexis. Exempli cauſa,
acervus arenæ eſt *quantitas*, cujus partes ſeparatæ
A ſunt;

sunt; baculus, est magnitudo partibus unitis, continuisque prædita.

4. Quantitas composita e partibus separatis, exprimitur numeris, & *Arithmetices* objectum constituit.

5. Quantitas, cujus partes continuæ sunt, *extensum* appellatur, estque *Geometricæ* objectum.

6. Ut adeo Arithmetica & Geometria universas Mathematicas disciplinas complectatur, eæque, quibus Astronomiæ, Mechanicæ, Opticæ &c. nomina obtigere, nil aliud revera sint, nisi Arithmeticæ & Geometriæ ad peculiaria objecta applicatio, ad motus putata Astrorum, ad leges impactûs, & æquilibrii, ad luminis affectiones &c. Fieri itaque nequit, ut scientiarum istarum quis gnarus evadat, nisi Arithmeticæ Geometriæque notitiam habeat.

7. Matheseos utilitas ad omnem fere humanam cognitionem pertinet, ut verum inter, falsumque discrimen statuatur; ut veritatum jam repertarum evidentiam pariat, ut detegat novas, ut reliquis scientiis certitudinem plenam, perfectionemque adferat, ad quam ratio humana per se potest pertingere.

8. Atque ut ad hanc perfectionem pertingant Mathematici, imprimis *definitiones* adhibent, seu verborum notionein, rerumque, de quibus iis sermo est, naturam nitide, præciseque determinant: tum statuunt *axiomata*, hoc est, principia tam clara, ut eorum evidentiae nemo vel minimum quid dubii cum ratione obmovere possit; quandoque etiam *postulata* addunt, id est, rem factu tam facilem sibi dari poscunt, ut negari nequeat. Ex hisce principiis postulatisque *Propositiones* deducunt, quarum nexum necessarium cum axiomatis luculento ratiocinio, quod *demonstrationem* appellant, ostendunt. Denique e propositionibus jam demonstratis *Corollaria* inferunt, quæ nihil sunt, quam veritates inde manifeste profluentes, ut non aliis argumentis evinci debeant.

Hunc

Hunc in modum si qua materia pertractetur, *Methodus Geometrica* adhiberi dicitur.

9. Duplex est propositionum genus, aliæ, quas *Theoremata* nuncupant, quæque magnitudinis proprietates demonstrant; aliæ quas vocant *Problemata*, vel theorematum ope, demonstratarum proprietatum applicationem ad usum ostendunt, vel qua ratione novæ detegi possint, docent.

10. Ut seu via ad demonstrationem præparetur, seu ipsa demonstratio reddatur clarior, non nunquam *Construções*, *Lemmata* & *Scholia* adhibentur.

11. Est vero constructio partium earum recta coordinatio, quæ ad demonstrandum Theorema sunt necessariae: seu etiam ordo ipse, qui in Problematis resolutione est tenendus.

12. Lemma est veritas, cujus demonstratio ideo solum præmittitur, ut sequentium propositionum evidentia inde deduci possit.

13. Scholium quandoque est observatio quæpiam rei notatu dignæ, quandoque est propositionis ejusdem demonstratio alia ratione inita; quin etiam totius theoriæ in antecedentibus diffusius expositæ summaria quædam repetitio.

AXIOMATA PRÆCIPUA

14. I. Totum est majus sua parte.

15. II. Totum est æquale suis partibus simul sumtis.

16. III. Quantitates, quæ sunt singulæ æquales eidem alteri, sunt æquales inter se.

17. IV. Si quantitates æquales inter se, æqualiter augeantur, vel æqualiter minuantur, etiam auctæ, vel imminutæ manent æquales.

18. V. Si quantitates inter se æquales augeantur,

tur, vel minuantur inæqualiter, fiunt inæquales.

19. VI. Si quantitates inter se inæquales augentur, vel minuantur æqualiter, semper erunt inæquales.

PARS PRIMA. ARITHMETICA.

*De natura Numerorum; de eorum formatione,
& valore.*

20. **Q**uantitas numeris expressa ejusmodi est, quam velut in plures partes æquales divisam plerumque concipimus: & ex partibus istis si quæpiam solitarie spectetur, *unitas* dicitur. Itaque numerus est collectio unitatum; & si cui unitati altera adjungatur, earum summa numerum binarium, seu *duo*, efficiet; si denuo his addatur unitas, numerus *tria* habebitur, & sic deinceps.

21. Extensum reipsa partibus infinitis constat, ut numero finito exprimi nequeat, nisi si eas consideremus velut in plures collectiones minores, numero finitas ac inter se æquales, distributas. Dum igitur numero extensum designamus, indicamus solummodo, in quot ejusmodi aggregata particularia partes omnes divisas concipiamus: & tum quidem unitatis vicem id genus collectio subit, quæ ipsa adeo nequaquam est indivisibilis, sed suis etiam partibus constat, quarum respectu numerum constituit. Atque hinc fractiones originem ducunt.

22. Ut numerum quemlibet designare possimus, decem sequentibus characteribus, siue cyfris utimur.

zerus - - - - 0	quinque - - - - 5
unum - - - - 1	sex - - - - 6
duo - - - - 2	septem - - - - 7
tria - - - - 3	octo - - - - 8
quatuor - - - 4	novem - - - - 9

Itaque dum *decem* indicare volumus, scribimus 10, quod decadem denotat; dum *undecim* significamus, utimur hac nota 11, velut decadis & unitatis signo; *duodecim* exprimit 12, five decas cum duabus unitatibus &c. Pro *centum* adhibemus 100, id est decadam decadem; pro *centum & unum*, 101 substituimus, seu decadem decadam cum unitate &c.

23. Ex quo manifestum fit, notas, dum singulæ ponuntur, non alium habere valorem, quam superiore tabella expositum; at dum plures in eandem conjunguntur seriem, eum cuius tribuendum esse, quem locus, quo alias præcedit, sequiturve, exigit. Valor autem localis a dextera sinistram versus computatur, ut nota quælibet ad dextram contiguæ decadem designet, ita quidem ut hoc sese ordine excipiant: numerus simplex, five *unitas*, *decas*, *centenarius*, *millenarius*, *decas millenariorum*, *centenarius millenariorum*, *decies centena millia*, vel *millio*, *decas millionum*, *centenarius &c. millionum*, *bimillio* five *billio*, *decas billionum*, *centenarius &c. billionum*, *trimillio*, aut *trillio* &c.

24. Ut ergo numerum secundum valorem suum rite enunciemus, exempli causa 2639, advertendum est, primam a dextra parte notam 9 esse numerum simplicem novem unitatum; huic contiguam 3 exprimere tres decades, seu triginta: sequentem 6 valere sex centenarios, vel sexcenta: postremam denique 2 denotare duos millenarios, aut duo millia. Quare si converso ordine iidem valores repetantur, dicendum erit, numerum 2639 significare duo millia, sexcenta, triginta & novem.

25. Munus zeri, seu notæ 0, est, vel ut simpliciter quantitatis numericæ carentiam exprimat, seu *nihil*, cum scilicet nullum alium numerum sibi præfixum habet; vel verò ut, dum locum quempiam occupat, reliquis notis valor localis conservetur. Sic quando ad significandum *decem*, vel *decadem*, scribimus 10, unitati zerum adjungimus eum in finem, ut secundo loco constituta intelligatur, in quo decadis valorem habet. Dum ducenta & septem indicamus, utimur notis 207; ut zero inter 2 & 7 interjecto advertatur, primam 2 centenariorum locum tenere.

26. Cum notis numericis magnitudo quæpiam data exhibenda est, veluti sexaginta tria millia, quadringenta & tria, animadvertendum est, numerum hunc compositum esse e *sex* millenariorum decadibus, *tribus* millenariis, *quatuor* centenariis, *zero*, seu *nulla* decade, & *tribus* unitatibus. Hinc primo scribendum est 6, quo sex millenariorum decades indicentur; dein ad dextram adjungendum, 3 pro tribus millenariis; postea 4 pro centenariis; zerus in loco decadum; tandem 3 pro unitatibus, ut adeo numerus propositus sequente ratione exprimatur 63403.

27. Numerum *simplicem*, sive *unitates* etiam, appellabimus deinceps numerum quemlibet, cujus valor decadem non adæquat, hoc est, omnes ab 1 usque ad 9 inclusive: *Numeros compositos* dicemus omnes, qui pluribus, quam una nota, constant, sive a 10 omnes in infinitum,

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICÆ.

28. Quoniam Mathematici quantitatem ea solum ratione spectant, qua augmenti, vel decrementi capax est, sequitur, *duplicis generis operationes in numeris posse institui; alteram scilicet, qua una, pluresve quantitates*

datae augentur, quam additionem appellant; alteram, qua quantitas data alia quantitate pariter data imminuitur, vocaturque Subtractio.

Dum operatio in numeris simplicibus instituerenda est, nulla opus est regula, utpote cum hosce citra ullum negotium combinemus; at vero si numeri dentur compositi, ad regulas recurrendum est, quibus nempe continetur ars illa efficiendi per partes, ac successively, quod in toto, atque unico mentis actu præstare non possumus, quæ ob suam brevitatem ad magna sese non extendit.

De Regulis Additionis.

29. Per Additionem plures quantitates datæ in unum totum aliquod componuntur, quod etiam *Totum* seu *summa* earum magnitudinum dicitur.

30. I. Dum quantitates datæ sunt numeri simplices, regulis non indigemus, ut summam earum reperiamus, cum nemini non sit clarum, dudumque notum, verbi gratia si 2 addamus ad 2, totum fore 4; id quod compendii causa hunc in modum exhibemus $2 + 2 = 4$ (signum enim + denotat *plus*; ac alterum = exprimit *æquale*). Pari ratione nemo nescit, 3, 6, & 8 simul juncta esse 17, vel $3 + 6 + 8 = 17$.

31. II. Quod si dentur numeri compositi, uti si quærat^r summa ex 432, & 363, en regulam in additione tenendam: scribe numerum alterum infra alterum ita, ut unitates infra unitates, decades infra decades, centenarii infra centenarios &c. positi singulas series verticales constituent: duc lineam transversam, & initio a dextra facta, versusque sinistram progrediendo, collige summam unitatum, 432
tum decadam, dein centenariorum &c. scribe sin- 363
gulas has summas infra lineam sub columna corre- 795
spondente, ex qua scilicet quævis collecta est. Exempli cau-
sa

sa in prima columna habentur $2 + 3 = 5$; scribantur inferius 5. In altera sunt $3 + 6 = 9$; subscribantur 9. In tertia $4 + 3 = 7$; & positis infra lineam 7, quæ sita summa obtinetur 795.

Ratio operationis ex Axiomate II manifesta est, quod scilicet totum æquale sit suis partibus omnibus simul sumtis.

32. Observa I. Quando summa ex una columna collecta excedit 9, sive dum componitur ex decadibus & unitatibus, solæ unitates infra lineam scribendæ sunt, numerus vero decadem in sequentem columnam rejiciendus. Sequentia exempla rem illustrabunt.

Oporteat addere hosce tres numeros 6078, 9198, 483: scribantur igitur juxta regulam
 alii infra alios, & erit $8 + 8 = 16$, $+ 3 = 19$;
 hoc est, summa primæ columnæ conficit
 19, seu decadem unam cum novem unitatibus. Unde huic unitatum columnæ subscribantur 9, decadis vero ratio in sequente habeatur. Quare habebitur $1 + 7 = 8$, $+ 9 = 17$, $+ 8 = 25$. Ob rationem jam expositam non nisi 5 scribantur infra secundam columnam, servatis 2 decadibus pro sequente; in qua fiet $2 + 0 = 2$, $+ 1 = 3$, $+ 4 = 7$, & scribatur sub linea 7. Denique in postrema est $6 + 9 = 15$; & quia nulla alia sequitur, utraque nota 15 ponatur. Habebitur summa quæ sita 15759.

Subjicimus exempli causa additiones alias juxta regulam factas, in quibus tyro exerceri possit.

4950	101740	147	40000
5050	270	45	59697
10000	21909	312	190
	123919	56	1009
		200	9897
		760	110793

33. II. Ut sciatur, num quis error in additione commissus sit, repetatur operatio, atque summa colligatur ex singulis columnis ab infima nota fursum ascendendo. Equidem manifestum est, eandem debere prodire, quæ invenitur descendendo a suprema ad infimam.

34. III. Si idem numerus sibi ipsi aliquoties addi debeat, uti sexies, octies, vigesies, vel centies, &c. tum vero additione compendiaria utendum est, quæ *Multiplicatio* dicitur, a nobis paulo inferius explicanda.

De Regulis Subtractionis.

35. Per subtractionem data quantitas minuitur quantitate alia itidem data: ejus ope cognoscimus, quantum altera major, minorve sit altera, quisve *excessus* majoris sit supra minorem, seu quænam utriusque sit *differentia*.

36. In numeris simplicibus subtractio omni caret difficultate. Nemo enim non videt, quod si 2 ex 5 demantur, 3 supersint, atque ideo 3 sint excessus 5 supra 2, vel etiam differentia inter 2 & 5. Expressio compendiaria hujus operationis est $5 - 2 = 3$ (signum — indicat minus;) item $9 - 4 = 5$; $8 - 7 = 1$.

37. In numeris compositis sequens servetur regula: numerus subtrahendus altero minor esse debet; scribatur igitur minor infra majorem eodem modo, ac in additione præcepimus: tum infra singulas columnas ponatur excessus unitatum, decadum, centenariorum &c numeri superioris supra unitates, decades, centenarios &c numeri inferioris; habebitur excessus totus, sive differentia inter numeros datos.

EXEMPLUM: Sit numerus 243 subtrahendus ex 795: ubi minor subscriptus majori est, fiet impr

mis $5-3=2$: poniturque hæc nota 2 infra lineam: dein $9-4=5$, & 5 priori 795
243
versus sinistram adjungitur sub secunda 552
columna: denique ob $7-2=5$, rursus hoc residuum subscribitur, ut differentia seu residuum totum evadat 552.

38. Ratio est, quod subtractis ex 795. tot unitatibus, tot decadibus, centenariis &c. quot in 243 continentur, necesse sit, ut numerus unitatum, decadum, centenariorum &c. remaneat, qui excessum numeri 795 supra 243 æquet.

39. OBSERVATIO. Quando in columna quapiam nota inferior major est superiore, huic (superiori) decas addenda est, atque excessus superioris decade auctæ supra inferiorem subscribendus; ut autem hujus decadis compensatio fiat, nota versus sinistram proxima in numero minuendo multiplicanda est unitate.

EXEMPLUM. Sit numerus 38 ex 64 subtrahendus; postquam juxta regulam descripti sunt, apparet, $4-8$ fieri non posse; verum 64
 $14-8=6$; quare 6 subjiciatur primæ columnæ; & quoniam decas addita fuit ad 4, in columna alterâ nequit, ut alias, 38
poni $6-3$, sed tantum $5-3=2$; subscripto 2, differentia quæsitæ est 26. 26

Exempla alia	485000	50000	56078	489249
	402	30000	1003	299999
	484598	20000	55075	189250

40. II. Ut constet, subtractionem rite esse peractam, excessus repertus addatur numero minori; evidens enim est, summam debere numero majori æqualem fieri.

41. III. Si numerus idem sæpius, v. g. sexies, vigesies, centies &c. ex eodem subtrahi debeat, ut inveniatur, quoties major minorem excedat, adhibenda est subtractio compendiaria, quæ *Divisio* appellatur.

D E

RELIQUIS ARITHMETICÆ

OPERATIONIBUS.

Quamvis juxta notionem Arithmetices superius allatam (28) ea duabus tantummodo operationibus absolvatur; quia tamen plures emergunt casus (quos N. 34, & 41 indicavimus,) in quibus nimium longæ evaderent, earum sequentia compendia sunt excogitata.

De Multiplicatione.

42. Multiplicationis usus est in reperienda citra longiorem calculum summa alicujus numeri sibi ipsi pluribus vicibus addendi; ita si quis quærat summam, quæ ex 12 novies sumptis oritur, necesse erit, ut efformet seriem e 12 novies scriptis, indeque summam 108 colligat (31). nisi multiplicationem adhibeat, quæ eandem summam 108 sine ejusmodi ambagibus inveniet.

43. Atque in exemplo proposito numerus 12 *Multiplicandus* dicitur, 9 *Multiplicator*, & 108 *productum*, sive *factum*; communi vocabulo tam multiplicandus, quam multiplicator *factores* appellantur.

Igitur clarum est, productum esse summam multiplicandi toties summi, quot multiplicator unitates continet: sive, quod idem, in producto toties contineri multiplicandum, quoties unitas in multiplicatore.

44. Ex multiplicatione ergo hæc proportio deducitur: *unitas est ad multiplicandum, ut multiplicator ad productum.*

45. Si loco 12 in una serie novies scripti, ponatur 9 duodecies, patet, in utraque eandem summam 108 debere colligi; atque hinc intelligitur, *perinde esse, uter e duobus numeris pro multiplicando sumatur, cum alter semper futurus sit multiplicator.*

46. Pro multiplicatione numerorum simplicium nulla præscribi potest regula, cum quisque videat, factum ex 2 in 3 ductis esse 6, cujus compendiaria significatio est $2 \times 3 = 6$ (signum $\times$ enunciat *multiplicatum per, vel ductum in*); similiter $3 \times 4 = 12$, $7 \times 5 = 35$ &c. Quin opus est producta numerorum simplicium memoria tenere, ut regularum multiplicationis usus expeditior sit. Quem in finem paulo majora sequente tabella subjicimus.

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$
$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$	
$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$	
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$	
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$	
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$	
$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$	
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$	

47. Si dentur duo numeri, v. g. 32 & 24, ut obtineatur eorum factum, imprimis alteruter, quem quis multiplicatorem esse velit (plerumque minor assumitur) subscribitur multiplicando, quemadmodum in additione; in præsentē exemplo ponitur 24 sub 32: tum vero a dextra versus sinistram progrediendo ponuntur producta singularum notarum multiplicandi ductarum in singulas notas multiplicatoris infra lineam. Unde scribuntur imprimis producta e notis singulis multiplicandi in unitates multiplicatoris, dicendo exempli causa $2 \times 4 = 8$, & ponuntur 8 sub unitatibus utriusque factoris; dein $3 \times 4 = 12$, & adjunguntur priori notæ sub linea 12 vers9 sinistram. Dein itidem a dextra versus sinistram scribuntur producta singularum notarum multiplicandi in decades multiplicatoris; ut si v. g. dicas: $2 \times 2 = 4$, scribe 4 infra notam 2 multiplicatoris: $3 \times 2 = 6$, adjuuge 6 priori notæ 4. Denique summa horum productorum colligatur, & habebitur factum totale 768.

32	
24	
128	
64	
768	

48. Ut operandi methodus rite intelligatur, ita quisque apud semet ratio cinari potest: evidens est, productum ex 32 in 24 esse æquale (43) decadibus & unitatibus numeri 32 toties sumtis, quæ in 24 unitates continentur, hoc est sumtis quater (quippe 4 sunt in 24 unitates simplices), & bis denis vicibus, quia 2 in eodem adsunt præterea decades. Ergo cum 2 unitates multiplicandi quater acceptæ efficiant 8 unitates, has imprimis in loco unitatum subscribere debeo. Deinde 3 decades multiplicandi sumtæ quatuor vicibus conficiunt 12 decades: quare prioribus 8 unitatibus versus sinistram 12 adjicienda sunt, ut scilicet locum decadum occupent.

Progrediendum jam ad duas decades multiplicatoris, & cum 2 unitates multiplicandi acceptæ bis denis vicibus producant 4 decades, sub secunda ver-

sus



sus sinistram columna scribenda sunt 4, seu, quod idem, sub eodem multiplicatoris loco, ex quo præfens ejusdem nota accepta est, cum factum 4 jam decades designet, ideoque etiam in decadam loco constituendum sit. Denique tres decades multiplicandi bis denis vicibus acceptæ efficiunt 6 decades decadam, hoc est 6 centenarios; unde 6 adscribi debent ad 4 versus sinistram partem in centenariorum loco: & factum ex 3 decadibus & 2 unitatibus multiplicandi in duas decades multiplicatoris erit sexaginta & quatuor decades, seu sex centenarii, & quatuor decades. Superest tantum, ut productum istud addatur prius invento, ut obrineatur factum totale ex omnibus partibus multiplicandi in omnes partes multiplicatoris, 768 scilicet.

EXEMPLUM Aliud multiplicationis numerorum paulo magis composito-
rum. Quæritur productum ex 564 in
249: utroque numero secundum præscriptam regulam disposito, multiplice-
tur primo 564 per 9 unitates multipli-
catoris, dicendo $4 \times 9 = 36$; ponatur 6
in loco unitatum, & 3. reservetur; $6 \times 9 = 54$, sed quoniam superfuerunt e priore facto 3, dicatur $54 + 3 = 57$, & scribatur 7, 5 in sequentem classẽ rejecto; $5 \times 9 = 45$, & $45 + 5 = 50$, quod totum scribatur, cum nihil superfit in unitates multiplicatoris ducendum.

Sumantur dein 4 multiplicatoris decades, per quas multiplicetur 564; nempe $4 \times 4 = 16$; retenta decade ponatur 6; $6 \times 4 = 24$, + 1 = 25; reservato 2, & 5 subscripto, est ulterius $4 \times 5 = 20$, + 2 = 22; quod totum exprimendum est. Denique simili ratione 564 ducatur in 2 centenarios alterius factoris, scilicet $2 \times 4 = 8$, quod subscribitur loco centenariorum: $6 \times 2 = 12$, servatur 1, & 2 præfiguntur centena-

nariis; $5 \times 2 = 10$, $7 \times 1 = 11$, quo ad sinistram adjecto colligitur summa factorum particularium, eritque factum totale 140436.

49. OBSERVA I. Si vel in uno, vel in utroque numero in fine adsint unus, pluresve zeri, operatio contrahitur, solis notis reliquis multiplicatis, factoque totali tot adjectis zeris, quot in utroque simul numero aderant. Exempli causa ut obtineatur factum ex 406000 in 10700, multiplicetur 406 per 107, & summa factorum partialium 43442 adjiciantur in fine 5 zeri; erit productum totale 4344200000.

Ratio patebit, si facta, ut alias, operatione productiore, attendatur, zeros inutiles occurrere.

	466	1000000	65464
	1002	1000	4053
<i>Exempla Multiplicationis</i>			
	932	1000000000	196392
	466		327320
	466932		261856
			265325592

50. II. Num quis inter operandum hallucinatus sit, facile detegit, si commutatis numeris, & multiplicatore pro multiplicando assumpto operationem repetat: quippe cum idem omnino factum obtinere debeat (45).

De Divisione.

51. Divisio est compendiaria subtractio, qua, quoties fieri potest, quantitas una ab altera demitur, ut quoties altera contineatur in altera, innotescat.

Sic, ut sciatur, quoties 4 in 12 contineantur, methodum nobis hanc ipsa natura demonstrat, ut scilicet 4 ex 12 subducantur: restabunt 8: tum si hinc denuo 4 auferamus, 4 relinquuntur; ac denique 4 deductis ex 4, nihil remaneat. Ex quo quisque videt, nu-

numerus 12 penitus exhauriri, si 4. tribus vicibus demantur, ideoque hunc in illo toties accurate contineri. At enim prolixa nimis hæc methodus est, quando numeri majores proponuntur. Ejus compendio itaque, sive divisione, utimur, ut expeditius reperiatur, quoties in una quantitate (quæ tum *dividendus* dicitur) altera (quæ *divisor* vocatur) contineatur. *Quotiens*, sive *quotus* appellatur numerus indicans, quoties divisor insit in dividendo.

In exemplo adducto dividendus est 12, divisor 4, quotiens 3.

52. Ex his notionibus deducitur I, *in dividendo toties contineri divisorem, quoties unitas in quotiente reperitur.* Quotiens enim exprimit, quot subtractiones faciendæ sint, ut dividendus exhauriatur.

53. Hinc semper habetur analogia: *unitas est ad quotum, ut divisor ad dividendum.*

54. II. Divisorem toties sumtum, quot unitates sunt in quotiente, debre æquare dividendum: (id enim nil aliud est, quam toties restituere divisorem, quoties ablatum est, quo fit, ut dividendus integer reddatur) seu, quod idem est, *factum ex divisore in quotientem esse æquale dividendo.*

55. Itaque primo, *ut examinetur, an quotiens accuratus sit, is multiplicandus est per divisorem, & factum cum dividendo conferendum.* Quod si enim hoc majus deprehendatur, quam dividendus, quotus justo major acceptus est, & ex opposito.

56. Dividendus considerari potest instar producti alicujus ex multiplicatione, cujus factores sint divisor & quotiens. Unde dividendum parti per divisorem, ut obtineatur quotus, idem est, ac factum aliquod dividere per unum factorem cognitum, ut factor al-
ter

ter reperiatur. Hinc secundo: dato producto & factore ejus altero, ut inveniatur alter factor, productum per factorem datum dividendum est.

57. III. Operatione superiore effectum esse, ut 12 in tres partes æquales secaretur, quarum quævis sit 4; sive in partes 4 æquales, quarum quælibet sit 3. Igitur dum quantitas in partes quotvis distribuenda est, ea per numerum partium dividi debet: quotus exprimet magnitudinem partium singularum.

58. CASUS I. quando dividendus & divisor sunt numeri simplices. Enimvero tum sine artis adminiculo quotiens innotescit. v. g. Nemo est, qui ignoret, 4 in 8 accurate bis contineri, seu quotientem ex 8 per 4 divisum esse 2, cum sit $2 \times 4 = 8$. Compendii causa divisio sic exprimitur $\frac{8}{4} = 2$. Divisor scilicet dividendo interposita linea subscribitur, & enunciatur divisum per. (Alii scribunt $8 : 4 = 2$). Pari modo $\frac{9}{3} = 3$, quod scilicet $3 \times 3 = 9$; & $\frac{6}{2} = 3$, ob $3 \times 2 = 6$.

59. Quando quotiens exactus haberi nequit (ut si quis velit 9 per 4 dividere, illico intelligit, 4 in 9 esse plus binis, sed minus tribus vicibus, ideoque quotum verum esse inter 2 & 3), hoc in casu pro quo sumitur minor eorum numerus, inter quos verus quotus contineri debet, perque eum multiplicatur divisor; factum ex dividendo subtrahitur, & residuum scribitur penes quotum, eique lineola subducto divisor subscribitur.

In priore exemplo, in 9 comprehenditur 4 plus binis, sed minus tribus vicibus; unde sumto quoti loco 2, sit $2 \times 4 = 8$; tum $9 - 8 = 1$, & habetur $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, id quod denotat, 9 divisa per 4 dare quotum 2, & præterea remanere unam unitatem ex 9 in quatuor partes distribuendam. Similiter $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$; $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

60. Observa I. Tribus igitur operationibus divisio absolvitur: Primo dividitur dividendus per divisorem,
C
ut

ut habeatur quotiens; Secundo multiplicatur divisor per quotientem, ut obtineatur productum; Tertio hoc productum subtrahitur a dividendo, ut reperiatur residuum.

61. II. Si divisor major sit dividendo, uti si oporteat 4 per 7 dividere, fatis est, si ponatur $\frac{4}{7}$ instar residui divisionis, quo scilicet quotiens designetur.

62. Id genus quotientes, seu divisionum residua, aut universim quævis expressio divisionis, qua numero alteri interjecta linea alter subjicitur, *fractiones* dicuntur, vel *numeri fractioni*. Et ex opposito vocantur *integra*, vel *numeri integri*, qui sine ea linea scribuntur.

63. III. Quantitas, quæ per alteram exacte, quin quidpiam maneat residui, dividi potest, dicitur *multipla* illius, quippe æqualis facto ex quotiente divisionis in quantitatem illam ducto. Ita 8 est multipulum numerorum 4 & 2: item 12 numerorum 6, 4, 3, & 2: omnis autem numerus est multipulum unitatis; at vero 8 non est multipulum de 7, nec de 6, vel 3, similiter 11 nullius unitate majoris est multipulum.

64. IV. Quantitas, cujus altera est multipulum, vocatur *aliquota*, sive *pars aliquota* illius multipli: sic 4 & 2 sunt aliquotæ numeri 8,

65. V. Numerus, qui nullius alterius, quam unitatis, est multiplus, dicitur *numerus primus*. Horum numerorum amplæ tabulæ apud varios scriptores extant; en eos, qui centenario sunt inferiores:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,

66. CASUS II. quando dividendus, & divisor sunt numeri compositi.

Proponatur exempli gratia numerus 147475 per 362 dividendus. Videatur primo, in quot notis ex parte fini-

sinistra (hic enim semper divisio inchoanda) *contineri possit divisor?* & quoniam 362 in primis tribus notis 147 dividendi non continentur, sed solum in quatuor 1474. *istæ interjecto puncto a reliquis separentur*, *divisorque iisdem subscribatur*, atque adeo prima divisionis pars est, ut 1474 per 362 dividantur. Quoniam vero 1474 simul per 362 dividi nequeunt, dividantur soli centenarii numeri 1474 per centenarios alterius 362, & quæretur, 3 in 14 quoties contineantur? & licet plus 4 vicibus 3. in 14 inveniantur, accipiatur tamen 4 pro quotiente, & per eum multiplicetur divisor 362, factumque 1448 a dividendo 1474 subtrahatur; supererunt 26 ex prima divisionis parte.

Huic residuo ad partem dextram adjungatur 7, nota proxima earum numeri propositi, quæ a primis quatuor separatæ fuerunt, pars altera divisionis erit, ut 267 per 362 dividantur. Unde rursus centenarios numeri 267 per centenarios

362 dividere oportet, quærendo 3 in 2 quoties reperiantur? & quia ne semel quidem major in minore continetur, prius invento quoto adjungatur 0, ducatur divisor 362 in 0, productum, quod pariter fit 0, subducatur a dividendo, remanent 267, ita pars altera peracta est.

1474, 75	141	
		407
362		362
1448		
267		
0		
2675		
362		
2534		
141		

Residuo. adscribatur nota altera 5, quæ supererat puncto separata, consistet tertia pars divisionis in eo, ut 2675 per 362 dividantur. Quæretur igitur 3 in 26 quoties inest? reperitur novus quotus 8, quo in 362 ducto, obtinetur factum 2896: & quia ab hoc dividendus 2675 exceditur, facile apparet, quotum 8 esse justo majorem: huic igitur deleta alter 7 substitua-

tuatur, per quem si multiplicetur 362, productum fit 2534, quo ex 2675 ablato remanent 141. Cum porro nulla supersit nota in dividendo, quæ huic residuo adjungi posset, tota divisio absoluta est, quotus inventus 407, residuum 141, quod fractionis in modum a latere quoto adscribitur.

67. *Accuratio divisionis exploratur, si omnia multiplicationum producta cum ultimo residuo eo ordine, quo inter operandum occurrerunt, in unam summam colligantur.* In alato exemplo producta sunt 1448, 0, 2534, residuum ultimum 141: deletis igitur reliquis notis, hæc ut suis quæque locis disposita sunt, addantur, reperitur summa 147475 æqualis numero ad dividendum proposito. Ex quo constat, divisionem rite factam esse. Quod si enim hæc summa inveniretur alia, id certo esset erroris indicio. Ratio est, quod summa productorum singularum notarum quotientis in divisorem, æqualis sit producto quotientis totius in eundem divisorem; hoc vero (54) productum ex quoto in divisorem reddere debeat dividendum.

68. *OBSERVA I.* Cujusvis partis divisio semper per primam a sinistris divisoris notam instituitur. Itaque si primam hanc notam sequantur duæ aliæ, non attenditur ad binas dexteriores notas dividendi, sed priores tantum per primam divisoris notam dividuntur. Si hæc prima nota divisoris adjunctas habeat tres, quatuor &c alias, tribus, quatuor, &c. dextimis in dividendo neglectis, primæ a sinistris per primam divisoris dividuntur.

69. *II.* Evenit sæpe inter dividendum, ut quotientis assumatur vero major, præcipue dum nota primam in divisore sequens paulo major est, uti sunt 6, 7, 8 vel 9.

70. *III.* Quando residuum quodpiam nova dividendi nota auctum, membrum minus, quam sit divisor, suppeditat, compen-

dii causa illico quotienti invento adjungi potest 0, atque ad membrum dividendum sequens e superioribus nota adscribi, ut novo quo reperiendo locus fit.

71. IV. Ut adhuc magis brevitati consulatur, divisor non sub singulis partibus scribitur, sed idem adhibetur, qui ab initio sub dividendo positus est. Verum attendendum est, ne ordo localis notarum perturbetur. Hoc compendio si utamur, exemplum præcedens hoc ordine disponetur:

$$\begin{array}{r}
 1474.75 \quad 141 \\
 \hline
 = 407 \\
 362 632 \\
 \hline
 1448 \\
 \hline
 267 \\
 0 \\
 \hline
 2675 \\
 2534 \\
 \hline
 141
 \end{array}$$

Addimus huic alia non nulla: in primo numerus 473645 per 1002 dividendus proponitur; in secundo 200000 per 191; in tertio 790758 per 354.

$ \begin{array}{r} 4736.45 \quad 701 \\ \hline = 472 \\ 1002 \\ 4008 \\ \hline 7284 \\ 7014 \\ \hline 2705 \\ 2004 \\ \hline 701 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 200.000 \quad 191 \\ \hline = 1047 \\ 1002 \\ 900 \\ 764 \\ \hline 1360 \\ 1337 \\ \hline 23 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 23 \quad 790.758 \\ \hline = 2007 \\ 191 \\ 394 \\ 788 \\ \hline 2758 \\ 2758 \\ \hline 0 \end{array} $
--	--	--

72. V. Si divisor in fine Zeros adjunctos habeat, divisio compendiosior redditur, si tot notæ ex parte dextra dividendi

refecentur, quot zeri sunt in divifore: peracta vero divifione in reliquis notis, refiduo, fi quod fuerit, ultimo junguntur notæ absciffæ dividendi, fubfcripto ex more divifore. In exemplo fi dividendus fit 238873 per 3600, dividatur 2388 per 36; reperitur quotus 66, & remanent 12: itaque quotiens quæfitus erit $66\frac{1273}{3600}$. Pariter quotus ex 324755 per 300 divifis eft $1082\frac{155}{300}$; item fi 843554 dividantur per 1000, quotus obtinetur $843\frac{554}{1000}$.

73 VI. Denique fi tam in fine diviforis, quam dividendi adfint zeri, hi in utroque pari numero deleri poffunt, reliquis notis juxta regulas, & quæ fuperius notavimus, divifis: ut fi dividendus detur 417000, divifor 2500, opus eft tantummodo, ut 4170 per 25 dividatur: erit quotus $166\frac{20}{25}$. Sic etiam divifio inftituetur in 43495 per 2850, loco 43495000 per 2850000, & reperitur quotus $15\frac{745}{2850}$. Eodem modo ex divifione 100000 per 1700 quotus eft $58\frac{1}{17}$.

Notandum. Qui frequentiore exercitio expofitas operationes, atque obfervationes familiares fibi reddiderit, debitamque animi attentionem adhibuerit, facile intelliget, eas omnes reduci ad operationes articulo 59 præfcriptas: nifi quod paulo complicatiores fint. Illud autem, quod ultimo loco obfervandum diximus, ex natura fractionum decimalium, quas infra tractabimus, petitum eft.

D E F R A C T I O N I B U S

De Fractionum natura generatim: de earum valore, & comparatione.

74. **V**idimus (62) fractiones nihil aliud efle, quam quantitates per alias majores divifas, & plerumque refidua divifionum.

Sed ut res hæc clarius concipiatur, meminiffe oportet, quemvis numerum (20) exprimere, quot quantitas quæpiam partes æquales contineat ejusmodi, quarum quælibet appellatur unitas: at enim
nul-

nulla re ipsa unitas datur, nulla datur pars determinata quantitatis, quæ etiam ipsa ex certo numero partium æqualium ac minorum composita concipi non possit: harum igitur partium singulæ, aut aliquot si accipiantur, unitatis illius portionem, sive fractionem constituunt. In exemplo: numerus 100 pedum compositus est ex certa quantitate determinata centies accepta, cujus longitudo pes appellatur. Est igitur pes unitas respectu numeri 100. Quia vero pes in 12 digitos dividitur, quisque digitus est pars duodecima pedis. Et fieri sane potest, ut si spatium aliquod dimetiamur, illud non accurate 100 pedum reperiatur, sed forsan uno, alterove digito majus, vel minus. Atque tali casu digitus ille, vel digiti erunt fractio pedis, quæ hunc in modum exprimitur $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$ &c. hoc est: una ex duodecim partibus pedis, duæ ex duodecim partibus pedis &c.

75. Generatim ergo, si unitas supponatur in certum partium æqualium numerum divisa, fractio indicat, quot ejusmodi partes accipiantur; ita fractio $\frac{1}{3}$ significat, ex tribus partibus æqualibus, in quas unitas divisa est, accipi unam; fractio item $\frac{4}{5}$ denotat, sumi 4 partes ex 5 æqualibus, in quas unitas tota secta est &c.

Numerus, seu nota superior, *numerator* fractionis appellatur; inferior *denominator*; in fractione ultimo loco allata $\frac{4}{5}$, numerator est 4, denominator 5.

76. Unde si fractio vera sit, & proprie dicta, debet esse quantitas unitate minor, quippe cum ejus numerator minor sit denominatore. Interim occurrunt sæpe quantitates fractionum forma expressæ, in quibus numerator sit æqualis, vel etiam major denominatore, & tum si numerator denominatori æqualis sit, fractio unitati æquatur: etenim cum $\frac{4}{4}$ denotet, ex unitate in quatuor partes æquales divisa sumi ejusmodi partes quatuor, evidens est, unitatem
inte.

integram accipi, atque adeo $\frac{4}{4} = 1$. Quando autem numerator denominatorem superat, valor fractionis unitatem excedit. Sic $\frac{5}{4} = 3$ (58).

77. *Utra fractio altera major sit, non adeo pronum est advertere, nisi si vel eundem numeratorem, vel eundem denominatorem utraque habeat. Sic non illico apparet, quænam e duabus hisce fractionibus $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$ major sit. At si primo: utriusque sit idem numerator, ea major est, cujus denominator est minor. Ita nempe manifestum est, fractionem $\frac{1}{7}$ esse hac altera $\frac{1}{4}$ majorem; item a $\frac{2}{7}$ excedi $\frac{1}{7}$ &c.*

Secundo. Si idem utriusque fractionis denominator, major est, quæ majorem habet numeratorem. Nam patet, plus esse $\frac{2}{7}$, quam $\frac{1}{7}$; plus item $\frac{3}{4}$, quam $\frac{1}{4}$.

Valores fractionum communem numeratorem habentium sunt inter se reciproce ut earum denominatores; quibus vero communis denominator est, sunt directe ut earum numeratores.

78. *Fractionis valor non mutatur, si tam numerator, quam denominator per eandem quantitatem multiplicetur, vel dividatur. Etenim cuius clarum est, tantum habere illum, qui habet $\frac{1}{2}$, quantum qui habet $\frac{2}{4}$, vel $\frac{3}{6}$, vel*

$$\frac{4}{8} \text{ \&c: est vero } \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}; \frac{2}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}; \frac{4}{6} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} \text{ \&c.}$$

Eodem modo cui sunt $\frac{1}{4}$, nil plus habet, quam cui sint $\frac{2}{8}$, vel $\frac{1}{2}$ &c. Quod si itaque uterque fractionum numerus dividatur per 2, 3, vel per 4, acquiruntur fractiones ejusdem valoris cum $\frac{1}{4}$. Demonstrationem generalem hujus proprietatis fractionum dabimus, cum de rationibus Geometricis agemus (296).

Hinc consequitur, infinitas esse fractiones ejusdem valoris, quamvis diversis terminis exprimantur.

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICIS
UNIVERSIM, QUÆ IN FRACTIONIBUS
INSTITUI POSSUNT.

Operationes Arithmeticæ in fractionibus duplicis speciei sunt: aliæ dicuntur *Reductiones*; aliæ nil differunt a quatuor regulis jam recensitis.

De Reductione Fractionum.

79. Reductio Fractionum est quædam earum transformatio, quam subeunt, ut cæteræ operationes commodius institui possint.

80. I. Numeros integros reducere ad fractiones.

Primo: Quilibet numerus fractionis instar exhiberi potest, si ei unitas pro denominatore tribuatur. Sic 6 forma fractionis habetur $\frac{6}{1}$.

Secundo. Ut autem numerus integer reducatur ad fractionem denominatoris cujusvis dati, multiplicetur per datum denominatorem, productum erit numerator. Sic si 6 reduci debeat ad fractionem, cujus denominator 7, acquireretur $\frac{42}{7}$: divisione enim 42 per 7 quotiens 6 iterum restituitur; unde $\frac{42}{7}$ & 6 sunt quantitates æquivalentes.

Tertio: Ut numerus integer & fractus reducatur ad unicam fractionem, multiplicetur integer per denominatorem fracti; producto addatur numerator fracti; erit summa numerator fractionis quæsitæ. Hac ratione $6\frac{3}{4}$ reducuntur ad fractionem $\frac{27}{4}$; $3\frac{1}{2}$ ad $\frac{7}{2}$.

81. II. Fractiones plures ad eundem denominatorem reducere.

Multiplicetur numerator & denominator cujus-

vis fractionis per denominatores omnium reliquorum.

Ut si $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{4}$ reduci debeant ad communem denominatorem, ducatur uterque terminus fractionis $\frac{1}{2}$ in 4, habebitur $\frac{2}{4}$; tum etiam alterius tam numerator, quam denominator multiplicetur per 2; fiet $\frac{6}{8}$; eruntque fractiones, reductæ $\frac{2}{4}$ & $\frac{6}{8}$. Eodem modo fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ acquirant eundem denominatorem, si primo fractionis $\frac{2}{3}$ uterque terminus ducatur in 7, dein in 4; fiet enim $\frac{2 \times 7 \times 4}{3 \times 7 \times 4} = \frac{56}{84}$. Deinde

fractio $\frac{5}{7}$ multiplicetur per 3 & 4, ut sit $\frac{5 \times 3 \times 4}{7 \times 3 \times 4} = \frac{60}{84}$

Tandem ducatur $\frac{3}{4}$ in 3 & 7; erit $\frac{3 \times 3 \times 7}{4 \times 3 \times 7} = \frac{63}{84}$. Hinc

fractiones propositæ evadent $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, & $\frac{63}{84}$, ejusdem valoris (78), cum uterque singularum terminus per easdem quantitates sit multiplicatus.

82. Hac eadem methodo fractiones quotcunque ad eundem numeratorem reduci possunt, si scilicet tam numerator, quam denominator cujusvis ducatur in denominatores reliquorum v, g. fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, reducentur ad $\frac{10}{12}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{30}{40}$.

83. III. *Fractionem datam ad numeratorem, vel denominatorem datum reducere.*

Quoniam quævis fractio exprimit rationem Geometricam, fieri subinde potest, ut fractio data ad aliam, numeratorem vel denominatorem datum habentem reducat, atque id regulæ aureæ usu. In exemplo fractio $\frac{3}{4}$ reduci potest ad alteram, cujus denominator sit 20, si fiat: ut 5 ad 3, ita 20 ad numeratorem quæsitum, qui reperitur 12; & hinc $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$. Simili ratione eadem data fractio ad aliam reducit, cujus numerator sit v. g. 18, si ponatur: ut 3 est ad 5, ita 18 ad denominatorem novæ fractionis, nempe 30, ut adeo habeatur $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$. Verum hæc reductio locum non habet, nisi si numerus datus sit termini homologi in fractione reducenda multiplus. Hac fractiones redu-

cen-

cendi methodo valor earum determinatur accuratius, uti dum una monetæ species ad alteram reducitur, v. g. libra ad solidos, five partes vigesimas, solidus ad denarios, vel partes duodecimas; aut etiam gradus ad minuta, five partes sexagesimas &c.

84. IV. *Fractionem ad expressionem simplicissimam, seu minimos terminos, reducere.*

Attendendum imprimis, an numerator denominatore maior sit: id enim si sit, numerator dividatur per denominatorem. Sic $\frac{12}{4}$ reducitur ad 3, five $\frac{12}{4}=3$; item $\frac{8}{3}$ reducitur ad $2\frac{2}{3}$.

85. Dein dispiciendum, an denominator & numerator non possit uterque per eundem aliquem numerum dividi, quin quid remaneat. Quod si fieri possit, fractio evadet simplicior citra valoris mutationem (78); & expressio eo erit simplicior, quo divisor utriusque termini major fuerit adhibitus.

Reductio hæc sæpe difficilis est, imo etiam fieri nequit. Satis plerumque fuerit ejus periculum facere, quando id notæ quædam proprietates numerorum svadent.

Primo: *Quivis numerus par est multiplus binarii, seu per 2 divisibilis.* Quando igitur fractionis termini sunt numeri pares, semper ad eorum dimidia reduci possunt. Exempli causa fractio $\frac{128}{432}$ reducitur ad $\frac{8}{27}$ continua per binarium divisione. nempe $\frac{128}{432} = \frac{64}{216} = \frac{32}{108} = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$.

Secundo: *Quivis numerus in fine habens 0, potest per 5 & per 10 dividi.* Itaque fractio $\frac{20}{30}$ reducitur ad $\frac{2}{3}$.

Tertio: *Quivis numerus, cujus ultima nota est 5, est multiplus 5.* Hinc $\frac{15}{85}$ potest reduci ad $\frac{3}{17}$. Similiter ex $\frac{120}{24}$ fit $\frac{5}{1}$.

Quarto: *Quivis numerus, cujus omnes notæ simplici additione in unam summam collectæ constituunt aliquod multipulum ternarii, ipse quoque ternarii aliquod multipulum est, ideoque per 3 dividi potest.* Unde fractio $\frac{222}{333}$ est divi-

sibilis per 3, & reducitur primo quidem ad $\frac{96}{117}$, de-
in vero ad $\frac{32}{39}$, quia summa notarum numeratoris est
18, denominatoris 9, postea, peracta prima divisio-
ne, summa numeratoris 96 fit 15, denominatoris 117
denuo 9.

86. En autem methodum generalem inveniendi commu-
nem divisorem maximum duarum quantitatum datarum: *Major
per minorem dividatur, & si divisio sine residuo fieri possit, ipsa
quantitas minor erit divisor quæsitus.*

*Sed si peracta divisione aliquid remanserit, quantitas data
minor dividatur per hoc residuum: & si secunda hæc divisio ex-
acte fieri possit, primæ divisionis residuum est divisor communis
maximus.*

*Quod si denuo relinquantur quidpiam, primum residuum di-
vidatur per secundum: & si non deveniatur ad tertium residuum,
secundum est quæsitus divisor.*

*Univerſim, illud residuum est divisor maximus, per quod
residuum præcedens exacte dividi potest.*

Exemplum. Sit reducenda fractio $\frac{294}{91}$ ad minimos termi-
nos; quod ut fiat, quærendus est divisor communis maximus
numeratorum 294 & 91. Dividatur itaque 294 per 91, remane-
bunt 21 (ad quotientem non attenditur); ulterius dividatur 91
per 21, reperitur (insuper habito quoto) residuum 7. Per 7 di-
vidatur primum residuum 21, fit quotiens 3, & remanet nihil.
Hinc 7 est communis divisor maximus quantitatum 294 & 91,
fractioque proposita reduci potest ad $\frac{14}{4\frac{1}{2}}$, numeratore scilicet &
denominatore per 7 divisus, nec alia fractionis datæ expressio
simplicior, ejusdemque valoris, haberi potest.

Quando fractio ad simpliciores expressionem reduci ne-
quit, continuatis divisionibus ad residuum 1 devenitur, cum
unitas omnium numerorum sit communis divisor.

Ut ratio regulæ perspiciatur, advertendum est, quantita-
tes duas nunquam posse per eundem numerum ita dividi, ut ni-
hil remaneat, nisi sint numeri illius producta; adeo, ut quanti-
tas major sit factum ex eo numero sæpius sumto, minor vero
factum ex eodem minus sæpe accepto. Itaque si jam quantita-
tes A & B sint ejusmodi compositæ, atque B ex A toties, quoti-
es potest v. g. tribus vicibus subtracta nihil supersit, evidens est,
A esse compositam ex B ter sumta; B vero ex B semel accepta,
Ideoque tali casu B esse communem divisorem maximum quan-
tatum A & B.

St.

Secundo. Sed si subtrahā B ex A, quoties fieri potest, in præsentē exemplo ter, supersit aliquod residuum C; erit $A - C$ quantitas composita ex B tribus vicibus sumta; sive $A - C = 3B$ consequenter si C quoque certo vicium numero acceptum, v. g. quater, adæquet quantitatem B; idem C aliquoties sumtum debet etiam $A - C$ æquare. Et reipsa clarum est, si sit $B = 4C$, & $A - C = 3B$, fore $A - C = 3 \times 4C$, atque hinc $A = 13C$. Oportet igitur C ex B subtrahere, quoties fieri potest; & si nihil remaneat, est C factor ille, ex quo quantitates A & B sunt compositæ.

Tertio: Quod si C ex B subducto, v. g. quater, quoties nempe fieri potest, adhuc supersit D, necesse est, ut $B - D$ composita sit ex C quater sumto, seu $B - D = 4C$. Ergo si D aliquoties acceptum, v. g. ter, adæquet C, pariter aliquoties acceptum debet æquare tam A, quam B, eritque factor compositarum A & B. Nam habebitur $C = 3D$; igitur in æquatione $B - D = 4C$ fiet $B - D = 4 \times 3D$, & consequenter $B = 13D$. Equatio porro $A - C = 3B$, mutabitur in hanc $A - 3D = 3 \times 13D$, & tandem $A = 42D$.

Hic ratiocinandi modus si extendatur ulterius, apparebit liquido, postremum residuum, quo aliquoties sumto residuum præcedens accurate exhauritur, esse quantitatem, ex qua duæ datæ A & B sunt compositæ, & hinc esse divisorem communem maximum.

Illud vero per se etiam patet (51), quantitatem unam dividere per alteram esse idem, ac alteram toties auferre ex altera, quoties fieri potest.

De additione Fractionum.

87. Ut fractiones addi possint, *reducantur prius omnes ad communem denominatorem; reducerarum numeratores colligantur in unam summam, quæ erit numerator novæ fractionis cum denominatore communi.*

Exempli causa, addendæ sint fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$; reducantur (81) ad $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$; erit earum summa $\frac{5}{6}$.

Similiter ut addi possint fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, reducendæ sunt ad $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$ (81); summa numeratorum est 46; habebitur $\frac{46}{24}$, & expressio simpliciore $1\frac{11}{12}$.

88. Si præterea adsint numeri integri, in unam summam colligantur, iisque adjungatur summa fractionum. Sic $4\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} = 6\frac{5}{6}$; item $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4} = 8\frac{1}{2}$,

De Subtractione.

89. Fractiones quarum altera ab altera subtrahenda est, *reducantur ad communem denominatorem: accipiatur differentia numeratorum pro numeratore novæ fractionis habentis denominatorem communem.*

Exemplum. Oporteat $\frac{1}{4}$ ex $\frac{2}{3}$ subtrahere: facta reductione habebuntur $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{12}$ (81) quarum differentiam patet esse $\frac{1}{12}$.

90. Si fractionibus præfixi sint numeri integri, ii prius more solito a sese subtrahantur; & residuo adscribatur differentia fractionum. Ita si ex $4\frac{1}{4}$ subtrahi debeant $3\frac{1}{2}$, obtinetur $1\frac{1}{4}$ seu (85) $\frac{1}{4}$.

91. At si contingat, ut fractio subtrahenda major sit alterâ, quam quantitas minuenda adjunctam habet, seu etiam si fractio a numero integro auferri debeat, unitas quantitatis minuendæ reducatur prius ad fractionem (80).

Ut si $3\frac{2}{3}$ subtrahi debeat ex $6\frac{1}{4}$, quantitas $6\frac{1}{4}$ reducatur prius ad $5\frac{1}{4}$; tum fractiones reducantur ad communem denominatorem $\frac{3}{12}$ & $\frac{1}{12}$; auferatur $\frac{2}{12}$ ex $\frac{1}{12}$; manebit $\frac{1}{12}$; auferatur porro 3 ex 5, supererunt 2; ut adeo tota differentia quæsitâ sit $2\frac{1}{12}$.

Item ut ex 4 subduci possit fractio $\frac{2}{3}$, reducenda sunt 4 ad $3\frac{1}{3}$; hinc ablatis $\frac{2}{3}$, residuum est $3\frac{1}{3}$. Pariter ut subtrahantur $\frac{1}{2}$ ex 2, loco 2 fiat $1\frac{1}{2}$, invenietur differentia $1\frac{1}{2}$.

De Multiplicatione.

92. Quando duo numeri multiplicandi sunt, quorum vel unus, vel uterque fractus est, sequens regu-

gula universim est tenenda: *reducatur numerus integer, si quis adest, ad formam fractionis (80): fiat nova fractio, cujus numerator sit factum ex numeratoribus multiplicandi & multiplicatoris; denominator vero factum ex eorundem denominatoribus: reducatur ad expressionem simplicissimam.* Exemplum sit.

Quantitas multiplicanda	per;	scribatur:	erit factum;	& expressio simplicissima.
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{12}$	4	$\frac{7}{12} \times \frac{4}{1}$	$\frac{28}{12}$	$2\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$4\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} \times 3\frac{3}{7}$	$\frac{66}{7}$	$3\frac{1}{7}$
$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{4} \times 1\frac{1}{2}$	$1\frac{6}{8}$	$20\frac{5}{8}$

Ut regulæ veritas pateat, illud revocandum in memoriam, quod multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$ exempli causa, nihil aliud sit, quam $\frac{2}{3}$ toties accipere, quoties unitas in $\frac{1}{2}$ continetur (43); jam vero unitas in $\frac{1}{2}$ non continetur, sed tantum dimidium unitatis reperitur semel in $\frac{1}{2}$; igitur etiam tantum dimidia sui parte quantitas $\frac{2}{3}$ sumi debet, hoc est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

93. Coroll. I. Ex secundo exemplo manifestum est, quod dum numerus integer in fractum, vel vicissim, duci debet, aut numerator fractionis multiplicandus sit per integrum, aut denominator per eundem dividendus. Idem enim obtinetur $2\frac{1}{3}$ seu fiat $4 \times 7 = 28$, & scribatur $\frac{28}{12}$; seu $1\frac{2}{4} = 3$, & ponatur $\frac{7}{3}$. Verum per divisionem res non semper potest confici.

94. II. Tironi forsan sequens difficultas moveri poterit: $\frac{2}{3}$ solidi 8 denarios valent, & $\frac{1}{2}$ solidi sunt 6 denarii: quod si jam $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ efficiant $\frac{1}{3}$ solidi, seu 4 denarios; qui fieri poterit, ut tamen, si 8 denarii multiplicentur per 6 denarios, acquirantur 48 denarii?

Verum expediemus hoc facile, si advertamus, quantitatum naturam per multiplicationem mutari; earum partes ele-

van-

vantur ad quadrata, dum altera in alteram ducitur, seu dum acquirunt duas dimensiones (vid: N 586); trium dimensionum vero si fiant, elewantur ad cubos (708). Itaque mensura simplex v. g. certum pedum numerum in longitudine continens, non aliam potest habere fractionem, nisi ratione 12 digitorum, in quos pes subdividitur. At si mensura dati pedum numeri in longum, multiplicatur per aliam, quæ itidem aliquot pedes velut in latum habeat, factum erit superficies certi numeri pedum quadratorum, quorum quivis 144 digitos contineat. Sic hexapeda unius dimensionis 6 tantummodo pedum est; at corpus unius hexapedæ (cum triplex sit corporis dimensio) est 216 pedum cubicorum. Atque ob hanc rationem factum ex $\frac{2}{8}$ in $\frac{1}{2}$ solidi $\frac{1}{2}$ est solidi, non simplicis, qui 12 denariis constituatur, sed quem 144 denarii efficiant. Patet autem, $\frac{1}{3}$ solidi 144 denarios continens esse 48 denarios, five factum ex denariis 8×6 .

De Divisione.

25. Divisio fractionum eo omnino modo peragitur, quo multiplicatio, nisi quod divisoris termini inverti debeant, ut numerator denominatoris locum occupet, & vicissim. Exempli causa sit.

Quantitas dividenda	per;	scribatur primo:	dein vero;	erit quo- tiens,	& expres- sio simpli- cissima.
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$	$\frac{6}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} \times \frac{5}{1}$	$\frac{10}{3}$	$3\frac{2}{3}$
$\frac{4}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} : \frac{5}{2}$	$\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$2\frac{1}{3}$	$1 : \frac{7}{3}$	$1 \times \frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$1\frac{2}{7}$

Ratio hujus operationis. & cur v. g. si $\frac{3}{4}$ dividantur per $\frac{1}{2}$, quotiens fiat $1\frac{1}{2}$; patebit, si cogitetur, quotientem toties debere contineri in dividendo, quoties unitas in divisore; jam vero unitas non nisi dimidia sui parte continetur in divisore $\frac{1}{2}$; igitur etiam quoti tantum dimidium debet contineri in dividendo: atqui quantitas, cujus dimidium continetur in altera, est alterius illius dupla: quare dum $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ dividuntur, quotus est duplex dividendi $\frac{3}{4}$, hoc est, debet esse $\frac{6}{4}$, five $1\frac{1}{2}$. Quin

Quin per se manifestum est, in omnibus allatis exemplis quōtiente ducto in diviso rem obtineri quantitatem dividendam. Ut $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ seu $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Idem est in cæteris.

Observa. Pars numeri fracti, v. g. tres quartæ duarum septimarum, seu $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$, dicitur *fractio fractionis*. Liquet autem $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ significare quartam partem quantitatis $\frac{2}{7}$ esse ter accipiendam. Unde $\frac{2}{7}$ dividendæ sunt per 4, & quotiens ducendus in 3, quod fit $\frac{6}{28}$, vel $\frac{3}{14}$. Est autem $\frac{6}{28}$ factum ex $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{7}$: ergo primo: *valor de fractione fractionis acquiritur, si duæ illæ fractiones invicem multiplicentur*. Secundo: *Idem valor est, seu accipiantur $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{4}$ seu $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ (45).* Idem applicari potest fractionibus, quæ ex fractionibus aliis per alias divisas emergunt, rursusque per novas fractiones dividuntur in infinitum.

DE FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.

De Natura Fractionum Decimalium.

96. **P**ræter jam expositas in Mathesi adhibentur aliæ fractiones, quas *decimales* appellant. Harum denominator semper est unitas cum tot adjunctis zeris, quot notis numerator constat; hinc fit, ut denominator ne quidem scribatur, sed numerator tantum hujus generis fractionis interjecta virgula a numeris integris præfixis separatur. Exempli causa loco $19\frac{4}{10}$, scribitur 19, 4;
 $19\frac{4}{100}$ exprimitur per 19, 04; ut scilicet zero ante quaternarium posito intelligatur, denominatorem
 E esse

esse 100. Eodem modo $19\frac{4}{1000}$ indicantur se-

quente ratione 19, 004 : item $49, 01742 = 49\frac{1742}{100000}$;

$$0, 035 = \frac{35}{1000}.$$

97. Sunt, qui virgulæ loco puncto utantur. Plurimi cum fractio sine integro indicanda est, ante vir-

gulam vel punctum zerum omittunt, & ut v.g. $\frac{35}{1000}$

significent, scribunt: ,035, vel .035 ; $\frac{4}{10000}$ exprimūt

per, 0004 aut .0004.

98. Hinc autem colligitur, prima post virgulam notā in fractione decimali exprimi partes decimas, altera centesimas, tertia millesimas &c. Sic 4, 217

idem est ac $4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$ aut vero $4 + \frac{200}{1000}$

$+ \frac{10}{1000} + \frac{7}{1000}$, quod tandem reducitur ad $4\frac{217}{1000}$

per § 88.

99. Ut numerus integer per 10, 100, 1000 &c multiplicetur, alia re opus non est, quam ut e parte dextera unus, duo, tres &c zeri adjungantur. Itaque etiam si notis fractionis decimalis versus dexteram unus, duo, tres &c zeri adscribantur, tam numerator, quam denominator per 10, 100 &c multiplicatur; ac propterea idem manet fractionis valor (78). Hunc in modum fractiones 0,1; 0, 10; 0, 100; 0, 1000 æquales sunt; uti etiam $4, 7 = 4, 7000$ &c. Illud etiam facile intelligitur, quantitatem 4, 7 esse ma-

jorem, quam 4, 69, aut etiam majorem, quam 4,

$$699999, \&c; \text{ etenim } 4, 7 = 4 \frac{7}{10} = 4 \frac{70}{100} = 4, \frac{700000}{1000000}$$

$$\& 4, 69 = 4 \frac{69}{100}; 4, 699999 = 4 \frac{699999}{1000000}: \text{ est autem}$$

$$\frac{70}{100} \text{ major, quam } \frac{69}{100} (77); \& \frac{700000}{1000000} \text{ major,}$$

$$\text{quam } \frac{699999}{1000000}; \text{ igitur etiam } 4, 7 \text{ major est, quam}$$

4, 69, vel 4, 699999, aut denique major, quam 4 cum fractione quocunque notarum, quarum prima sit minor, quam 7.

100. Porro perspicuum est, 4, 699999 propius accedere ad æqualitatem cum 4, 7, quam 4, 69, vel 4, 6999; at 4, 6999 esse viciniorem valori 4, 7, quam 4, 69: nam

$$\text{inter } 4, 699999 \& 4, 700000 = 4, 7 \text{ non nisi } \frac{1}{1000000} \text{ di-}$$

scrimen est; cum $\frac{1}{10000}$ addenda sit, ut 4, 6999 æquet

valorem 4, 7000 sive 4, 7; ad 4, 69 vero $\frac{1}{100}$ ut cum

4, 70, sive 4, 7 æquetur. Est autem (77) $\frac{1}{1000000}$

longe minor, quam $\frac{1}{10000}$ & $\frac{1}{10000}$ longe minor,

quam $\frac{1}{100}$: igitur differentia inter 4, 7, & 4, 699999

longe minor est, quam inter 4, 7 & 4, 6999; & 4, 6999 longe minus differt a 4, 7, quam 4, 69. Unde evidens est 4, 699999 propius multo accedere ad æquali-

tatem cum 4, 7, quam 4, 6999; & 4, 6999 propius etiam, quam 4, 69.

101. Ex his autem sequitur I: *Fractionem decimalem esse altera majorem, si primis utriusque notis existentibus æqualibus, alias præterea adjunctas habeat, quæ non sint meri zeri.*

102. II sequitur: *Si fractio decimalis sit plurium notarum, versus dextram aliquas sine magno valoris decremento omitti posse.* v. g. Sint calculo quovis repertæ 2, 4546 hexapedæ; si dextima fractionis nota deleatur, valor

imminuitur $\frac{6}{10000}$ hexapedæ, quæ particula fere di-

midiam lineam æquat. Si rescindantur duæ postremæ notæ, & relinquatur 2, 45, valor fractionis de-

crescit $\frac{46}{10000}$, sive fere 4 lineis.

103. III. *In fractionum decimalium calculo non adhibendas esse plures notas, ut v. g. quinque vel sex, nisi opus fuerit magna prorsus accuratione; sed plerumque sufficere unam, alteramve, aut summum tres.* Nam si v. g. operis struendi per hexapedam pretium sit 3 librarum, pa-

tet $\frac{6}{10000}$, imo $\frac{46}{10000}$ hexapedæ negligi posse, cum $\frac{46}{10000}$

sint proxime $3\frac{1}{2}$, denariorum, ideoque binæ notæ postremæ in fractione 2, 4546 tuto omittentur. At vero si in pretium 10000 librarum pro una hexapeda

conventum esset, valor $\frac{6}{10000}$ foret 6 librarum, &

$\frac{46}{10000} = 46$ libris, quarum omnino ratio habenda est,

atque hinc plures notæ adhiberi deberent.

104. Verum si quæ notæ in fractione decimali omit-
tuntur, atque prima neglectarum quinarium excedit, ultima
earum, quæ retinentur, unitate augenda est. In exemplo,
si in fractione 0,4864 negligantur binæ posteriores,
scribendum est 0,49, non vero 0,48. Etenim 0,
49 = 0,4900 (99), & 0,48 = 0,4800; jam vero
0,4900 propius accedit ad valorem 0,4864, quam
0,4800: quare sumenda est quantitas 0,49, non au-
tem 0,48. Sic etiam neglectis postremis notis fra-
ctionis 0,1954, adhibenda est fractio 0,20, non vero
0,19. At si habeatur v. g. 0,455, liberum erit vel 0,
45, vel 0,46 substituere.

105. Cum fractiones (62) plerumque sint residua
divisionis, dum scilicet divisor non exacte continetur
in dividendo, si lubeat quotienti loco fractionis alte-
rius adjungere decimalem, residuo adjungatur 0, &
divisio adhibito priore divisore continuetur; nota re-
perta erit prima fractionis decimalis. Si rursus ali-
quid supersit, residuum adjuncto 0 iterum dividatur,
quotus erit altera nota decimalis, & sic deinceps re-
petatur divisio, donec vel nihil remeat, vel sufficien-
tes notæ decimales habeantur.

Exemplum. Ex divisione 147475 per 362 inveni-
tur quotiens 407, & residuum 141 (66); jungatur
huic ad dextram 0, & dividatur 1410 per 362, in-
venitur quotus 3, novum residuum 324; adscripto
0 dividatur rursus 3240 per 362, fit quotiens 8, &
remanet 344; addito 0, & iterata divisione reperitur
quotus 9 cum residuo 182, quod habitis jam tribus
notis decimalibus negligi poterit. Quare quotiens ex
147475 divisus per 362 est 407,389.

106. Eadem Methodo fractio quævis alia ad de-
cimalem reducitur. Exempli causa detur fractio re-
ducenda $\frac{2}{3}$; numeratori 3 adjuncto 0, dividatur 30
per 4, quotus est 7, & remanent 2; his novo zero
ad-

adscripto & 20 per 4 divisus alter quotus fit 5, ita ut nihil supersit, adeoque $\frac{1}{4} = 0,75$. Et reipsa manifestum est, quod cum 25 sint quarta pars centenarii, tres quartæ sint 75.

107. Sed plurimæ dantur fractiones, quarum exactus valor in decimalibus haberi nequit, quotcunque divisiones successivæ adhibeantur. Dignoscitur autem hoc ex eo, quod vel in quotorum serie eadem iterum notæ, eodemque ordine redeant, vel quod idem post aliquot divisiones semper maneat residuum. Exemplo sit fractio $\frac{1}{7}$ ad decimalem reducenda, reperietur 0, 571428571428571428 &c. quin unquam ad divisionem exactam perveniri possit. Similiter si fiat reductio fractionis $\frac{1}{12}$, invenitur 0, 416666 &c. Quod si contingat, satis fuerit reliquis neglectis duas aut tres priores notas adhibere, v. g. sumi poterit $\frac{1}{7} = 0, 57$; & $\frac{1}{12} = 0, 417$

108. *Observa.* Notæ, quas easdem, eodemque ordine repetitis divisionibus reperiri diximus, non nisi post plurimas alias in serie numeratoris fractionis decimalis redeunt.

De operationibus in Fractionibus Decimalibus.

109. Operationes Arithmeticæ in fractionibus decimalibus nihil diversi habent ab iis, quæ in numeris integris instituuntur, nisi quod peracta operatione non nulla attendenda sint in collocatione virgulæ numeros integros a notis decimalibus separantibus.

110. I. Si addendæ sint quantitates 4852, 7913, 4, 00745; 2, 7; 0,0049, scribantur imprimis numeri integri, ut alias fieri solet, secundum valorem suum localem alii infra alios, ita, ut etiam virgulæ in eadem sint serie verticali; dein singulis integris versus
dex-

dextram adjungatur continuo sua fractio, ut data est, atque omnia in unam summam colligantur, ut in subiecto exemplo patet

4852,791	Nam quantitates istæ	4852,79100
4,00745	sunt æquales	4,00745
2,7		2,70000
0,0049		0,00490
<u>4859,50335</u>		<u>4859,50335</u>

III. II. In subtractione idem notarum ordo, & regula alias præscripta observanda est.

57,02	4,8274	6,00435	3,842
<u>48,1</u>	<u>2,0139</u>	<u>0,17</u>	<u>1,004556</u>
8,92	2,8135	5,83435	2,837444

III. III. Multiplicatio decimalium nil differt ab ea, quæ in numeris integris fit, neque ratio habetur positionis virgulæ, nisi postquam producta particularia in unam summam fuerint collecta: tunc enim in producto totali tot versus dextram separantur notæ, quot decimales in utroque factore simul fuerint, ita, ut si notæ producti totalis non sufficiant, iis tot zeri a sinistra præfigi debeant, quot ad summam illam conficiendam requiruntur, quemadmodum in tertio exemplo videre licet.

43,7	33,23	2,4542	3,7	21,32
<u>13</u>	<u>12,134</u>	<u>0,0053</u>	<u>4,12</u>	<u>0,100103</u>
1311	13292	73626	74	6396
<u>437</u>	<u>9969</u>	<u>122710</u>	<u>37</u>	<u>2132</u>
568,1	3323	0,01300726	148	2132
	<u>6646</u>		<u>15,244</u>	<u>2,13419596</u>
	3323			
	<u>403,21282</u>			

Re-

Regulæ veritas ex quarto exemplo elucescet, in quo $3,7 = 3 \frac{7}{10}$ (96) $= \frac{37}{10}$ (80); item $4,12 = 4 \frac{12}{100} = \frac{412}{100}$, ex iisdem rationibus. Quod si itaque multiplicetur $\frac{412}{100}$ per $\frac{37}{10}$, productum erit $\frac{15244}{1000}$ (92), quod reducitur ad $15,244$ (96).

113. IV. Divisio decimalium rursus nihil peculiare habet, nisi quod in quotiente reperto tot versus dextram notæ interposita virgula separandæ sint, quot notis fractionis dividendi excedit numerum notarum fractionis divisoris. Ita in primo exemplo, ubi 8,445 divisa sunt per 3,22, & ex lege alias præscripta repertus est quotus 26 (66), postrema nota 6 per virgulam separatur, quod nempe in dividendo notæ decimales superent unica eas, quæ sunt in divisore.

114. At vero si in divisore occurrant plures notæ decimales, quam in dividendo (vide exeplum tertium), tum dividendi notis decimalibus quotlibet zeri adjici debent, donec numerus earum paulo major evadat, quam in divisore, ut scilicet etiam aliquæ decimales in quotiente acquirantur.

Exempla.

$$\begin{array}{r} 8,445 \\ 3,22 \overline{) 8,445} \\ \underline{644} \\ 2005 \\ 1932 \overline{) 2005} \\ \underline{73} \end{array} = 2,6$$

$$\begin{array}{r} 9,83542 \\ 0,326 \overline{) 9,83542} \\ \underline{978} \\ 55 \\ 0 \\ \underline{554} \\ 326 \\ \underline{2282} \\ 2282 \\ \underline{0} \end{array} = 30,17$$

$$\begin{array}{r} 49,1 \\ 20,074 \overline{) 49,1} \\ \underline{40,148} \\ 89520 \\ 80296 \overline{) 89520} \\ \underline{92240} \\ 80296 \\ \underline{11944} \end{array} = 2,44$$

In exemplo altero si quotiens 30, 17 ducatur in divisorem 0,326, factum erit dividendus 9,83542.

In tertio exemplo quatuor zeri dividendo sunt adjecti; & 49, 10000 per 20,074 divisus obtinetur quotiens 2,44.

Si in ejusmodi divisionibus etiam notarum residuarum rationem habere lubeat, iis zeri adjungi possunt, & iteratis divisionibus novi quotientes erui, qui totidem notæ decimales erunt; uti in primo exemplo additis ad residuum 73 tribus zeris invenitur quotus 2,6226, cum novo residuo 228, quod negligi potest.

De aliis Fractionum Speciebus.

Quoniam in diversis Matheseos partibus, atque universim in commercio, multiplicia sunt mensurarum genera adhibenda, ex earum partibus, in quas nempe dividuntur, totidem diversæ fractionum species oriuntur. En vero mensuras, quarum frequentior est usus.

115. Circuli divisio in 360 partes æquales fit, quas gradus appellant: sed gradus iterum in 60 minuta subdividitur, minutum in 60 minuta secunda, secundum in 60 tertia &c, ut adeo 1 gradus, 10 gradus, 20 gradus sint $\frac{1}{360}$, $\frac{10}{360}$, $\frac{20}{360}$ circuli; item 1 minutum, 15 minuta &c sint $\frac{1}{60}$, $\frac{15}{60}$ &c unius gradus; 1 minutum secundum, 10 secunda &c sint $\frac{1}{60}$, $\frac{10}{60}$ &c unius minuti primi &c. Exprimuntur autem partes dictæ hunc in modum 1°, 10°, 20°; 1', 15'; 1'', 10'' &c.

Itaque circulus continet 21600', vel 1296000'', vel 77760000''' &c; gradus unus est 3600'', vel 216000''' &c.

Tempus dividitur in dies, dies in 24 partes æquales, sive horas; hora in 60 minuta prima; minutum

tum primum in 60 secunda &c. Temporis spatium, v. g. 10 horæ, 17 minuta, 44 secunda, æquale est $\frac{1}{24}$ diei + $\frac{1}{2}$ horæ + $\frac{44}{60}$ minuti, horum expressio usitata est 10 h. 17', 44".

Dies igitur continet 1440', vel 86400", vel 5184000"; hora est 3600", 216000" &c, unum minutum primum 3600" &c.

Distantiæ in terra quidem per hexapedas mensurantur, hexapeda continet 6 pedes, pes 12 digitos, digitus 12 lineas, linea 12 partes æquales sive puncta; ut adeo spatium 4 hexapedarum, 2 pedum, 4 digitorum, 6 linearum & 3 punctorum exprimi possit, si scribatur 4 hexapedæ + $\frac{2}{3}$ hexapedæ + $\frac{4}{12}$ pedis + $\frac{6}{12}$ digiti + $\frac{3}{12}$ lineæ.

Æquatur itaque hexapeda 72 digitis, vel 864 lineis, vel 10368 punctis; pes æqualis est 144 lineis, vel 1728 punctis, digitus 144 punctis &c.

In re pecuniaria apud Gallos potissimum occurrunt libræ, solidi & denarii: libra continet 20 solidos; solidus 12 denarios, ut consequenter 19 lib: 15 fol: 10 den: valeant 19 lib: + $\frac{15}{12}$ libr: + $\frac{10}{12}$ fol.

Libra ergo Gallica valet 240 denarios.

Ponderum ratio initur per libras: libra appendit 16 uncias: uncia 8 grossos vel drachmas; grossus 72 grana. Hinc pondus 15 libr: 4 unc. 7 gross. 60 gran. est idem ac 15 libr. + $\frac{4}{16}$ libr. + $\frac{7}{8}$ unc. + $\frac{60}{72}$ gross. Pondus ergo unius libræ est 128 drachmarum, vel 9216 granorum; uncia æquat 576 grana.

116. Ex his universum colligitur primo: *Cujusvis mensuræ partes, quæ eodem nomine exprimuntur, esse fractiones ejusdem denominatoris.* Secundo: *Hunc denominatorem esse æqualem numero partium æqualium, in quas quantitas, seu mensura, proxime superior dividitur.* Sic omnes unciae sunt fractiones, quarum denominator semper est 16; & hic denominator æqualis est numero parti-

um

um contentarum in libra, quæ est quantitas proxime superior uncia. Item digiti sunt fractiones, quarum communis denominator est 12, quippe cum pes, mensura proxime præcedens digitum, in 12 partes æquales dividatur. Idem est in ceteris mensuris.

117. I. Ut id genus fractiones addantur, juxta denominationem suam aliæ aliis subscribantur: dein initio a dextra parte facto colligatur summa omnium notarum in eadem serie verticali, & siquidem hæc excedat denominatorem communem, dividatur per eundem; residuum scribatur infra columnam, & quotiens addatur ad columnam proxime versus sinistram sequentem.

36°	25'	47"	3 d.	17 h.	42'	16"
49	33	28	9	13	25	33
55	31	49	11	23	17	42
				12	0	0
141	31	4	25	18	25	31

Hexaped:	ped:	digit:	lin:	punct.
9	3	11	2	7
100	0	0	0	0
47	5	3	8	0
11	0	10	8	4
168	4	1	6	11

lb	unc:	grof:	gran:	Lib:	solid:	den:
10	15	7	70	325	17	4
9	10	4	18	15	11	6
47	3	6	40	25	1	8
	13	0	55	4	10	0
68	11	3	39	371	0	6

Divisio summæ ex qualibet columna collectæ nihil aliud est, quam reductio, de qua quarto loco egimus (84).

118. II. Quando fractionis ejusmodi subtractio ab altera facienda est, subtrahendæ notæ scribantur infra minuendæ notas ejusdem nominis: tum initium a dextra faciendum, ut alias, illudque præterea observandum, quod dum nota quæpiam subtrahenda excedit superiorem, a qua auferri deberet, superiori addendus sit ejus denominator, & peracta subtractione quantitas proximo versus sinistram loco sequens unitate sit minuenda. Liquet hoc in altero exemplo subjecto, in quo cum 43 minuta a 19 auferri deberent, additis 60 ad 19 subtrahuntur 43 a 79 minutis, residuo 36 subscripto; sed in loco sequente non amplius 14 sed tantum 13 horæ numerantur. Ratio est, quod 11 horas, & 43 minuta auferre ex 14 horis & 19 minutis idem sit, ac 11 horas cum 43 minutis subtrahere ex 13 horis & 79 minutis. Nempe nil hic fit aliud, quam quod superius (91) faciendum præcepimus. En vero exempla:

48 ^o	16 ^o	17 ^o
25	3	12
23	13	5

19 d.	14 h.	19 ^o	40 ^o
3	11	43	30
16	2	36	10

17 d.	11 h.	47 ^o	5 ^o
13	18	55	40
3	16	51	25

Hexaped:	ped:	dig:	lin:	punct:
100	0	0	0	0
17	4	5	11	8
82	1	6	0	4

lib	unc:	gross:	gran:
47	10	2	55
12	12	5	12
34	13	5	43

Libr:	solid:	denar:
655	3	4
30	0	0
625	3	4

119. Multiplicatio & divisio fractionum, quæ ad hanc classẽ pertinent, in elementis Mathematicis locum non habent, si eas fractiones dempseris, quæ in mensuris longitudinum, aut latitudinum occurrunt.

Utraque hæc operatio proluxa est, & longe diversa ab iis, quæ in aliis numeris instituuntur, tum quod partes id genus quantitatum multiplicatarum, vel divisarum non maneant mensuræ simplices (94); cum etiam quod concipi nequeat productum quodpiam e mensuris heterogeneis, uti foret, quod e pondere per orgyas, vel gradus multiplicato oriretur. At vero si hæc quantitates solummodo ut numeri spectentur, qui inter se certam rationem habent, per regulas proportionis alii inveniri possunt numeri, quorum ratio sit eadem.

Itaque peculiare regulæ compendii causa inventæ sunt, quæ singulis fractionum istiusmodi speciebus serviant, pendent scilicet a proprietatibus numerorum, qui denominatorum vices subeunt. Nos isthuc methodum tantum generalem operationes hasce instituendi indicabimus.

120. III. *Primo*: Factum binarum fractionum invenitur ope regulæ trium ejus terminis hunc in modum dispositis: ut unitas est ad multiplicandum, ita multiplicator ad productum. Unde *Secundo* quantitates datæ ad minimam earum speciem sunt reducendæ; v. g. si dentur libræ, solidi, & denarii, omnia reduci debent ad denarios; ut etiam ad grana, si agatur de diversis ponderibus, libris, unciis, grossis & granis &c. Res e sequentibus exemplis fiet clarior. Ut multiplicentur 4 lib: 7. sol. 6 den. per 2 lib: 9 sol 7 den.: hæc proportio est faciendæ: ut 1 lib: est ad 4 lib: 7 sol: 6 den. ita sunt 2 lib: 9 sol: 7. den. ad factum quæsitum; omnia igitur prius reduci debent ad denarios: libra una continet 240 denarios; & 4 lib: 7 sol: 6 denarii, sive 87 sol: 6 den: efficiunt 1050 denarios, ut patet, si 87 sol. multiplicentur per 12 ut fiant 1044 denarii, hisque addantur 6 præterea denarii. Dein 2 lib: 9 sol: 7 den: simili ratione reducuntur ad 595 denarios. Unde termini proportionis sunt 240: 1050:: 595: x Reperitur $x = 2603\frac{1}{3}$; atque ut ad libras, solidos & denarios reducat, dividatur *primo* per 240. quotus erit 10 lib; residuum 203 $\frac{1}{3}$ den. *Secundo* dividatur residuum per 12, fiet quotus 16 sol: remanentibus adhuc 11 $\frac{1}{3}$ den. Quare factum quæsitum habetur 10 lib: 16 sol: 11 $\frac{1}{3}$ den. Si debeant 2 lib: 7 unc: 5 gros:

5 gros: duci in 3 libr: 7 sol: regula trium sequente terminorum ordine adhibenda est: ut pondus 1 libr: ad pondus 2 libr: 7 unc: 5 gros: o gran: ita 3 libr: 7 sol: o den: sunt ad factum quæsitum, hoc est, facta reductione ad minimam speciem, 9216 gran. : 22824 gran. :: 804 denar. : 1991 $\frac{1}{3}$ den. qui reducuntur ad 8 libr. 5 sol. 11 $\frac{1}{3}$ denar.

121 IV. Ut reperiat quotiens ex divisione similium fractionum; facta rursus reductione ad minimam quantitatum speciem, sequente proportionem utendum est (53): ut divisor ad unitatem; ita est dividendus ad quotum.

Exemplum. Sint dividendi $8^{\circ} 9' 48''$ per 3 d. 2 h. 5' 19": ponatur: ut 3 d. 2 h. 5' 19" seu 266719" temporis sunt ad 1 d. five 86400" temporis; ita sunt $8^{\circ} 9' 48''$, hoc est 29388" in gradibus circuli, ad 9519" $\frac{225939}{286799}$, id est $2^{\circ} 38' 39''$ aut fere $40''$.

122 *Observa.* I. Si quantitates datæ, sint naturæ diversæ, seu heterogeneæ, unitas assumenda debet esse heterogenea cum facto, vel quoto quæsito.

123. II. Quando terminus aliquis proportionis datus non annexam habet minimam speciem, & est cum unitate assumta homogeneus, sufficit, si unitas ac terminus ille reducatur ad eam tantummodo speciem minorem, quæ connexa est illi termino; verum alter terminus cum unitate heterogeneus semper in minimam speciem resolvi debet. Ita in secundo exemplo multiplicationis, cum terminus 2 libr. 7 unc. 5 gros. nulla grana adjuncta habeat, sufficit unitatem (seu 1 libram) una cum hoc termino 2 libr. 7 unc. 5 gros. in grosos convertere, & proportionem hunc in modum instituere: ut 128 gros. sunt ad 317 gros. ita 804 denar. ad 1991 $\frac{1}{3}$ den.

ELEMENTA ALGEBRÆ.

Algebra est Arithmetica quædam universalis, seu scientia magnitudinum in genere, quemadmodum Arithmetica scientia est numerorum.

Definitiones quorundam Terminorum in Algebra usitatorum.

124. Expressio, seu quantitas Algebraica est una plu

pluresve magnitudines, una pluribusve literis designata. Adhibentur plerumque in hunc usum literæ minores Alphabeti.

125. Quantitas Algebraica vel est *complexa*, vel *incomplexa*;

Quantitas incomplexa est, quæ solitarie ponitur, hoc est, nulli seu anteriori, seu posteriori per signum +, vel — connectitur; uti a , ab , acd , $-b$, $-adb$, $3abc$, quæ omnes quantitates incomplexæ sunt.

126. Quantitas complexa componitur e pluribus quantitatibus signo + junctis, vel signo — separatis. Exempli causa $a + b$, $aa - b + cdd$ &c sunt quantitates complexæ.

127. Quantitas incomplexa *monomium* dicitur, complexa *polynomium*; & quidem *binomium*, *trinomium*, *quadrinomium* &c, secundum terminorum, quibus constat, numerum.

128. Appellatur autem *terminus* pars ea quantitatis polynomizæ, quæ signo alicui substat. *Terminus positivus* est, quem signum + præcedit; *negativus*, quem signum — afficit; sic quantitas $+a - b + c - dd$ est quadrinomium, cujus duo termini, $+a$, $+c$, sunt positivi, & duo negativi, nempe $-b$, & $-dd$.

129. Primus terminus quantitatis complexæ, aut etiam terminus quantitatis incomplexæ, si nullum præfixum signum habeat, censetur semper positivus: ut $a + b$ sunt duo termini positivi, idemque est, ac si scriberetur $+a + b$.

130. Nota numerica termino cuicunque præposita, exempli gratia 3 in quantitate $3abc$, vocatur *coefficientens* illius termini, ac denotat, quantitatem abc ter accipi, seu per 3 multiplicatam esse. In quantitate $ab - 3cc + 2dd$ bini occurrunt coefficientens, 3 scilicet, & 2; & $-3cc$ significat, terminum secundum $-cc$ esse in 3 ductum; $+2dd$ vero exprimit,

mit, quantitatem $+ dd$ bis sumi, five multiplicatam esse per 2.

131. *Termini, qui nullum cœfficientem præfixum habet, cœfficiens subintelligitur esse unitas; v. g. $aa = 1aa$.*

132. Numerus alicui quantitati literali superne adscriptus dicitur illius quantitatis *exponens*, exempli causa in a^3 , est 3 exponens; & significat, eam literam toties consequenter positam, quot unitates exponens continet. Nempe a^3 adhibetur loco aaa ; & $a^4 b^3 c^2$ pro $aaaa bbb cc$ usurpatur.

Quævis litera, cui nullus exponens adscriptus est, supponitur habere unitatem pro exponente. In exemplo ab idem est, ac $a^1 b^1$; item $a^3 b c c$ idem cum $a^3 b^1 c^2$. Ingens adeo inter exponentem, & cœfficientem est discrimen; nam 4 a ponitur loco $a + a + a + a$; at vero a^4 substituitur pro $aaaa$.

133. Termini quantitatis complexæ iisdem literis constantes dicuntur *similes*, quamvis eorum cœfficientes, & signa diversa sint. Sic quantitas $2ab + bd - 2bd + bdd$ habet duos terminos similes, $+ bd$ scilicet, & $- 2bd$.

DE OPERATIONIBUS ALGEBRAICIS.

Operationes, quæ in Algebra adhibentur, sunt Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio.

De Reductione.

134. Reductio consistit in debito terminorum quantitatum Algebraicarum ordine, & simplicissima expressione, quorum utrumque ut habeatur, perfecta quavis operatione, curandum.

135. Regula I. *Termini, & singulæ literæ ejusdem termini, quantum fieri potest, ordinem Alphabeti sequantur.* Hinc quantitas complexa $ab + c - b + ed + db - cba$ hunc in modum disponenda est: $ab - abc - b + bd + c + de$.

136. Regula II. *Termini similes, qui in eadem expressione occurrunt, reducendi sunt ad unicum, vel si alter elidat alterum, delendi.* Hæc regula triplicem casum complectitur.

I. *Termini similes eodem signo affecti reducuntur ad unicum ejusdem signi, cujus cœfficiens æquatur summæ cœfficientium omnium eorum terminorum.*

Sic loco $ab + ab - cd$ scribendum est $2ab - cd$. Quantitas complexa $aa + 2ac + 3ac$ concinnius exprimitur, si ponatur $aa + 5ac$; pro $bb - 3bc - bc + bd$ adhibetur $bb - 4bc + bd$.

137. II. *Si terminis similibus signa contraria sint præfixa, cœfficiens minor a majore subtrahendus est, & differentia cum signo majoris adhibenda.* Exemplo sit quantitas $3ab + 2abb - ab$, quæ reducitur ad $2ab + 2abb$. Item $ab + 4ad - add + 2ad + 3add - 4ad$ hoc artificio mutatur in $ab + 2ad + 2add$. Sic etiam ex quantitate $bd - 2bd + bdd - 3bdd$ fit $-bd - 2bdd$.

138. III. *Si terminorum similium & contrario signo affectorum cœfficientes sint æquales, hi termini prorsus omituntur.* Ut si habeatur $aa + 2ab - 2ab + bb$, scribendum est tantummodo $aa + bb$; item omnes termini quantitatis $bd - bdf + 2bd + 2bdf - 3bd$ reducuntur ad bdf .

De Additione.

139. *Quantitatum Algebraicarum additio nil aliud requirit, quam ut omnes continua serie scribantur, proprio cujuslibet signo retento, ac postmodum debite reductiones fiant.*

Sic quantitatum ab & bc additio absolvitur scribendo $ab + bc$.

Summa ex $ab + c$ & $b - c$ est $ab + c + b - c$, & facta reductione (138) $ab + b$.

Ex $-b$ & a colligitur $a - b$.

Si $ab - ad + 3bd$ & $ad - bd$ addi debeant ad $ab - ad + dd$, scribatur primo $ab - ad + 3bd + ad - bd + ab - ad + dd$; dein reducatur ad $2ab - ad + 2bd + dd$.

De Subtractione.

140. Subtractio fit, si cum quantitate, ex qua altera auferri debet, scribatur in eadem serie quantitas subtrahenda, mutato in hac signo $+$ in $-$, & vicissim $-$ in $+$.

Exempla. b ex a subtracta intelligitur, si scribatur $a - b$.

$b - c$ aufertur ex $a + c$, si ponatur $a + c - b + c$, & reducatur ad $a - b + 2c$ (136).

Differentia inter $ab - bc + dd$, & $ab + abb - dd$ est $ab + abb - dd - ab + bc - dd$, quæ reducitur ad $abb + bc - 2dd$.

141. Signum $-$ mutatur in $+$ in quantitate subtrahenda, ut debita compensatio fiat. Etenim cum $b - d$ ex a subtrahi debet, & scribitur $a - b$, iusto plus subtrahitur ex a , quandoquidem non integra quantitas b auferri debuit, sed quantitate d immixta; quare dum ponebatur $a - b$, tota quantitate d plus ablatum est, quam oportuit. Ut igitur subtractio æqua sit, quod ultra debitum ablatum est, rursus ut ad differentiam obtentam addatur, est necesse, hoc est, ut ad $a - b$ quantitas d adjiciatur, scribaturque $a - b + d$.

Res in quantitatibus numericis clarius elucet. Si ex 6 auferenda sint $5 - 3$, juxta expositam regulam scri-

scribendum est $6 - 5 + 3$, & obtinetur facta reductione differentia 4, quemadmodum hanc ipsam inveniri debere evidens est. At si poneretur $6 - 5 - 3$, ex 6 subtraherentur 8, quod faciendum haud quaquam erat propositum, quippe cum $5 - 3 = 2$, non nisi 2 ex 6 subtrahi debent.

De Multiplicatione.

142. Dum terminus Algebraicus per alterum multiplicandus est, operatio ad quatuor sese extendit, ad signa scilicet, ad cœfficientes, ad literas, & ad exponentes.

Regula pro signis est, quod productum ex signis iisdem sit semper positivum; ex contrariis semper negativum.

Itaque $+X + = +$, $+X - = -$, $-X + = -$, & $-X - = +$.

Regula pro cœfficientibus, ut alter multiplicetur per alterum.

Regula pro literis, ut secundum Alphabeti ordinem alteri altera adjungatur nullo signo interposito.

Regula pro exponentibus, ut dum quantitas quæpiam literalis exponente prædita multiplicanda est per eandem itidem exponente affectam, ea quantitas in producto tantum semel scribatur cum exponente æquali summæ exponentium utriusque factoris.

Exempla. Si $4 b^2 c$ ducendum in $-3 d d$, erit $+x - = -$, $4 \times 3 = 12$, $b^2 c \times d d = b^2 c d d$, adeoque factum $-12 b^2 c d d$.

Sic quoque si $-3 b b$ multiplicandum per $-b^3$, imprimis fiet $-x - = +$, dein 3×1 (quippe (131) quivis terminus alio cœfficiente carens, unitatem habere intelligitur) $= 3$; $b b \times b^3$, vel $b^2 \times b^3 = b^5$, ac productum denique $+3b^5$, vel omisso signo, $3b^5$.

Eadem operandi ratione reperietur

$$a \times b = ab$$

$$-bc^3 \times 3bd = -3b^2c^3d$$

$$3aac \times -2bc = -6a^2bc^2$$

$a^3 \times a^4 = a^7$. Nam $a^3 = aaa$, & $a^4 = aaaa$; quare $a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$. ex quo regula pro exponentibus allata evidens fit.

$$abc \times 3a^2b^3cd = 3a^3b^4c^2d.$$

$$4a^3b^5 \times -7a^2b^3cd^4 = -28a^5b^8cd^4.$$

143. *Multiplicatio polynomiorum fit ut in Arithmetica numerica, dum prius producta partialia terminorum singulorum multiplicatoris in terminos singulos multiplicandi quæeruntur juxta regulas modo expositas (142), dein hæc in unam summam colliguntur pro facto totali.* Illud solum discriminis est inter multiplicationem numerorum, & quantitatum polynomiarum, quod non necesse sit, quemadmodum in numeris, ut terminorum ordo propositus servetur, sed satis sit terminos singulos unius factoris in singulos alterius ducere, ut producta partialia reperiantur.

Exempli causa proponatur polynomium $a+3c-d$ ducendum in $2a-d$.

Terminis utriusque,

ut in Arithmetica (47) $a+3c-d$

præceptum est, dispositis $2a-d$

ducatur a in $2a$, & factum $2aa+6ac-2ad$

$2aa$ subscribatur: dein $-ad-3cd$ dd

multiplicetur $+3c$ per $2a$, $2aa+6ac-3ad-3cd+dd$

fiet $+6ac$; ac ducto $-d$

in $2a$ habetur $-2ad$. Sumatur jam alter multiplicatoris terminus $-d$, qui ductus in a efficit $-ad$; per $+3c$ multiplicatus dat $-3cd$, ac denique ductus in $-d$ facit $+dd$.

Facta hæc partialia addantur in unam summam, adhibita reductione, habebitur productum totale $= 2aa+6ac-3ad-3cd+dd$.

Exem-

Exempla alia.

$$\begin{array}{r}
 a^3 - 3ab^2 + bb \\
 \hline
 aabb - b^3 \\
 \hline
 a^2bb - 3a^3b^6 + aab^4 \\
 - a^3b^3 + 3ab^7 - b^5 \\
 \hline
 a^5b^2 - a^3b^3 - 3a^3b^6 + a^2b^4 + 3ab^7 - b^5 \\
 aa + 2ac - bc \\
 \hline
 a - b \\
 \hline
 a^3 + 2aac - abc \\
 - aab - 2abc + bbc \\
 \hline
 a^3 - aab + 2aac - 3abc + bbc
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2a - 2b \\
 \hline
 2a + 2b \\
 \hline
 4aa - 4ab \\
 + 4ab - 4bb \\
 \hline
 4aa - 4bb
 \end{array}$$

144. *Observa.* I. Quandoque, dum quantitates complexæ multiplicandæ sunt, ne confusio literarum oriatur, satis est multiplicationem tantum indicare, inter utrumque factorem (cui linea superscribitur) signo $\times$ interjecto, hunc in modum

$$a + 3c - dd \times bb - 6dd, \text{ quod indicat } a + 3c - dd \text{ debere du-}$$

ci in $bb - 6dd$; alii omisso signo $\times$ singulos factores parentheses signis inclusos exhibent, ut $(a + 3c - dd)(bb - 6dd)$

Alii aliis expressionibus utuntur, quas usus docebit.

145. II. *Demonstratio regulæ pro signis datæ.* Demonstrandum est, debere fieri $+ \times = +$, & $- \times = -$.

Primo. Dum a per $b - c$ multiplicandum est, & ponitur primo productum ex a in b , nempe ab , manifestum est, productum istud esse justo majus, quandoquidem non integra quantitas b multiplicanda ponitur, sed diminuta quantitate c : igitur in producto ab toties plus æquo continetur quantitas c , quoties in eodem reperitur b ; atqui quantitas a exprimit, quoties b contineatur in ab , quare quantitas c toties auferri debet ex producto ab , quot a unitates habet, seu, quod idem est, ex ab subtrahendum $c \times a$, seu ac , & hinc factum ex a in $b - c$ est $ab - ac$.

In numeris. Dum multiplicando 5 per $6 - 4$ ab
ini-

initio ponitur $5 \times 6 = 30$, factum 30 majus est, quam debeat, cum $6 - 4$ solummodo 2 valeant: & quidem excessus ille facti inde ortus est, quod numerus 4 quem ex 6 auferri oportuit, quinquies in eo continetur: ut ergo factum debitum habeatur, ex 30 quinquies auferri debent 4, hoc est 20, residuum 10 erit productum quæsitum. Unde factum ex 5 in 6 hunc in modum exhibendum est $30 - 20$.

Secundo. Cum $a - b$ in $c - d$ ducitur, patet sane, factum ex $a - b$ in c , nempe $ac - bc$, esse majus, quam oporteat, quod quantitas c imminuta sit quantitate d ; quare ex facto illo $ac - bc$ toties subtrahi debet d , quoties in eodem continetur c ; jam vero $a - b$ exprimit quoties c reperiatur in $ac - bc$, ergo auferenda est quantitas d per $a - b$ multiplicata, hoc est $ad - bd$. Fit autem subtractio quantitatis $ad - bd$ ex $ac - bc$, si scribatur $ac - bc - ad + bd$ (140); Unde manifestum fit, in multiplicatione $a - b$ per $c - d$ factum ex $-b$ in $-d$, debere esse $+bd$, ut scilicet debita compensatio habeatur. Si literis a, b, c, d substituantur numeri, ut 6, 4, 7, 3, eadem demonstratio locum habet.

De Divisione.

146. *Divisio algebraica universim fit, si infra dividendum ducta linea divisor scribatur.* Sic $\frac{a - bb + cc}{3ac + dd}$ deno-

tat quotientem ex quantitate $a - bb + cc$ per $3ac + dd$ divisa. Atque hinc constat, quantitatem algebraicam alteram per alteram dividere, nihil esse aliud, quam eam solita fractionum forma exhibere.

Verum cum fractiones semper reducendæ sint ad expressionem simplicissimam; quemadmodum in multiplicatione fecimus, ita etiam pro divisione binorum terminorum algebraicorum quatuor peculiare regulæ præscribi possunt.

I. Regula pro signis: quotiens ex duobus terminis eodem signo affectis, semper est positivus; ex terminis contraria signa habentibus semper negativus.

H. Regula pro cœfficientibus: Si alter per alterum sine residuo dividi potest, uterque omittitur, & in loco majoris substituitur quotiens inventus; si divisio sine residuo fieri nequit, uterque cœfficiens retinetur, ut datus est, fractionis forma; si cœfficientes sunt æquales, uterque deletur.

III. Regula pro literis: Infra literas dividendi ducta linea, subscribuntur literæ divisoris.

IV. Regula pro exponentibus: Si eadem litera tam in dividendo, quam in divisore occurrat cum diversis exponentibus, ea illic omittitur, ubi minorem habet exponentem, & siquidem in illo termino nulla adsit alia litera, ponitur 1: in altero vero termino loco exponentis majoris adhibetur exponentium differentia, at si exponentes æquales sint, litera in utroque termino omittenda est, aut deficientibus aliis literis, unitas substituenda.

Regulæ huic locus est, etiam cum nullus literis exponens adscriptus est, quod tunc (132) unitatem habere pro exponente intelligantur.

Exempla. Si quantitas $4ac^3de^5$ dividenda per

$$2bd^3e^3f; \text{ erit } \frac{4ac^3de^5}{2bd^3e^3f} = 2; \text{ \& } \frac{4}{2} = 2; \text{ igitur scribendum}$$

$$\frac{2ac^3de^5}{bd^3e^3f}; \text{ per regulam vero pro exponentibus}$$

datam, apparet, in dividendo omittendum esse d , & in divisore loco d^3 substituendum d^2 vel dd ; item in divisore delendum e^3 , relicto in dividendo e^2 , vel ee ,

$$\text{ut adeo quotiens sit } \frac{2ac^3e^2}{bddf}.$$

Sit

+ Sit dividendus $3a^3$, divisor $= 12a^4b^3$; erit
 $\frac{+}{-} = -$, $\frac{1^2}{3} = 4$; deletur itaque 3 in dividendo, &

loco 12 in divisore adhibetur 4; ut sit $\frac{a^3}{4a^4b^3}$: porro

ex regula exponentium quantitati a^3 substitui debet
 unitas in dividendo, in divisore vero relinqui a^1 , vel

a : quare quotus habetur $= \frac{1}{4ab^3}$. Eodem modo in-

$$\begin{aligned} \text{venitur } \frac{3abc}{3abc} &= \frac{1}{1} = 1; \quad \frac{-4bd}{2bd} = -\frac{2}{1} = -2; \quad \frac{3aab}{5ac} \\ &= \frac{3ab}{5c}; \quad \frac{-12abd}{3a} = -\frac{4bd}{1} = -4bd; \quad \frac{4a^3bbd}{4abd} = \frac{aab}{1} \\ &= aab; \text{ \&c.} \end{aligned}$$

147. Regulæ cœfficientium, & exponentium so-
 lummodo reductionem continent fractionum ad sim-
 plicissimam expressionem; & ea quidem, quæ exponen-
 tes concernit, huic innititur rationi, quod cum eadem
 quantitas in dividendo, & divisore occurrit, quotiens

fit 1 (79), sive quod reduci possit ad $\frac{1}{1}$. Hinc cum $\frac{a^3}{a^5}$

fit idem ac $\frac{aaa}{aaa \times aa}$, liquet (76) esse $\frac{aaa}{aaa} = 1$, vel

$\frac{1}{1}$; unde substitui potest $\frac{1}{1 \times aa}$, seu $\frac{1}{aa}$, vel $\frac{1}{a^2}$. Ex

quo apparet, per hanc reductionem, literæ, quæ
 majorem habuit exponentem, solum differentiam ex-
 ponentium relinquendam esse; illi vero, cujus expo-
 nens minor erat, esse 1 substituendam.

148. Eadem regulæ, sive reductiones locum ha-
 bent

bent in fractionibus polynomiorum, quando una pluresve notæ literales in singulis tam dividendi, quam divisoris terminis reperiuntur eadem. Hac ratione

$$\frac{ax - 2abx}{ax + axx} \text{ reducitur ad } \frac{1 - 2b}{1 + x}, \text{ deleto scilicet } ax \text{ in}$$

singulis terminis, & ubi solum erat, unitate furro-

$$\text{gata. Similiter } \frac{3xx}{3axx + 3bbxx} \text{ reducitur ad } \frac{1}{a + bb}; \&$$

$$\frac{4a^2xx + 3a^3bbx}{aax - aabx} \text{ fit } \frac{4x + 3abb}{1 - b}; \text{ item } \frac{4abxx - 2ab}{2aabb + 4abb}$$

$$= \frac{2xx - 1}{ab + 2b}$$

149. Polynomiorum divisio eadem omnino est, ac quæ in numeris adhibetur, quamvis in quantitatibus Algebraicis raro successum habeat; ejus tamen periculum facere convenit, neque illico, quibusdam reductionibus factis, res absoluta putanda est. Ipse usus docebit, quandonam polynomium unum per alterum exacte dividi queat. Interim en exemplum:

Quærat, utrum $aa + ab + ac + bc$ exacte per a

$+ c$ dividi possit: disponantur omnia, ut alias; & indagetur, quis ex aa (primo dividendi termino) per a (primum terminum divisoris) fit quotientis: reperitur a , cum (146)

$$\frac{aa}{a} = a; \text{ collocetur } a \text{ in loco}$$

quotientis, ac per eundem multiplicato divisore $a + c$, factum $aa + ac$ auferatur

H

ex

$$\begin{array}{r} aa + ab + ac + bc \\ \underline{a + c} \\ aa + ac \\ \underline{ab + bc} \\ ab + bc \\ \underline{} \\ 0 \end{array} = a + b$$

ex dividendo; supererit facta reductione $ab + bc$. Tum ulterius est $\frac{+}{+} = +$, & $\frac{ab}{a} = b$; adjungatur itaque $\div b$ priori quotienti, & rursus per $+ b$ multiplicato divisore obtinetur productum $ab + bc$, quod e residuo $ab + bc$ subtractum nihil relinquit. Colligitur ergo, quotientem quæsitum esse $a + b$.

DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE QUANTITATUM.

150. Quævis quantitas considerari potest *primo* vel ut valorem alicujus rei simpliciter exhibet; *secundo*, vel tanquam summa, aut factum ex pluribus aliis ortum; *tertio*, vel instar differentiae aut quotientis aliarum. Ita etiam spectari potest, ut simpliciter quascunque res duodecim numero denotat; vel vero ut summa ex $3 + 9$, aut $2 + 10$, vel $4 + 8$ &c, aut etiam ut factum ex 3×4 , vel 2×6 &c; aut denique velut differentia inter 15 & 3 , inter 17 & 5 &c, vel ut quotiens ex $\frac{15}{3}$, vel $\frac{24}{2}$ &c.

Præcipuæ Matheseos partes sunt, quantitates inter se comparare, componere & resolvere; sed de comparatione infra agemus.

151. Compositio plurium quantitatum in unam plerumque difficultate caret, cum seu additione, seu multiplicatione peragatur, quæ operationes semper exacte fieri possunt; at vero resolutio non modo difficilis, sed etiam sæpe impossibilis est, præcipue si valor in numeris integris petatur, utpote cum quantitates maxime ope divisionis resolvendæ sint, quæ raro quotientem exactum exhibet, quin quid prætereà remaneat.

152. Quantitas quælibet a , ut simplex, & non composita, spectata, *primi gradus* esse dicitur, aut *potentia prima* appellatur. At si ea semel in se ipsam ducatur, si bis, ter &c, productum fit secundi, tertii, quarti gradus &c, seu dicitur ea quantitas ad secundam, tertiam, quartam &c potentiam elevata. Univerſim productum fit quantitas illius gradus, seu talis potentia, qualem indicat exponens ex multiplicatione ortus. Sic aa , vel a^2 , considerata ut factum ex axa , vocatur quantitas secundi gradus, seu secunda potentia quantitatis a . Similiter a^4 , tanquam productum ex $axaxaxa$, est quarta potentia ejusdem quantitatis a .

153. Quantitas illa simplex, sive quæ simplicis instar consideratur, atque ad potentiam quandam elevatur, dicitur *radix* ejus potentiae. In exemplo a est radix tertia potentiae a^3 , radix septima potentiae a^7 &c. Idem est in numeris; 20736 si spectetur ut quarta potentia numeri 12, vicissim 12 est quarta radix numeri 20736.

154. Ex analogia ad dimensiones corporis, solet quoque secunda potentia, ut b^2 , vocari *quadratum* quantitatis b , tertia b^3 , *cubus* ejusdem; alias etiam b^4 dicebatur *quadrato-quadratum*, & b^5 *quadrato-cubus*, b^6 *cubo-cubus* quantitatis b . Vicissim b est radix quadrata de bb vel b^2 , radix cubica de b^3 , radix quadrato-quadrata de b^4 &c.

155. Compositio & resolutio quantitatum ad hæc quatuor revocatur, *primo* ut ex pluribus fiat una, quod additio & multiplicatio præstat; *secundo* ut reperiantur omnes quantitates, quarum multipulum est quantitas data, seu, quod idem, ut inveniantur omnes divisores, quibus scilicet divisio exacta, & sine residuo, quantitatis datæ institui potest. *Tertio* ut quantitas quævis ad potentiam datam eleveetur.

Quarto ut extrahatur radix quælibet ex quantitate data, quæ tanquam potentia illius radicis spectatur.

Qua ratione omnes quantitatis datæ divisores reperiantur.

156. I. Si quantitas data est numerus, tentetur ejus divisio successive per quosvis numeros primos, donec inveniatur quotiens sine residuo; tum is quotiens rursus dividatur, si fieri potest, per aliquem numerum primum, ac iidem numeri iterum adhibeantur dividendo secundo quotienti, donec tandem deveniatur ad quotientem unitate non majorem, sive donec nullus alter reperiatur divisor minor, quam quotiens præcedentis divisionis. Scribantur omnes divisores adhibiti, & multiplicentur imprimis bini quivis, tum terni, quaterni &c, facta cum singulis simplicibus erunt divisores, quos quantitas data habere potest.

Exemplum. Quærantur omnes divisores numeri 630. Dividatur primo per 2; quotiens 315 divisionem per 2 non admittit; succedit tamen divisio per 3, & fit quotiens 105, qui item per 3 divisus suppeditat tertium quotum 35; at hic nec per 2, nec per 3 accurate dividi potest, attamen per 5, quoto emergente 7. Jam vero 7 nullum ex præcedentibus divisoribus habet, nec alium unitate majorem, quam 7, ut postremus quotiens jam sit 1. Sunt igitur divisores adhibiti 2, 3, 3, 5, 7, quorum bini quivis inter se multiplicati dant $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$. Facta e ternis sunt $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $2 \times 5 \times 7 = 70$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$. Facta e quaternis $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$. Denique factum e quinis $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ est 630. Ut adeo divisores numeri dati sint 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630.

Ratio intellectu facillima est. Cum enim numerus datus æqualis sit facto ex quinque illis divisoribus $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, manifestum est, in eo contineri accurate omnia facta binorum, ternorum, quaternorum &c eorundem divisorum.

II. Eadem lex in quantitativis algebraicis tenenda. Detur exempli causa $bbdd + b^3d$, cujus divisores inveniendi sint. Dividatur primo per b , quotus primus erit $bdd + bbd$; hic rursus per b divisus, dat quotum alterum $dd + bd$, cujus si divisio per $b + d$

$b + d$ fiat, tertiū quotus fit d , quo per semet diviso ad r perventum est. Quare divisores adhibiti sunt $b, b, b + d, d$; horum bini in se ducti suppeditant divisores compositos $bb, bb + bd, bd, bd + dd$; si terni quavis multiplicentur, acquiruntur præterea $b^3 + bbd, bbd + bdd, bbd$; denique e quaternis habetur $b^3 d + bbd d$. Sunt igitur divisores quæsi $r, b, b + d, d, bb, bbd, bd, bb + bd, bd + dd, b^3 + bbd, bbd + bdd, b^3 d + bbd d$.

Quomodo quantitates ad potentiam datam eleventur.

157. Quoniam prima potentia quantitatis a est a vel a^1 , in qua a non est multiplicata; secunda vero a^2 , sive axa , tertia a^3 , aut $axaxa$, quarta a^4 seu $axaxaxa$, facile sequens regula universalis deducitur.

158. Ut quantitas quæpiam ad potentiam datam elevetur, per se ipsam multiplicanda est tot vicibus dempta una, quot exponens illius potentie unitates continet. v. g. Si 9 elevanda sint ad tertiam potentiam, is numerus bis in se ipsum ducatur; nempe $9 \times 9 = 81$, $81 \times 9 = 729$.

Eodem modo quadratum de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; ejus cubus $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$, quarta potentia $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$ &c. Sic etiam quadratum de $\frac{1}{10}$ est $\frac{1}{100}$, cubus $\frac{1}{1000}$, quarta potentia $\frac{1}{10000}$ &c.

159. Hinc autem patet simul, potentiam alicujus fractionis fieri quantitatem eo minorem respectu unitatis ad eandem potentiam elevatæ, quo fractio minor pars unitatis est, & quo potentia, ad quam elevatur, est altioris gradus. Verum quia plerumque in quantitativis algebraicis satis est, si indicentur modo eæ potentie, sine actuali multiplicatione, dicendum jam, qua id ratione præstetur.

160. I. Ut monomium ad potentiam quamvis elevetur, omnibus ejus literis exponens illius potentie adscribendus est. Sic quinta potentia de abc est $a^5 b^5 c^5$; potentia m

quam

quantitatis $\frac{ab}{cd}$ fit $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$; cubus ex $\frac{2ab}{5fg}$ vero

$$\frac{8a^3 b^3}{125 f^3 g^3} \cdot \text{Etenim } \frac{2ab}{5fg} \times \frac{2ab}{5fg} = \frac{4aabb}{25ffgg} \& \frac{4aabb}{25ffgg} \\ \times \frac{2ab}{5fg} = \frac{8a^3 b^3}{125 f^3 g^3}.$$

161. II. Si in quantitate data habeantur jam literæ cum affixis exponentibus, hi exponentes multiplicandi sunt per exponentem potentie, ad quam tota ea quantitas elevari debet. v. g. Si $a^3 b^2$ elevari debeat ad quartam potentiam, fiat $a^3 \times 4 b^2 \times 4 = a^{12} b^8$. Est enim $a^3 b^3 \times a^3 b^2 \times a^3 b^2 \times a^3 b^2$

$= a^{12} b^8$. In genere quantitatis $\frac{a^3 b^n}{c^m d^q}$ potentia m est

$$\frac{a^{3m} b^{mn}}{c^m d^{mq}}.$$

162 III. Ut indicetur, polynomium esse ad potentiam quandam elevatum, omnibus ejus terminis linea continua superne adscribitur, cujus extremo ad partem dextram exponens illius potentie adjungitur. Hunc in modum $aa - bc^m$ denotat potentiam m binomii $aa - bc$. Alii utuntur sequente expressione $(aa - bc)^m$.

Verum potentiarum polynomiorum natura, præcipue quadratorum & cuborum; non nihil accuratius perpendenda est.

163. Itaque si primo $a + b$, vel $-a - b$, elevetur ad quadratum, reperitur $aa + 2ab + bb$; & si fiat quadratum ex $a - b$, vel $-a + b$, obtinetur $aa - 2ab + bb$. Unde manifestum est, quadratum binomii constare ex quadrato termini primi, ex quadrato termini secundi, & ex

facto dupli primi in terminum secundum. Quod si terminus uterque binomii idem habeat signum, omnes partes quadrati sunt positivæ; si signa terminorum sint contraria, factum ex duplo primi in secundum est negativum.

164. *Secundo.* Ex binomio quovis si cubus fiat, e. g. ex $a+b$, reperitur $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Hinc autem colligitur, cubum omnem binomii componi ex cubis utriusvis termini, ex factis tripli quadrati cujusvis termini in alterum terminum.

Quod si eodem modo polynomium elevetur ad alias successive potentias, semper facile observare licebit, quibusnam quævis partibus constet.

Variae potentiarum, & radicum expressiones.

165. Illud facile intelligitur, quantitatem quamvis, velut a , ad eas successive attolli potentias, quas numerus unitatum ejus exponenti additarum indicat: sic cum a^1 sit prima potentia, erit a^{1+1} , seu a^2 , secunda; a^{2+1} , vel a^3 , tertia, a^{3+1} ; seu a^4 , quarta &c.

Atque hic potentias concipiendi modus si cum ea, quam habet, amplitudine sumatur, perspicuum est, universim quantitatis cujuslibet tot posse esse potentias, quot ei exponentes tribui possunt, hoc est, quot numeri dantur seu integri, seu fracti; positivi, aut negativi.

Et quamvis si aliæ potentiae videantur plerumque concipi, quarum exponentes sint numeri integri, ut est potentia a^m , nihilominus tamen licet etiam cogitare, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$ &c, imo etiam a^0 , quæ totidem diversas potentiarum species exhibent,

quarum natura intelligi potest, si referantur ad expressionem a^m .

166 I. Ut igitur a^0 revocetur ad expressionē a^m , facile apparet, a^0 non posse mutari in a^m , nisi a^0 multiplicetur per a^m ; erit enim factum $(142) a^0 + m = a^m$. Ergo a^0 debet esse factor, qui in quantitate quampiam ductus eam nec augeat, nec minuat, id, quod soli unitati proprium est; quare $a^0 = 1$. Aliter: $a^0 = a^{m-m}$,

est vero $(146) a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$; consequenter $a^0 = 1$. Quare

re universim *quantitas quævis elevata ad potentiam, cujus exponens est zerus, æqualis est unitati.*

167 II. Ut a^n transmutetur in a^m , necesse est, ut a^n elevetur ad potentiam n ; quod fit (161) ducto exponents $\frac{m}{n}$ in n ; habebitur enim $a^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$. Unde a^m est potentia n quantitatis $a^{\frac{m}{n}}$; & vicissim $a^{\frac{m}{n}}$, est radix n potentiae a^m ,

seu $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Et in genere, *quantitas elevata ad fractionem, est radix habens pro exponents fractionis denominatorem, potentiae illius, cujus exponens est ejusdem fractionis numerator,*

v.g. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ &c.

168 III. Ut $a^{\frac{m}{n}}$ fiat a^m , patet, $a^{\frac{m}{n}}$ duci debere in $a^{\frac{m}{n}}$; ita enim transformabitur in $a^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} = a^0$. Quare

$$(56) \frac{a^m}{a^{2m}} = a^{-m}. \text{ Est autem } \frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m} \quad (146); \text{ igitur}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Atque hinc generatim constat, quantitatem elevatam ad potentiam exponentis negativi integri, nil aliud esse, quam unitatem divisam per potentiam positivam ejus quantitatis, cujus exponens est numerus ille integer. Sic $a^{-2} = \frac{1}{aa}$; $ab^{-5} = \frac{a}{b^5}$.

169. IV. Hinc porro manifestum fit, esse $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$$= \frac{1}{\sqrt[m]{a^m}}$$

170. Coroll. I. Ex allatis hucusque intelligitur ratio, expressiones radicum (quas *radicalia* appellant) forma potentiarum exhibendi, vel etiam in alias quantitates radicales æquivalentes convertendi. Exempli causa $\sqrt{\frac{a}{b}}$ idem est ac $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ vel

$$\text{etiam } \sqrt{\frac{a^3}{b^3}}.$$

171. Coroll. II. Potentiæ & radices easdem operationes admittunt, quas numeri integri, & fracti.

172. Deinceps cum voce *potentia* utemur, semper intelligemus ejusmodi potentiam, cujus exponens est numerus integer positivus; per *potentiam negativam* significabimus talem, cujus exponens est numerus integer negativus; *potentiam exponentis fracti* vocabimus, quæ fractionem positivam habet pro exponente; *potentiam exponentis fracti negativi* dicemus, cujus exponens sit fractio valoris negativi. Porro nomine *potentia perfectæ* indicabimus eam, cujus radix numero aliquo, seu integro, seu fracto exprimi potest: cujus vero radix nullo numero exhiberi potest, eam *potentiam imperfectam* vocabimus. In sequentibus apparebit, plurimos numeros esse potentias imperfectas.

De Extractione Radicum.

173. I. Radix quævis ex monomio dato extrahitur, si singularum literarum monomii exponentes dividantur per exponentem radicis. Hac igitur operatione exponentes literarum fiunt fractiones; & siquidem eæ reduci possint ad numeros integros, extractio radicis perfecta censeri debet; fecus, solummodo indicatur.

Sit exempli causa extrahenda radix quadrata ex $a^2 b^6$; juxta legem expositam fiet $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{6}{2}}$, & adhibita reductione erit radix vera, quæ quærebatur ab^3 . Nam $ab^3 \times ab^3 = a^2 b^6$ (142).

Ut extrahatur radix cubica ex $a^6 b$. scribendum est $a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{1}{3}}$, facta reductione habetur $a^2 b^{\frac{1}{3}}$, quare extractio ex parte imperfecta est.

In genere radix m potentia $\frac{a^p b^q}{c^r d^n}$ est $\frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{c^{\frac{r}{m}} d^{\frac{n}{m}}}$. Aequi-

valet enim hæc expressio sequenti $\sqrt[m]{\frac{a^p b^q}{c^r d^n}}$.

174. II. Si monomio præfixus fit coefficientis, etiam ex hoc radix juxta regulas pro numeris præscribendas extrahi debet.

175. III. Radix ex polynomio extrahi nequit, nisi si polynomium sit reipsa potentia ex multiplicatione illius radice facta, quod rarum admodum est; atque hinc plerumque satis est, extractionem indicare, terminis polynomii linea superne adscripta, & præfixo signo radicali $\sqrt{}$ cum exponente radice inter crura hujus signi collocato, vel exponente fracto ad finem lineæ ex dextra parte posito. Hunc in modum radix quadrata quantitatis $aa - bb$ indicatur

per $\sqrt{aa - bb}$, vel $aa - bb^{\frac{1}{2}}$; alii scribunt $\sqrt{(aa - bb)}$

vel $(aa - bb)^{\frac{1}{2}}$. Ut denotetur radix cubica poly-

nomii $\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}$, adhiberi potest hæc expressio

$$\sqrt[3]{\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}} \text{ vel } \frac{\sqrt[3]{aa - 3b + c}}{\sqrt[3]{cc - dd}} \text{ vel } \frac{aa - 3b + c^{\frac{1}{3}}}{cc - dd^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{vel } \left(\frac{aa - 3b + c}{cc - dd} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ vel denique } \frac{(aa - 3b + c)^{\frac{1}{3}}}{(cc - dd)^{\frac{1}{3}}}$$

Extractio radicum e potentiis hunc in modum indicata nunquam peragi solet, nisi postquam numeri in literarum Algebraicarum locum sunt substituti.

176. Qui frequentiore usu calculum Algebraicum sibi familiarem reddiderit, facile advertet, an polynomium propositum sit potentia perfecta radice, quam extrahere cupit, atque adeo an ipsa extractio facienda sit, vel satis sit eam indicare. En autem

methodum, qua explorari possit, utrum radix quadrata e polynomio dato extrahi queat.

177. Detur polynomium $aa + 2ax + xx$; poterit quisque hunc in modum secum ratiocinari: quoniam quantitas proposita polynomia est, ejus radix plures habet terminos, quam unum. Ponantur esse duo; igitur in polynomio dato contineri debent (163) quadratum termini primi, quadratum secundi, ac factum ex duplo primi in terminum secundum. Et quia occurrit reipsa quadratum aa , ejus radicem a (173) assumo pro termino primo quaesito, atque separatim ex dextra parte scribo, ejus vero quadratum aa ex polynomio dato $aa + 2ax + xx$ ($a + x$ Radix subtraham, remanenti-

$$\begin{array}{r} -aa \\ \hline 2ax + xx. \text{ Jam in} \\ \hline + 2ax + xx \\ \hline 2a + x \\ \hline x \\ \hline 2ax + xx \\ \hline -2ax - xx \\ \hline 0 \end{array}$$

residuo hoc adesse debet factum ex duplo termini primi a in alterum terminum radices quaesitae; quare nequit obtineri alter ille terminus, nisi residuum

$2ax + xx$ per duplum a , sive $2a$, dividatur; quandoquidem (56) divisione utendum est ad inveniendum alterum factorem, si alter sit datus. Divido itaque $2ax + xx$ per $2a$, & quotientem $+x$ adjungo priori parti radices: quod si $+x$ sit alter terminus quaestus, necesse est, ut factum ex eo in $2a$, una cum ejusdem quadrato, sit aequale residuo $2ax + xx$. Unde divisor $2a$ adjungo $+x$, totumque $2a + x$ multiplico per hunc secundum terminum x (factum enim aequale esse debet summæ ex producto $2a$ in x , & quadrato termini x); obtineo autem productum

$2ax$

$2ax + xx$, quod cum subtractum a residuo $2ax + xx$ nihil relinquat, manifestum est, polynomii $aa + 2ax + xx$ radicem quadratam esse $a + x$, quippe cum per operationes hactenus institutas eadem quantitas resoluta sit in partes, ex quibus composita est.

178. Eadem omnino methodus adhibetur, quando radix quadrata ex numeris extrahenda est; & quoniam singularum operationum rationes jam reddidimus, dum radicem ex $aa + 2ax + xx$ quæсивimus, solummodo ipsas operationes faciendas in numeris præscribemus.

Ac imprimis quidem notæ esse debent radices quadratæ omnium numerorum quadratorum, qui 100 non adæquant, ut hic videre est.

Quadrata --- 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Radices ---- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

179. Hinc porro apparet, numerum simplicem non posse habere quadratum, cujus plures sint notæ, quam duæ; quandoquidem 10, qui est primus numerus eorum, qui e pluribus notis componuntur, quadratum habet 100, quod est numerus minimus omnium tribus notis constantium. Si eodem modo ad alios numeros transeamus, manifestum quoque erit, numeri e duabus notis compositi quadratum non posse habere plures notas, quam quatuor; etenim 100 (qui est minimus eorum, qui tres notas habent) ad quadratum elevatus, est 10000, quo nullus datur numerus minor quinque notis constans. Universim: nullius quadratum plures notas habere potest, quam sit duplex notarum suarum numerus.

Quæraturs itaque radix quadrata numeri 1764, qui

qui cum quatuor notis constet, ejus radix duas notas habere debet: separentur igitur
 binæ quævis notæ interposita virgula, initio a dextra parte factò;
 quærat in primo a sinistris membro quadratum hunc in modum: radix quadrata de 17, est paulo major, quam 4; collocetur 4 a latere, & quadratum illius 16 subtrahatur ex 17; remanet unitas, cui versus dextram adjungatur proxime sequens membrum 64; accipiatur duplum radicis inventæ 4, nempe 8, atque notæ 6 subscribatur, primæ scilicet novi membri; dividatur 16 per 8; erit quotiens 2, qui radici jam inventæ adjungatur, simulque divisor 8; multiplicetur 82 per novam hanc radicis partem 2, & factum 164 auferatur ex residuo 164; quoniam nihil remanet, radix quæsitæ est 42.

$$\begin{array}{r} 17,64(\\ 16 \quad 42 \\ \hline 1,64 \\ 82 \\ \hline 164 \\ \hline 0 \end{array}$$

Si desideretur radix quadrata numeri 389489, fecetur interpositis virgulis in tria membra, quibus singulis binæ notæ respondent, initio a dextris factò: quærat in primo membro 38 proxime æqualis, quæ est 6, & scribatur a latere, illius vero quadratum subtrahatur a primo membro; manet residuum 2. Adjungatur huic membrum secundum 94, & scribatur duplum radicis inventæ 12 ita, ut 2 sint infra 9: dividatur 29 per 12, & quotus 2 tam divisor 12, quam radici inventæ 6 versus dextram adjungatur: si per 2 multiplicetur 122, & factum 244 auferatur ex 294, habebitur residuum 50, cui tertium conjungatur membrum 89, & utraque nota 62 huc usque reperta confide-

$$\begin{array}{r} 38\ 94,89(\\ 36 \quad 624 \\ \hline 294 \\ 122 \\ \hline 244 \\ \hline 50,89 \\ 1244 \\ \hline 4976 \\ \hline 113 \end{array}$$

sideretur tanquam pars prima radicis binomiæ; ideoque ejus duplum 124 ita subscribatur residuo priori novo membro aucto, ut nota 4 infra 8 collocetur, primam scilicet notam novi membri. Diviso 508 per 124, obtinetur quotus 4, qui tam radici inventæ, quam divisoni versus dextram adscriptus, & in 1244 ductus, suppeditat factum 4976, quod subtractum ex 5089 relinquit 113. Quoniam nullum restat membrum numeri propositi huic residuo adjungendum, erit radix quadrata veræ proxima 624 numeri dati 389489, qui si 113 minueretur, foret numerus perfecte quadratus.

180. Quando calculus singularem accurationem non desiderat, residua, quæ peracta, ut modo exposuimus, extractione supersunt, negligi possunt; at si etiam horum rationem habere oporteat, notis integris adjungendæ fractiones decimales inveniri debent, toties scilicet notis remanentibus, novi membri instar, adscriptis binis zeris, quot notarum fractio desideratur, atque extractione continuata: notæ enim inde inventæ erunt totidem decimales.

Exemplum: addantur superiori residuo 113 duo zeri, & radix reperta 624 spectetur tanquam pars prima binomiæ: adeoque ejus duplum 1248 scribatur infra 11300 ut 8 respondeat primo zero: dividatur 11300 per 1248 quotus est 9. qui adjungatur simul divisoni, simul radici inventæ; ducatur quoque in 12480; factum 9 subtractum ex 11300 relinquit 11300. Novo residuo rursus adjungantur duo zeri, ut altera nota decimalis acquiratur; radix 6240 iterum pro prima parte radicis binomiæ habeatur, & residuo subscribatur ejus duplum 12480 ita, ut 0 sit infra penultimum zerum residui; instituta divisione reperitur quotiens 9 priori radici, & ipsi divisoni versus dextram

tram apponendus; & si is ducatur in 124809, atque productum 1123281 ex 1130000 subtrahatur, remanet 6719. Si radicem 624,09 pro satis accurata habere velim, negligendum est postremum residuum; at si propius ad radicem veram accedere lubeat, rursus duo zeri adscribendi sunt, atque eadem operatio repetenda, donec tot habeantur notæ decimales, quot visum fuerit.

$$\begin{array}{r} 38,94,89 \\ 36 \end{array} \left(\begin{array}{l} 624,0905 \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ 122 \\ 244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5089 \\ 1244 \\ 4976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11300 \\ 12480 \end{array}$$

e

$$1130000$$

$$124809$$

$$1123281$$

$$671000$$

$$1248180$$

o

$$67190000$$

$$12481805$$

$$62409025$$

&c.

$$4780975$$

181. *Observa.* Quando radix fractionis petitur, ea ex singulis ejus terminis, numeratore scilicet, & denominatore, separatim extrahenda est. v.g. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, cum $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; item $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Verum si ejus termini non sint numeri quadrati, satis est, toti fractioni signum radicale præfigere, aut etiam fractio reduci poterit ad decimalem, indeque radix eodem modo extrahi, quem adhibendum esse diximus, dum numeri perfecta quadrata non sunt, sed aliquid residui relinquunt.

De præcipuis proprietatibus potentiarum in numeris.

182. Theorema I. Factum ex potentia perfecta alicujus numeri in potentiam imperfectam ejusdem gradus alterius numeri, non potest esse potentia perfecta illius gradus.

Demonstratio. Si a^3 cubus perfectus, & b cubus imperfectus; erit $a^3 b$ cubus imperfectus. Etenim si ponatur esse perfectus, ejus radix vera, & sine residuo, fiet $ab^{\frac{1}{3}}$ quæ si dividatur per a , radicem veram cubi a^3 , habebitur $b^{\frac{1}{3}}$ vera quæque radix cubi b , & hinc nequit b esse cubus imperfectus, contra hypothefin.

183. Coroll. Nequit fieri, ut numerus quadratus, sit duplus, triplus, quintuplus &c alterius numeri quadrati, cum 2, 3, 5 &c sint quadrata imperfecta. Eodem modo numerus cubicus non potest esse duplus, triplus, quadruplus &c alterius numeri cubici, quia 2, 3, 4 &c sunt cubi imperfecti. Et universim: potentia perfectæ nequeunt esse multiplex aliarum ejusdem gradus, nisi ea sint potentia perfectæ.

184. Theorema II. Numerus per certos numeros primos divisibilis, ad quamcunque potentiam elevetur, non acquirit numeros primos alios pro divisoribus.

Demonstratio. Manifestum enim est, quod si v. g. abc non alios admittat numeros primos, quibus exacte dividi possit, quam a, b, c , neque alios fore divisores quadrati $aa bb cc$, vel cubi $a^3 b^3 c^3$ &c, qui sint numeri primi.

185. Coroll. Duo numeri, qui non habent communem divisorem (præter unitatem, in omnibus numeris integris contentam, de qua sermo non est, cum proprie per eam numerus non dividatur), etiam ad quamcunque potentiam ejusdem nominis elevati non acquirunt communem divisorem. Etenim divisores accurati nequeunt esse nisi vel numeri primi, vel primorum multipli; jam vero numeri, qui non habent communem divisorem, nec habent numeros primos pro communibus divisoribus; ergo nec elevati ad eandem quamcunque potentiam acquirunt numeros primos pro divisoribus communibus; multo minus vero eorum multiplos; consequenter nullum.

186. Theorema III. Numeri integri & fracti ad simplicissimam expressionem reducti summa, nequit fieri numerus integer, ad quamcunque potentiam elevetur.

Demonstratio. Fractio ad simplicissimam expressionem reducta est, cujus termini non habent communem divisorem; quod si jam fractio ejusmodi addatur numero integro, ut summa fiat nova fractio, termini novæ fractionis non habebunt communem divisorem; si quis enim esset communis divisor hujus novæ fractionis, ejus denominator (qui idem est tam ante reductionem, quam postea) debuisset fieri minor. & hinc prior fractio contra hypothesin non fuisset ad simplicissimam expressionem reducta; igitur fractionis ex numero integro & fracto ad minimos terminos reducto ortæ, termini nequeunt communem divisorem habere; adeoque neque si ad quamvis eleventur potentiam. Quoniam itaque nulla fractio reduci potest ad numerum integrum, nisi denominator sit simul divisor communis numeratoris, manifestum est, summam ortam ex integro & fracto ad minimos terminos reducto non posse fieri numerum integrum, ad quamcunque potentiam elevetur.

187. Coroll: *Nullo numero assignabili potest exprimi vera radix alicujus numeri, qui non sit perfecta potentia ejusdem exponentis cum radice.* Nam si numerus, cujus radix petitur, sit integer, supponamus ejus radicem veram constare ex integro & fractione: igitur si hæc radix elevetur ad eandem potentiam, debet is ipse numerus integer obtineri, qui datur, quod fieri non posse demonstravimus. Idem est, si supponamus numerum datum, cujus radix petitur, esse fractionem, aut constare ex integro & fracto ejusmodi, ut si ad eundem denominatorem reducti colligantur in unam fractionem, non uterque terminus sit potentia perfecta ejusdem gradus cum radice quæsitæ: potest enim tunc uterque terminus separatim spectari ut numerus integer, cujus radix assignari nequit.

188. Expressiones radicales numerorum, qui non sunt perfectæ potentiæ, vocantur *incommensurabilia*. Ejus generis

sunt $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$ &c.

De Extractione Radicis Cubicæ.

189. Si quis ad naturam polynomiorum ad potentias evectorum animum advertat, eodem modo regulas in extractione radicum cubicarum, immo aliarum etiam, observandas detegat, ut superius fecimus, cum de radice quadrata ageremus. Verum hæc

hæ regulæ eo magis semper complicatæ erunt, quo altiores fi-
ent potentæ.

Proponatur extrahenda radix cubica ex $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$. Apparet illico, radicem hujus quantitatis esse poly-
nomyam. Supponatur itaque binomia, cujus consequenter
cubus constat (164) e cubis singulorum terminorum, & factis
ex triplo quadrato cujuslibet termini in terminum alterum.

His positis, habetur imprimis cubus primi termini a^3 , cu-
jus radix separatim scribatur, ipse vero subtrahatur e quanti-
tate data: remanent $6aab + 12abb + 8b^3$.

Porro in hoc residuo adeste debet factum ex triplo quadra-
to primæ partis radicis a in partem alteram, quæ jam invenien-
da est: quare elevetur a ad quadratum aa , & per ejus triplum

$3aa$ dividatur residuum: fiet $\frac{6aab}{3aa} = 2b$; collocetur hic quo-

tiens penes priorem partem radicis. Quod si $+2b$ sit pars ra-
dicis quæsitæ, erit summa ex productis $3aa$ in $2b$, & $12bb$ in
 a , una cum cubo $8b^3$ æqualis residuo; quoniam igitur reipsa
summa exposita residuo æquatur, sequitur, radicem cubicam
quæsitam esse $a + 2b$.

190. Ut extractio fiat in numeris, noti sint oportet cubi
perfecti decem primorum numerorum.

Cubi ... 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000
Radices.. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Præterea illud isthic observandum est, nullius numeri cubum
posse habere plures notas, quam sit triplus numerus notarum
radicis: nam numeri 10, qui est minimus eorum, qui duabus
notis constant, cubus est 1000, minimus nempe e 4 notis com-
positorum. 100 (minimus tribus notis constantium) habet cu-
bum 1000000, minimum numerorum 7 notarum &c. Et uni-
versum per inductionem conficitur: *numerus habentem notas n,*
si elevetur ad potentiam p, non posse habere plures notas, quam
pn.

Sit extrahenda radix cubica e numero 74088; dividendus
itaque est hic numerus interjectis virgulis in membra ternis no-
tis constantia, initio a dextris factis; dein cum radix cubica pri-
mi membri a sinistris sit proxime 4, scribatur 4 e latere, & e-
jus cubus 64 subtrahatur e primo membro 74, erit residuum 10.

Huic ad dextram adscribatur membrum alterum numeri dati 088. Elevetur 4 (cujus valor reipsa est 40, cum uno loco præcedat notam alteram radices, quam quærimus) ad quadratum, nempe 1600, ducatur in 3 operatione separatim instituta, ut videre est in adscripto exemplo, & per factum 4800 (quod residuo altero membro aucto subscibitur) dividatur 10088, erit $\frac{10088}{4800} = 2$; quotus hic priori radices parti jungatur, simulque in divisorem ducatur, factum 9600 scribatur infra 4800. Fiat e 2 quadratum 4, quod separatim multiplicetur primo per 40, seu primam radices partem, & factum 160, ducatur secundo in 3, fiet 480, quod collocetur infra 9600. Denique fiat cubus secundæ hujus partis radices, nempe 8, & subscibatur priori facto 480: colligantur duo illa facta cum cubo secundæ partis in unam summam 10088, quæ cum æqualis sit residuo 10088, nec aliud supersit membrum numeri propositi, patet, radicem cubicam ex 74088 esse 42 accurate.

74.088	(42	1600
64		3
10088		
4800		4800
9600		
480		4
8		40
10088		160
0		3
		480

Exemplum alterum: Quæratu radix cubica numeri 5305472, qui consequenter in sua membra dividatur, ternas notas cuius tribuendo. Radix proxima primi membri est 1 a latere scribenda, cujus cubus 1 subtractus e primo membro 5 relinquit 4. Huic residuo adjungatur membrum secundum 305, ut fiat 4305. Quia pars jam inventa radices 1 præcedit notam sequentem, quam quærimus, uno loco, ejus respectu valet 10: elevetur itaque 10 ad quadratum 100, & per ejus triplum 300 dividatur 4305; continetur quidem 3 in 43 decies & quater, sed quoniam nunquam quotus major, quam 9 adhiberi potest, & in præsentem casu etiam 9 est iusto major, ut patebit, si reliquæ operationes ex præscripto fiant; postquam extractio secundæ partis frustra per 9 & 8 tentata fuerit, intelligetur, quotum non posse majorem adhiberi, quam 7. Adscribitur itaque 7 parti jam inventæ radices, simulque in 300 ducitur; productum est 2100. Dein $7 \times 7 = 49$; & $49 \times 10 = 490$; denique $490 \times 3 = 1470$, quod postremum ponitur infra 2100. Superest $7 \times 7 \times 7 = 343$ numero 1470 subscibendum. Addantur jam 2100, 1470 & 343, ac summa 3913 auferatur ex 4305, relinquentur 392, quæ adjuncto membro tertio fient 392472. Binæ partes radices

17 in.

17 inventæ jam unius instar considerentur, cujus valor respectu ejus, quæ adhuc quæritur, est 170, cujus quadrati 28900 triplum est 86700: dividatur per hoc 392472, & per quotum 4 (qui adjungitur ad 17, seu partem jam repertam radicis) multiplicetur divisor; factum 346800 scribatur infra lineam. Tum sumatur $4 \times 4 = 16$; & $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod ultimum collocetur infra 346800; denique cubus de 4, five 64, una cum prioribus duobus factis addatur, & summa 355024 subtrahatur ex 392472; supererunt 37448. Cum nullum superfit membrum dati numeri huic residuo adjungendum, erit radix cubica quæsitæ 174; verum ut numerus datus sit cubus perfectus, minui debet postremo hoc residuo 37448.

Si calculi accuratio poscat, ut etiam residui habeatur ratio, toties terni zeri, seu 000, instar novi membri, adjungendi sunt, quot notæ decimales desiderantur cum prioribus integris; continuata enim operatione, & notis inventis spectatis instar primæ partis radicis binomiæ, semper poterit alia nova, tanquam pars secunda radicis, reperiri. Exempli annexi forma rem per se illustrat. Operationum, quæ isthic instituendæ sunt, longitudo facit, ut plerisque Mathematicorum satis videatur, radices cubicas, vel ope logarithmorum, vel methodo sequente extrahere.

$$\begin{array}{r}
 5305.472 \\
 \hline
 1 \quad (174.41 \text{ \&c.}) \\
 4305 \\
 \hline
 300 \\
 \hline
 2100 \\
 1470 \\
 \hline
 343 \\
 \hline
 3913 \\
 \hline
 392472 \\
 \hline
 86700 \\
 \hline
 346800 \\
 8160 \\
 \hline
 64 \\
 \hline
 355024 \\
 \hline
 37448000 \\
 \hline
 9082800 \\
 \hline
 36331200 \\
 83520 \\
 \hline
 64 \\
 \hline
 36414784 \\
 \hline
 1033216000 \\
 \hline
 912460800 \\
 \hline
 912460800 \\
 52320 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 912513121 \\
 \hline
 120702879 \text{ \&c.}
 \end{array}$$

Methodus universalis extrahendi radicem per approximationem e potentiis quadrato altioribus.

191. In Mathesi practica, cum radices extrahendæ sunt e potentiis secunda altioribus, non sine compendio laboris logarithmi adhibentur (343); verum contingit non nunquam, ut major poscatur notarum decimalium numerus radici adjungendus, quem ope logarithmorum, qui passim prostant, invenire non possumus. At si utamur sequentibus formulis, quas ab Halleyo habemus, is facile reperietur.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \frac{2}{3}a + \sqrt{\left(\frac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6aa}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \frac{4}{5}a + \sqrt{\left(\frac{1}{25}aa \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \frac{5}{6}a + \sqrt{\left(\frac{1}{36}aa \pm \frac{b}{21a^5}\right)} \quad \&c.$$

Ut res exemplo plana fiat, petatur radix quinta numeri 161900, quæ annexas habeat 12 notas decimales. Dividatur logarithmus numeri 161900, qui est 5,2092468, per 5; habebitur 1,0418494, logarithmus numeri 11,012, qui est radix veræ propinqua. Ponatur $11,012 = a$. & elevetur ad quintam potentiam, ut sit $a^5 = 161931,378732020728832$, qui numerus excedit datum 161900 quantitate 31,378732020728832. Vocetur hic excessus b ; erit $a^5 - b = 161900$; igitur si adhibita for.

formula $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{1}{16}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)}$ sub-
stituantur numeri, nempe $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = 8.259 +$

$$\sqrt{\left(7.579009 - \frac{31,378732020728832}{13353,607537280}\right)}$$

$$= 8.259 + \sqrt{(7.579009 - 0,002349831828824315932711)} =$$

$$8.259 + \sqrt{(7.5766591681711756840684067289)}$$

$$= 8.259 + 2,752573190338 = 11,011573190338, \text{ habetur ra-}$$

dix quæsitæ.

Calculus ad inveniendas ipsas formulas expeditus est, quo tabula facile ultra septimam potentiam extendi potest, seu id fiat per inductionem, juxta legem, quam formulæ propositæ observant, seu methodo, quam sequens exemplum docebit, uti quis velit.

Esto $\sqrt[5]{(a^5 + b)} = a + d$, ubi d denotat fractionem; erit igitur $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd + 10aad^3 + 5ad^4 + d^5$. Et quia (159) fractionis valor eo magis semper minuitur, quo ad. altiore potentiam elevatur; quantitates, quæ per potentias secunda altiores fractionis d multiplicatæ sunt, velut exiguæ admodum spectari possunt, consequenter negligi. Et hinc poni potest $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd$; seu $b = 5a^4d + 10a^3dd$. Si omnia dividantur per $10a^3$, habetur $\frac{b}{10a^3} =$

$$\frac{1}{2}ad + dd; \text{ consequenter (225) est } \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}a + d; \text{ addito utrique parti } \frac{1}{4}a, \text{ fit } \frac{1}{4}a +$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}\right)} = a + d = \sqrt[5]{(a^5 + b)}.$$

Formula generalis elevandi binomium quodvis $a \pm b$ ad potentiam quamcunque datam, vel inde extrahendi radicem.

192. Formula est sequens:

$$\begin{aligned}
 (a \pm b)^m &= a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 \pm \\
 &\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 \\
 &+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} a^{m-5} b^5 + \&c.
 \end{aligned}$$

Nam si fiat series potentiarum successive crescentium binomii $a \pm b$, habebitur;

$$(a \pm b)^1 = 1 a^1 \pm b^1$$

$$(a \pm b)^2 = 1 a^2 \pm 2 a^1 b^1 + 1 b^2$$

$$(a \pm b)^3 = 1 a^3 \pm 3 a^2 b^1 + 3 a^1 b^2 \pm 1 b^3$$

$$(a \pm b)^4 = 1 a^4 \pm 4 a^3 b^1 + 6 a^2 b^2 \pm 4 a^1 b^3 + 1 b^4$$

$$(a \pm b)^5 = 1 a^5 \pm 5 a^4 b^1 + 10 a^3 b^2 \pm 10 a^2 b^3 + 5 a^1 b^4 \pm 1 b^5$$

$$(a \pm b)^6 = 1 a^6 \pm 6 a^5 b^1 + 15 a^4 b^2 \pm 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 \pm 6 a^1 b^5 \pm 1 b^6 \&c.$$

Ut formula generalis habeatur pro potentia quavis, invenienda est imprimis lex, quam observant exponentes terminorum sese ordine sequentium; tum etiam illa, quæ crescunt vel decrescunt coefficientes. Atque illa quidem, quæ ad exponentes pertinet, citra difficultatem deprehenditur: sunt enim exponentes numeri naturales ab unitate, qui in quantitate b crescunt usque ad illum, qui indicat ipsam potentiam; in a vero ab hoc usque ad 1 decrescunt, ut consequenter præcis coefficientibus lex exponentium sequente serie infinita exhibeatur - - -

$$a^m \pm a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 \pm a^{m-3} b^3 + a^{m-4} b^4 \pm \&c.$$

Lex

Lex coefficientium est, quod eorum primus (qui afficit terminum secundum potentiae binomiae) sit exponens primi termini seriei quantitatis a divisus per exponentem termini primi seriei b ; secundus factum exponentium duorum primorum seriei a divisum per factum exponentium primorum duorum seriei b ; tertius factum exponentium trium primorum seriei a divisum per factum trium primorum exponentium seriei b ; quartus factum exponentium quatuor primorum seriei a divisum per factum quatuor primorum exponentium seriei b , & sic deinceps. V.g. in potentia sexta binæ exponentium quantitatum a & b series sunt

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & \\ & & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & \\ \text{Unde si fiat } \frac{6}{1}, & \frac{6.5}{1.2}, & \frac{6.5.4}{1.2.3}, & \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}, & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \end{array}$$

reducanturque omnia ad expressionem simplicissimam, habebuntur ordine coefficientes sextæ potentiae binomii $a \pm b$, primo nempe spectante ad terminum secundum potentiae (primi enim termini coefficientes semper est 1). Hinc autem sequitur legem

coefficientium exhiberi hac serie infinita $1, \frac{m}{1}, \frac{m.m-1}{1.2}, \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}, \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}, \dots$ Utraque jam

serie inter se combinata formula generalis binomii obtinetur.

Eadem formula cuivis polynomio applicari potest, $p + q + r = s$, posito nempe $p + q + r = a$, & $s = b$. Imo eadem etiam adhiberi potest extrahendis radicibus quibuscunque, si exponenti generali m substituatur exponens fractus radicis extrahendæ

Denique hæc formula illic terminatur semper, ubi in coefficiente est m mulctatum exponente potentiae quæsitæ. Sic in potentia sexta formula desinit in termino septimo; cum in termini octavi coefficiente jam sit $m - 6$, uti etiam in omnibus sequen-

quantibus, qui propterea omnes evanescent, utpote ducti in $m-6=0$.

Calculus incommensurabilium.

Paucæ sunt æquationes, in quibus non deveniatur ad quantitates incommensurabiles, hoc est, ad radices potentiarum imperfectarum, in quibus tamen omnes operationes institui debent, quas solutionis æquationum regulæ præscribunt. Duplex autem est id genus calculus; alter *radicalium* dicitur, dum signum radicale relinquitur terminis præfixum, quorum radices denotantur; alter *calculus potentiarum per earum exponentes* appellatur, quando loco signi radicalis adhibentur exponentes negativi vel fracti.

Calculus Potentiarum per earum Exponentes.

193 Qui naturam exponentium potentiarum probe perspectam habuerit, nullam in earum calculo habebit difficultatem.

Nam si binæ potentiæ addendæ sint, jungitur altera alteri propriis servatis signis; si subtrahenda sit una ex altera, coefficientium (non vero exponentium) subtrahendæ signa mutantur in contraria; quando multiplicari debent, & sint termini similes, exponentes adduntur; secus vero multiplicator conjunctim scribitur cum multiplicando nullo signo interposito. In divisione, si termini sint similes, exponens divisoris subtrahitur ab exponente dividendi; at si termini dissimiles sint, scribuntur forma fractionis. Ut eleventur ad potentiam quamvis datam, vel ut radix data extrahatur, tantum opus est, ut exponens multiplicetur, vel per exponentes potentiæ, ad quam elevari debet; vel per exponentem fractum radice, quæ petitur.

Exempla. Summa ex a^n & $a^{\frac{1}{m}}$ est $a^n + a^{\frac{1}{m}}$; differentia $a^n - a^{\frac{1}{m}}$; factum $a^n + a^{\frac{1}{m}}$, quotient $a^n - a^{\frac{1}{m}}$; potentia p earundem a^n $a^{\frac{1}{m}}$ p
quantitatum est a^{pn} & $a^{\frac{p}{m}}$; radix q sive potentia $\frac{1}{q}$, tandem $a^{\frac{n}{q}}$, $a^{\frac{1}{qm}}$.

Sum-

Summa quantitatum a^n & b^{-m} est $a^n + b^{-m}$, differentia $a^n - b^{-m}$; factum $a^n b^{-m}$, five $\frac{a^n}{b^m}$, cum (168) $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$; quotiens ob eandem rationem $\frac{a^n}{b^m}$ vel $a^n b^m$ (binæ hæ expressiones probe notandæ sunt). Si elevandæ sint ad potentiam

m , fiet a^{mn} , b^{-mm} ; si extrahenda radix p , habebitur $a^{\frac{n}{p}}$,

& $b^{-\frac{m}{p}}$ five $\frac{1}{b^{\frac{m}{p}}}$.

De Calculo Radicalium.

194. Compendii gratia regularum loco solummodo formulas adferemus, ex quibus id etiam emerget commodi, ut rem longe clarius ponant ob oculos, quam præceptorum utcumque prolixa expositio. Has formulas, qui familiares sibi reddiderit, non modo methodum exercendi calculum facile animo retinebit, sed ei præterea vel ipsæ demonstrationes sponte sese offerent, attentionem nonnullam adhibenti, vel ubi exponentes signis radicalibus substituerit, citra negotium advertet, operationes, quæ in radicalibus instituuntur, cum iis consentire, quæ in potentiis per earum exponentes fiunt.

Imprimis autem illud observandum est, quod si occurrat quantitas incommensurabilis, ejusmodi, ut quæ sub signo radicali continentur, possint accurate dividi per aliquam potentiam ejusdem exponentis cum signo radicali, ea quantitas simpliciore forma exprimi possit, si nempe radix illius divisoris, instar coefficientis, præponatur signo radicali, solo quotiente sub hoc signo relicto.

Exempli causa hujus generis expressio est $\sqrt{aab}$, in qua per quadratum de a dividi possit quantitas contenta sub signo radicali ab : quare loco $\sqrt{aab}$ scribi potest $a\sqrt{b}$. Eodem modo

$\sqrt[3]{432}$ continet quantitatem, quæ sine residuo per cubum de 3, nempe 27, dividi potest, uti etiam per cubum de 6, five 216,

vel per cubum de 2, five 8; nam $\frac{43^2}{27} = 16$, $\frac{43^2}{8} = 54$,

& $\frac{43^2}{216} = 2$: itaque $\sqrt[3]{432}$ reduci potest ad quamlibet ex his

tribus ejusdem valoris expressionibus, $3\sqrt[3]{16}$, $2\sqrt[3]{54}$, $6\sqrt[3]{2}$. Sic etiam

in $\sqrt[4]{a^5 b^4}$ quantitas $a^5 b^4$ admittit divisionem exactam per quartam potentiam de ab ; igitur pro $\sqrt[4]{a^5 b^4}$ potest substitui $ab\sqrt[4]{a}$. Non absimili ratione reperitur

$$\sqrt{\frac{b^3 d}{aag}} = \frac{b\sqrt{bd}}{a\sqrt{g}}; \frac{a\sqrt{48bcd}}{2\sqrt[3]{16dg^4}} = \frac{4ac\sqrt{3b}}{4g\sqrt[3]{2dg}} = \frac{ac\sqrt{3b}}{g\sqrt[3]{2dg}} \text{ \&c.}$$

195. Quantitatem quamvis $\frac{p}{q}$ ducere in radice $\frac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}}$ quin radicalis valor mutetur.

$$\text{FORMULA} \dots \frac{ap\sqrt[n]{cq^n}}{bq\sqrt[n]{dp^n}}; \text{vel} \frac{aq\sqrt[n]{cp^n}}{bp\sqrt[n]{dq^n}} \dots$$

$$\text{Nam} \frac{q}{p} \sqrt[n]{\frac{p^n}{q^n}} = \sqrt[n]{\frac{q^n p^n}{p^n q^n}} = 1.$$

196. Tollere coefficientem $\frac{a}{b}$ quantitatis radicalis . . .

$$\frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c}{d}}.$$

$$\text{FORMULA} \dots \sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}.$$

197. Fractionem $\frac{c}{d}$ sub signo radicali $\sqrt[n]{\frac{a}{b} \frac{c}{d}}$ positam, exhibere forma quantitatis integræ.

FORMULA.... $\frac{a}{bd} \sqrt[n]{cd^{n-1}}$. Nam $\frac{a}{bd} \sqrt[n]{\frac{cd^n}{d}} = \dots$

$$\frac{a}{bd} \sqrt[n]{cd^{n-1}}.$$

198. Duo Radicalia $\sqrt[p]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[z]{\frac{c}{d}}$, ad eundem exponentem reducere.

FORMULA.... $\frac{p}{q} \sqrt[pv]{\frac{a^v}{b^v}}$ & $\frac{y}{z} \sqrt[pv]{\frac{c^n}{d^n}}$.

Si plura dentur, reductio in binis quibusvis successive instituitur.

199. Additio radicalium fit, si propriis retentis signis alterum alteri jungatur. At quando signi radicalis exponens communis est, & præterea quantitas sub signo radicali contenta utrobique eadem, uti si addi deberet $\sqrt[p]{\frac{a}{b}}$ ad $\sqrt[z]{\frac{a}{b}}$, suf-

ficit coefficientes addere; hinc summa foret $\frac{px + y}{qz} \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

200. In subtractione radicalium mutatur signum coefficientis quantitatis radicalis subtrahendæ. At si utriusque radicalis non modo sit idem exponens, sed etiam eadem quantitas sub signo contenta; coefficientium differentia accipienda est.

$$\text{Sic } \sqrt[p]{\frac{a}{b}} - \sqrt[z]{\frac{a}{b}} = \frac{px - y}{qz} \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

201. Radicale multiplicare per radicale, ut $\frac{p}{q} \sqrt[p]{\frac{a}{b}}$ per

$$\frac{y}{x} \sqrt[v]{\frac{c}{d}}$$

FORMULA.... $\frac{py}{qx} \sqrt[nv]{\frac{a^v c^n}{b^v d^n}}$

202. Radicale dividere per radicale, ut $\frac{p}{q} \sqrt[p]{\frac{a}{b}}$ per....

$$\frac{y}{x} \sqrt[v]{\frac{c}{d}}$$

FORMULA... $\frac{px}{qy} \sqrt[nv]{\frac{a^v d^n}{b^v c^n}}$

203. Radicale quodvis $\frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ elevare ad potentiam

quamlibet $\frac{nv}{ns}$

FORMULA... $\sqrt[nv]{\frac{a^{nv} c^n}{b^{nv} d^n}}$. Quod si enim loco signi radicalis

adhibeantur exponentes, formula hæc fit $\frac{a^{nv} c^n}{b^{nv} d^n}$; & radicale da-

tum $\frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ abit in $\frac{a^n c^n}{b^n d^n}$, cujus potentia $\frac{v}{s}$ est $\frac{a^{nv} c^{ns}}{b^{nv} d^{ns}}$ Si
 ponatur $\frac{v}{s} = n$, formula fit $\frac{a^n c}{b^n d}$; nam tunc exponens $\frac{ns}{n}$, qui

nihil aliud est, quam n divisum per $\frac{u}{s}$, erit idem, ac n divisum
 per n , quod eum ad unitatem reducit. Jam vero omnis quan-
 titas, cujus potentiae, vel radice, exponens est 1, est quanti-
 tas simplex.

204. Radicem quamlibet $\frac{v}{s} \sqrt[n]{\frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c}{d}}}$ ex-
 trahere.

$$\frac{nv}{s}$$

FORMULA ... $\sqrt[s]{\frac{a^n c}{b^n d}}$; cujus eadem, ac praecedentis, de-
 monstratio.

Postquam juxta formulas hasce operatio quæpiam perfecta
 est, semper reductiones superius praescriptae, si quæ locum ha-
 beant, adhibendæ sunt.

205. Formulæ allatæ eadem facilitate quantitativis nu-
 mericis, ac literalibus applicantur. Nam *primo* cum in earum
 constructione quantitates forma fractionum adhibita sint, omnis
 difficultas sublata est, quam fractiones creare possent. *Secundo*
 cum quivis numerus integer haberi possit pro fracto, cujus de-
 nominator sit 1 (80), æque numerorum integrorum substitutio
 expedita erit. *Tertio* si radicalia data careant coefficiente, sub-
 intelliigi semper potest coefficientis. 1. *Quarto* si dentur quanti-
 tates complexæ, arbitraria substitutione ad operationes adhiberi
 possunt incomplexæ, itaque formularum applicatio semper ca-
 rebit difficultate; ut subiecta exempla docebunt.

Sit

Sit quantitas $4\sqrt[4]{\frac{2-b}{3ad}}$ multiplicanda per $\frac{1}{3}\sqrt[4]{aa+bb}$;

reducatur utraque ad formam $\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2-b}{3ad}}$, & $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{aa+bb}{1}}$,

& adhibitis radicalibus N. 201, fiat $4=p$, $1=q$, $2=n$,
 $2-b=a$, $3ad=b$; tum etiam $1=y$, $3=x$, $4=v$,
 $aa+bb=c$, $1=d$; his substitutis formula articuli citati

$\frac{py^{nv}a^1a^n}{qx}\sqrt[4]{\frac{a^1a^n}{b^v d^n}}$ mutatur in $\frac{4 \times 1^{2 \times 4}}{1 \times 3}\sqrt[4]{\frac{2-b \times aa+bb^2}{3ad \times 1^2}}$ five fa-

cta reductione in $\frac{1}{3}\sqrt[8]{\frac{2-b \times aa+bb^2}{81a^4d^4}}$.

Sit $4\sqrt[4]{5}$ dividenda per $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$: reducantur prius ad has æ-

quivalentes $\frac{4}{3}\sqrt[2]{\frac{1}{7}}$ & $\frac{1}{7}\sqrt[2]{\frac{1}{7}}$. Dein sumantur radicalia num: 202,
 & ponatur $4=p$, $1=q$, $2=n$, $5=a$, $1=b$; item
 $1=y$, $1=z$, $2=v$, $3=c$, $7=d$. Facta substitutio-

ne formula $\frac{p^2}{qy}\sqrt[4]{\frac{a^v d^n}{b^v c^n}}$ abit in hanc $\frac{4 \times 1^{2 \times 2}}{1 \times 1}\sqrt[4]{\frac{5 \times 7^2}{1^2 \times 3^2}}$,

quæ iterum reduci potest ad $4\sqrt[4]{\frac{1225}{9}}$, & si extrahatur

radix quadrata e singulis terminis sub signo radicali contentis,
 ad $4\sqrt[3]{\frac{1225}{9}}$.

DE ÆQUATIONIBUS sive DE ANALYSI.

206. **A**nalysis est ars resolvendi per calculum Algebraicum problemata, quæ de magnitudinibus proponi possunt.

207. *Problema proponere* nil aliud est, quam petere, ut inveniatur valor unius pluriumve quantitatum incognitarum: existimatur autem hoc fieri non posse, nisi cum problema proponitur, saltem rationes quædam incognitarum ad quantitates cognitæ dentur, quæ propterea *data* appellantur in problemate.

208. Rationes, quas quantitates datæ ad incognitas habent, dicuntur *conditiones problematis*, quoniam ex iis cognoscitur; quibusnam positis conditionibus æqualitas inter nota, & ignota habeatur.

209. Expressio itaque Algebraica ejusmodi conditionis vocatur *æquatio*.

210. Unde sequitur, æquationem esse terminos algebraicos quantitatis datis, & incognitis constantibus, & ex utraque parte signi $=$ dispositos.

211. Solent autem quantitates datæ primis Alphabeti literis denotari: incognitæ postremis, velut x, y, z , ut ex primo aspectu nota ab ignotis facile distinguantur.

212. Termini, qui sunt ex sinistra parte signi $=$, dicuntur *primum membrum* æquationis; qui dextram partem occupant, *membrum secundum* constituunt.

213. Universim *æquatio* dicitur *primi gradus*, in qua quantitas incognita est primi gradus; si hæc elevata sit ad secundam potentiam, æquatio vocatur *secundi gradus*, ut $xx - ax = b$; $aa yy + bzz = c$, &c sunt æquationes secundi gradus. Si quantitatis incognitæ maxima potentia sit cubus, ut $ax^3 - bx = c$, æquatio est *tertii gradus*; idem de aliis gradibus dicendum.

214. *Problema solvere*, est invenire valorem singularum quantitatum incognitarum, quæ continebantur in problemate; seu etiam ostendere, fieri non

posse, ut earum valor inveniatur, id, quod contingit, dum rationes datæ problematis, sive conditiones, contradictionem involvunt. In sequentibus exempla occurrent.

215. *Invenitur autem valor quantitatis incognitæ, quando ea quantitas sola in alterutro æquationis membro continetur, in altero vero meræ quantitates cognitæ.*

216. Quare ut quantitates incognitæ, alicujus problematis reperiantur, variz in æquationibus adhibendæ sunt operationes, prout variz sunt ejusmodi quantitatum affectiones. Operationes porro, quibus utendum est, sunt Transpositio, Divisio, Multiplicatio, Extractio radicum, & substitutio; quarum quando quævis opportune adhibenda sit, ut noscas, en regulas!

I. Si sit unica quantitas incognita, *vel ea in alterutro membro cum aliis cognitis constituit summam vel differentiam aliquam*, ut $a + x - b = c$, & tum utendum est transpositione. Vel continetur in producto quopiam cum una pluribusve cognitis, ut $ax + bx = cd$, & adhibenda est divisio. Vel reperitur in fractione cum aliis cognitis, velut $\frac{ax}{b} = cd$, aut $\frac{a+b}{x} = c$, & usum habet multiplicatio. Vel denique incognita elevata est ad quandam potentiam, ut $ax - xx = c$, & opus est extractione radicum.

II. Si habeantur plures quantitates incognitæ, ut problema solvi possit, necesse est, ut etiam plures æquationes idem problema exprimant, in quibus eadem incognitæ reperiantur; uti si ejusdem problematis sint hæ duæ æquationes $x - ay = b$, & $bx + cy = d$. Et tunc quidem substitutio necessaria est.

Ita-

Itaque in quovis casu accurate dispiciendum erit, cuinam e sequentibus quinque operationibus re ipsa locus sit in æquatione proposita ad solvendum, ut valor incognitæ quantitatis reperiatur.

De Transpositione.

217. Transpositione terminus transfertur ex uno membro æquationis in alterum, servata utriusque membri æqualitate. Ut rite fiat, terminus ille in membro, in quo occurrit, deleatur, & in altero cum signo contrario scribatur.

Exemplum, ut transponatur quantitas ac in æquatione $ac + x = b$, ea omittenda in membro sinistro; sed in dextro ponenda cum signo contrario, nempe $-ac$, & fiet æquatio $x = b - ac$. Cum enim membrum $ac + x$ æquale sit alteri b , si ab utroque auferatur ac , residua erunt æqualia (17). Habebitur itaque $ac + x - ac = b - ac$, & reductione adhibita $x = b - ac$.

218. Coroll. I. Quilibet igitur terminus per transpositionem potest ex negativo fieri positivus, & vicissim.

219. II. Ope transpositionis valor cujuslibet termini exprimi potest, si scilicet cœteris transpositis is solus in altero æquationis membro relinquitur.

220. Observandum autem probe est, aliud nobis esse valorem alicujus termini exprimi; aliud, ejusdem valorem inveniri. Ut valor alicujus termini, seu quantitatis literalis, exprimatur, sufficit, si ea reperiatur sola in altero æquationis membro, ex quibuscunque membrum alterum quantitativis componatur, seu cognitis, seu incognitis; at ut valor inveniatur, præterea necesse est, ut membrum alterum non nisi quantitates cognitæ contineat (215).

De Divisione.

221. Per divisionem quantitates cognitæ ab incognitis, per quas multiplicatæ sunt, liberantur; seu universim factores alicujus producti a se invicem separantur. Hunc in finem igitur omnes utriusque membri æquationis termini per quantitates cognitæ, in quas ductæ sunt incognitæ, dividi debent, seu in genere, divisio omnium terminorum instituenda est per eos factores, a quibus alii separandi sunt. Æqualitatem inter utrumque æquationis membrum non amitti, manifestum est (17).

Ut v.g. a quantitate b incognita separaretur in æquatione $bx - ac = bd - cd$, omnia dividatur per b , nempe $\frac{bx}{b} - \frac{ac}{b} = \frac{bd}{b} - \frac{cd}{b}$; erit per reductionem $x - \frac{ac}{b} = d - \frac{cd}{b}$.

222. *Observa* I. Quando eadem litera in pluribus terminis quantitatis complexæ occurrit, ea cum summa aliarum literarum, seu coefficientium, qui reperiuntur in his terminis, tanquam factor, unicum productum constituit. Sic $ax - bx + 3x$ est factum ex $a - b + 3$ in x . Unde si x in æquatione $ax - bx + 3x = d$ liberari debeat a coefficientibus, faciendum

est $x = \frac{d}{a - b + 3}$. Similiter ut in æquatione $ax - x = b$

separata habeatur quantitas x , fiat $x = \frac{b}{a - 1}$

quippe cum $ax - x$ sit productum ex $a - 1$ & x .

223. II. Quando eadem litera in singulis æquationis terminis reperitur, per eam tota æquatio dividenda est, quæ hac ratione simplicior evadet. v.g. ex

ab

$abb - bxx = bd$ fit $ab - xx = d$. Eodem modo
 $aac - aa = abd$ divisione per aa reducitur ad
 $e - 1 = bd$.

De Multiplicatione.

224. Multiplicationis usus est, ut æquationes ab
 occurrentibus fractionibus liberentur. Omnes igitur
 æquationis termini multiplicantur per factum ex denominato-
 ribus fractionum, quæ tolli debent. Æqualitatem per hanc

operationem non turbari, patet (17). Sic $a + \frac{b}{x}$

$= dx$ mutatur in $ax + b = dxx$, si nempe omnia ducan-
 tur in x ; fit enim $ax + \frac{bx}{x} = dxx$, quæ reducitur ad
 $ax + b = dxx$.

Item æquatio $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} = abc - bcd$ liberatur
 a fractionibus, si omnes termini multiplicentur per
 bx , fit enim $\frac{abx}{x} + \frac{bxx}{b} = abbcx - bbcdx$, &
 adhibita reductione $ab + xx = abbcx - bbcdx$.

De extractione radicum, & æquationibus secundi gradus.

225. Quando quantitas incognita æquationis e-
 levata est ad quadratum

I. Advertendum est, an non sit vel multiplicata
 per aliam, vel cum alia fractionem constituat? Nam
 liberanda est ab alia quantitate, in primo quidem ca-
 su per divisionem; in altero per multiplicationem.

II. Attendendum, utrum quadratum incognitæ
 sit positivum, an negativum? si negativum sit, per
 transpositionem fieri debet positivum. Nullum enim qua-

quadratum esse potest negativum, cum $-xx$ sit factum ex $+x$ in $-x$, omne autem quadratum sit factum ex eadem quantitate in seipsam ducta; quare radix de $-xx$ nec esset $+x$, nec $-x$, si foret quadratum quantitatis realis.

III. Omnes termini, in quibus reperitur incognita, ad idem membrum æquationis ponendi sunt, reliquis, in quibus ea non habetur, ad alterum transpositis.

IV. Dispiciendum est, utrum hoc membrum contineat quadratum perfectum. Contingit autem hoc tantummodo, quando incognita reperitur in unico termino (uti si habeatur $xx = a - b$); quod si præter quadratum incognitæ adsit unus, pluresve termini, ex multiplicatione incognitæ per alias quantitates cognitæ orti, (v.g. $xx - 2ax = b$), quadratum est incompletum, & propterea compleri debet *addendo utrique membro æquationis quadratum dimidiæ quantitatis cognitæ, per quam incognita est multiplicata.*

V. Extrahenda est radix quadrata ex utroque æquationis membro, quo facto valor incognitæ facile reperitur.

Exemplo sit æquatio $\frac{aa - xx}{b} = 2a - b$. *Pri-*
mo tollatur fractio; fiet $aa - xx = 2ab - bb$. *Secun-*
do fiat $-xx$ positivum transpositione, nempe $aa = xx$
 $+ 2ab - bb$. *Tertio* ponatur xx solum ad unum mem-
brum, ut sit $aa - 2ab + bb = xx$. *Quarto* quia xx so-
lum habetur, quadratum est completum. *Quinto* ex-
trahatur radix ex utrovis membro; obtinetur $a - b$
 $= x$.

Detur altera æquatio $a + 2xx = b$. Liberetur
quadratum incognitæ a 2; erit $\frac{a}{2} + xx = \frac{b}{2}$. Trans-

positione collocetur quadratum incognitæ ad unum
membrum, $xx = \frac{b-a}{a}$. Extrahatur radix, eritque

$$x = \sqrt{\frac{b-a}{a}}$$

Proponatur solvenda æquatio $ax - \frac{xx}{2} + dd = c$.

Sublata fractione habetur $2ax - xx + 2dd = 2c$;
& facta transpositione, ut quadratum incognitæ fiat
positivum, omnesque termini, in quibus incognita con-
tinetur, sint in eodem membro æquationis soli, obti-
netur $2dd - 2c = -2ax + xx$. Apparet autem il-
lico, dextrum membrum non esse quadratum perfe-
ctum radicis binomiæ, cum non adsit, nisi quadratum
 xx secundæ partis radicis, cum facto ex x in $2a$, ut
adeo facile intelligatur, $2a$ esse duplum primæ partis,
ipsamque primam partem fore a , cujus quadratum,
 aa desit in hoc æquationis membro. Ut igitur com-
pleatur quadratum, addendum est aa (nempe quadra-
tum dimidii $2a$, quæ quantitas cognita multiplicat
incognitam in termino $2ax$); & ne æqualitas tollatur,
idem aa addi quoque debet membro alteri, ut æqua-
tio fiat $aa + 2dd - 2c = aa - 2ax + xx$, cujus radices
sunt $\sqrt{aa + 2dd - 2c} = a - x$.

Sit ulterius æquatio $9abxx - 3bbx = ad$; in hac
si liberetur quadratum incognitæ ope divisionis ab a -
liis, sit $xx - \frac{bx}{3a} = \frac{d}{9b}$, & addito utrique membro

quadrato de $\frac{b}{6a}$ (quod est dimidium factoris $\frac{b}{3a}$, per
quem

quem multiplicata est incognita x in secundo termino), nempe $\frac{bb}{36aa}$, completur quadratum membri iūni

$$xx - \frac{bx}{3a} + \frac{bb}{36aa} = \frac{d}{9b} + \frac{bb}{36aa} : \& \text{ extracta radice habetur } \frac{b}{6a} - x = \sqrt{\frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}}.$$

Sic quoque æquatio $xx - ax = a$ mutatur in $-a = xx - x$, quæ completa fit $\frac{1}{4} - a = xx - x + \frac{1}{4}$ (nam $-x$ habetur pro facto ex x in -1), extracta radice $\sqrt{\frac{1}{4} - a} = x - \frac{1}{2}$.

Si compleatur æquatio $xx + ax - x = aa$, abit in hanc $xx + ax - x + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$, cujus radix est

$$x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5aa - 2a + 1}}{2}.$$

226. *Observa.* Si quantitas incognita æquationis affecta sit signo $\sqrt{}$, ut si ponatur $a - \sqrt{x} = b$, ut ab eodem liberetur, necesse est, ut primo transponatur sola ad unum æquationis membrum, dein ut omisso hoc signo, alterum membrum elevetur ad quadratum. Unde in proposito exemplo prius fieri debet $a - b = \sqrt{x}$, tum vero $aa - 2ab + bb = x$. Eodem modo æquatio $ax - \sqrt{x} = b$, ab initio reducenda est ad hanc $aa xx - 2abx + bb = x$. At si haberetur $xx + \sqrt{x} = b$, æquatio evaderet quarti gradus; fieret enim $x = bb - 2bxx + x^4$.

De Substitutione.

227. Substitutio est ea operatio, qua una, plures-

resve quantitates incognitæ, quæ in pluribus ejusdem problematis æquationibus occurrunt, tolluntur.

Exempli causa dentur æquationes $ax + y = b$, & $x + by = a$, in quarum utraque duæ sunt incognitæ x & y , quarum alterutra, v. g. y , tolli potest, si ope transpositionis exprimatur valor quantitatis y in prima æquatione (219), & ea expressio pro y in secunda substituatur. Transponatur enim in prima æquatione ax , habebitur $y = b - ax$, hæc expressio $b - ax$ adhibeatur in æquatione altera loco y , & quoniam multiplicata est per b , ducatur pariter $b - ax$ in b ; eritque $bb - abx = by$; unde facta substitutione secunda æquatio abit in hanc $x + bb - abx = a$, in qua quantitas y non amplius reperitur.

Si libuisset ex secunda æquatione tollere quantitatem x , ejus expressio in prima æquatione quæri debuisset, transposita quantitate $+ y$, ut nempe fuisset $ax = b - y$, dein omnibus terminis per a divis; tunc enim expressio valoris quantitatis x fuisset obtenta, scilicet $x = \frac{b-y}{a}$. Quod si jam loco x substitu-

ta fuisset expressio $\frac{b-y}{a}$ in æquatione altera, ea abivisset in

in $\frac{b-y}{a} + by = a$, in qua deest quantitas x .

Dentur tres æquationes, $x + y + z = a$, $x + y - z = b$, $x - y + z = c$; poterunt binæ incognitæ ex singulis tolli hunc in modum. Accipiat in prima æquatione valor quantitatis x ; qui erit (217) $x = a - y - z$; substituatur $a - y - z$ in duabus aliis æquationibus pro x ; fient $ea - y - z + y - z = b$, & $a - y$

$x - y + z = c$, seu adhibita reductione, $a - 2z = b$, & $a - 2y = c$, in quibus singulis unica tantum occurrit incognita. Quod si jam ex prima æquatione tollendæ sint y & z , ut sola incognita x remaneat; quærat ex æquationibus nunc inventis expressio valoris y , & z ; fiet enim transpositione imprimis $a - b = 2z$, & $a - c = 2y$; dein divisione per 2 obtinebitur $\frac{a-b}{2} = z$, ac $\frac{a-c}{2} = y$; substituantur hæ expressiones in prima æquatione pro y & z , acquiratur nova æquatio $x + \frac{a-c}{2} + \frac{a-b}{2} = a$,

De Resolutione Analytica Problematum.

228. Quando problema solvendum proponitur, ante omnia status quæstionis debita cum attentione expendatur, ut singulæ conditiones a singulis, ut nota ab ignotis rite distingvantur. Dein expressione utendum est generali, & non ad certam magnitudinum speciem restricta, id, quod literis obtinetur, quarum is tantum numerus adhibendus, quem necessitas exigit. Unde quantitates æquales, vel æqualium partes non sunt repræsentandæ per literas diversas, sed per easdem omnino, adhibitis solummodo denominatoribus, vel coefficientibus, si necesse sit. Denique singulæ conditiones problemati annexæ per singulas æquationes sunt exprimendæ. Atque ut solutio completa habeatur, tot necessariæ sunt æquationes, quot sunt quantitates incognitæ, quarum singularum valor per regulas superiores inveniendus est. Nos rem exemplis nonnullis declarabimus.

229. Exemplum I. *Parens quispiam id ætatis habet filium, ut si utriusque ætas jungatur, annos efficiat 100; si*

lius autem 30 annis parente est junior. Quæritur ætas singularum.

Ad quæstionem istam si advertatur, duæ occurrunt quantitates datæ, nempe 100, & 30; duæ item incognitæ, ætas parentis, & ætas filii. Conditiones binæ sunt additæ, altera, quod summa annorum ætatis utriusque sit 100; altera, quod differentia sit 30. Utraque ergo conditio per suam æquationem separatim exprimenda est. Ponatur jam $100 = a$, $30 = b$, ætas Parentis $= x$, ætas filii $= y$, & reducatur problema ad hanc generalem quæstionem: *datis summa & differentia duarum quantitatum, invenire singulas quantitates; exprimaturo vero in hunc modum:*

Problematis enunciatio.

Quæritur utriusque ætas - - - - - Problematis ex-
quæ junctim faciat summam $100 = a$ x, y^2 (pressio al-
& habeat differentiam $30 = b$ $x + y = a$ (gebräi-
 $x - y = b$ (ca.

Duæ itaque habentur æquationes $x + y = a$, & $x - y = b$, in quarum singulis duæ sunt incognitæ, ac propterea per substitutionem valor alterutrius quærendus, v. g. quantitatis y : cum enim sit $x + y = a$, erit (217) $x = a - y$; & si $a - y$ loco x in secunda æquatione adhibeatur, ea evadit $a - y - y = b$, five (136) $a - 2y = b$ & per transpositionem (217) $a - b = 2y$, tandem per divisionem (221) reperitur $\frac{a - b}{2} = y$, ac quæstio facile solvitur.

Eadem operandi ratione sublata incognita y , quæri potest valor alterius x , qui erit $x = \frac{a + b}{2}$.

Quare problematis solutio adæquata habetur. Si enim

pro a & b substituantur 100 & 30, fiet $x = \frac{100 + 30}{2}$

$$= \frac{130}{2} = 65; y = \frac{100 - 30}{2} = \frac{70}{2} = 35. \text{ Est}$$

igitur ætas Parentis 65 anni; filii 35.

230. Quoniam quæstio particularis proposita reducta fuit ad problema generale, sequitur per æquationes $x = \frac{a+b}{2}$, & $y = \frac{a-b}{2}$ haberi solutionem

itidem generalem. Nam cum per literas numeri quicunq; designari possint, evidens est, quod quotiescunque duarum quantitatum x & y summa a , & differentia b datur, utraque inveniri possit, & quidem quod major, quam x repræsentat, semper æqualis sit semisummae quantitatum datarum a & b ; minor vero per y indicata, earundem semidifferentiæ.

231. Æquationes, per quas habentur solutiones generales problematum, dicuntur *formulae*, cum methodum universalem exhibeant, solvendi omnia problemata possibile, quæ easdem cum proposito conditiones habent. Proponatur exempli loco hæc quæstio: *Petrus & Joannes erogarunt 14 solidos in pauperes; Petrus 4 solidis plures dedit, quam Joannes: quæritur, quot dederint singuli?*

Manifestum est, hujus problematis condiciones nihil differre ab iis, quas præcedens annexas habuit, cum eodem modo quærantur duæ quantitates, quarum summa 14, & differentia 4 dantur. Unde solidi eleemosynæ nomine a Petro dati exhibentur per x , quos donavit Joannes, per y ; summa 14 per a , differentia

ferentia 4 per b ; quibus positis reperitur $x = \frac{a+b}{2}$

$$= \frac{14+4}{2} = 9, \text{ \& } y = \frac{a-b}{2} = \frac{14-4}{2} = 5. \text{ Dona-}$$

vit igitur Petrus 9, Joannes 5 solidos.

232. Formula verbis enunciata semper suppeditat regulam generalem. v. g. Si formulæ $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$,

seu $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, enuncientur, habetur regula generalis: data summa & differentia duarum quantitatum incognitarum, ut inveniatur major, semisumme addatur semidifferentia; ut reperiatur minor, semidifferentia a semisumma auferatur.

Illud quoque patet, formulam semper posse forma theorematum enunciari. Nam superiorum formularum enunciatio hunc in modum fieri potest: duarum quantitatum, inæqualium inter se, major æquatur earum semisumme plus semidifferentia; minor vero semisumme minus semidifferentia. Atque hunc in modum resolutis analytice particularibus problematis, affectiones generales magnitudinum deteguntur.

Quæ ad quæstionem propositam pertinebant, singula minutim explicuimus, ut ex hoc exemplo intelligatur, quæ in Problematum resolutione spectari debeant. In iis, quæ sequuntur, brevitati magis consulemus.

Exemplum II. Petrus & Joannes, cum simul haberent 36 libras, lusu perdiderunt 10 libras: & Petrus quidem perdidit partem tertiam suæ pecuniæ, Joannes vero quintam. Quæritur, quantum quisque & ante lulum habuerit, & per lulum amisit?

Quæstio proposita videri potest quatuor quantitates incognitas involvere, cum tamen reipsa tantum

duæ sint, quæ quærantur. Ubi enim constiterit, quantum pecuniæ Petrus habuerit ante lusum, tertia illius pars in lusu amissa jam non poterit ignorari; quare ista quantitatem novam incognitam non constituit. Idem censendum de parte quinta a Joanne perditâ. Unde illud hic loci observari meretur . . .

233. *Numerum quantitatum incognitarum non dependere a numero quæstorum in problemate; sed antequam hic statuatur, videndum esse, an non solutio unius quæsti suppediet etiam solutionem alterius?*

Quæstio verbis expressa.

Quærentur duæ quantitates - - -

quarum summa sit 36, sive a

Et pars tertia primæ cum parte quinta secundæ efficiat 10, seu b

Quæstio algebraice pro-
$x, y?$ (posita.
$x + y = a$
$x \quad y$
$- \quad + \quad = b$
$3 \quad 5$

Liberetur imprimis æquatio secunda a fractionibus (221), ut fiat $5x + 3y = 15b$, & si ex ima æquatione accipiatur valor de $x = a - y$ (217), & in æquatione $5x + 3y = 15b$ substituatur, habebitur $5a - 5y + 3y = 15b$; reducendo, & transponendo erit $2y = 5a - 15b$; dividendo denique (221) $y = \frac{5a - 15b}{2}$, ex qua

æquatione solutio problematis habetur. Adhibitis enim substitutionibus, quas hæc formula poscit, invenitur $y = 15$ lib. Unde Joannes ante lusum habuit 15 lib.; quarum 3 perdidit, partem nempe quintam ex 15. Petrus consequenter ante lusum habere debuit 21, cum $15 + 21 = 36$, & 7 perdidisse, quæ sunt tertia pars de 21. Quod si quis etiam formulam pro x

desideret, sublata y facile reperiet $x = \frac{15b - 3a}{2}$.

Exem-

Exemplum III. Parens quispiam hunc in modum filios suos hæredes scribit, ut natu maximo obtingant 1000 floreni cum sexta parte reliquæ totius massæ, alteri ætate proxime inferiori tribuantur 2000 floreni cum parte sexta residui, filius tertius 3000 florenos, & residuæ pecuniæ partem itidem sextam habeat, & sic singulis deinceps totidem obvenient florenorum milla cum sexta residui parte, quotus quisque ordine successerit: natu demum minimo id remaneat, quod fratrum portionibus ablatis supersuerit. Postquam hæreditas distributa est, constitit, omnes in partes æquas successisse. Quæritur, quot fuerint filii? quantum quisque acquisierit? quæ fuerit totius hæreditatis summa?

Et si primum videri possit alicui, tres hic esse quantitates incognitas, attamen si quæstio rite pendatur, unica deprehendetur, nempe summa hæreditatis. Ubi enim hæc cognita fuerit, tantum opus est, ut ab ea demantur 1000 floreni, qui cum sexta residui parte efficiant eam portionem, quæ singulis obtigit: quare si per hanc portionem dividatur summa totius hæreditatis, invenietur numerus partium æqualium, in quas distributa est, hoc est, numerus filiorum.

Sit igitur tota summa = x , 1000 floreni = a ; manifestum est, tributis natu maximo 1000 fl. residuum fuisse $x - a$; hujus porro pars sexta, nempe $\frac{x - a}{6}$ addenda fuit; quare portio, quæ filio natu maximo obtigit, est $a + \frac{x - a}{6}$, seu reductione ad eundem denominatorem $(80) \frac{5a + x}{6}$. Dematur jam hæc portio

pri-

primi ex tota summa; relinquetur $x - \frac{5a-x}{6}$: ex hoc pro secundo filio auferantur imprimis $2a$; supererit $x - \frac{5a-x}{6} - 2a$, five $\frac{5x-17a}{6}$, dein hujus pars sexta, scilicet $\frac{5x-17a}{36}$, addatur ad $2a$, habebitur portio secundi filii $2a + \frac{5x-17a}{36}$ seu $\frac{55a+5x}{36}$.

Quoniam autem peracta distributione singulis obtigerunt partes æquales, jam habetur æquatio $\frac{5a+x}{6} = \frac{55a+5x}{36}$: hinc sublatis fractionibus, per transpositionem & reductionem, invenitur $6x = 150a$, & utroque membro per 6 diviso, $x = 25a$.

Erat itaque tota hæreditas 25×1000 , seu 25000 flor: portio singulorum 5000 floren: numerus filiorum 5.

Exemplum IV. *Invenire numerum, cujus quadruplum ab ejus quadrato ablatum relinquit 21.*

Æquatio est $xx - 4x = 21$, seu generice $xx - bx = a$. Ex iis, quæ de extractione radicum diximus, facile apparet, æquationem hanc, si compleatur, fore $xx - bx + \frac{1}{4}bb = a + \frac{1}{4}bb$, consequenter $x - \frac{1}{2}b = \sqrt{a + \frac{1}{4}bb}$; & substitutis 4 & 21 pro b & a , $x - 2 = \sqrt{21 + 4} = \sqrt{25}$; adeoque $x - 2 = 5$, & $x = 7$.

234. *Observa I.* Problema postremo loco positum, est secundi gradus, cum quantitas incognita elevata sit ad quadratum. Horum autem problematum duplex semper est solutio; & universim, quodvis problema

ma determinatum tot habet solutiones, quot exponens potentiae maximae quantitatis incognitae unitates.

Et, quod ad problemata secundi gradus, ratio est, quod omne quadratum duas habeat radices; exempli gratia radices quadrati xx sunt x & $-x$. Quando in praesente problemate extracta fuit radix,

adhiberi etiam potuisset $-x + \frac{1}{2}b = \sqrt{a + \frac{1}{4}bb}$, unde fuisset $-x + 2 = 5$, & $x = -3$, quo pacto etiam problemati satis fit, cum quadruplum de -3 , nempe -12 , subtractum ex quadrato de -3 , seu 9 , relinquat $9 + 12 = 21$.

Simili ratione si quaerantur duo numeri, quorum summa sit $= 17$ sive a , factum autem $= 60$ seu b , reperietur $x = 5$, & $y = 12$, ex aequationibus nempe $x + y = a$, $xy = b$; at simul invenietur $x = 12$, & $y = 5$. Est vero evidens, conditiones problematis impleri, seu sumatur $x = 12$ & $y = 5$; seu $x = 5$, & $y = 12$; quare sequitur, omne problema, in quo arbitrarie haec vel illa e duabus quantitatibus incognitis pro maiore vel pro minore assumi potest, admittere duplicem solutionem, ideoque esse secundi gradus.

235. II. Problema, in quo quantitates incognitae una plures sunt, quam conditiones, dicitur *indeterminatum*; quod si numerus incognitarum numerum conditionum adhuc magis excedat, problema vocatur *plusquam indeterminatum*. In problematis indeterminatis ope regularum superius expositarum quantitates incognitae non plures tolli possunt, quam ut in singulis aequationibus ad duas reducantur; quo facto necesse est, ut alterutrius valor assumatur, alterius vero ex assumpto, & conditionibus problemati adiectis determinetur; ut adeo tot esse possint solutiones di-

versæ, quot diversi valores unius quantitatis incognitæ assumi possunt.

Exemplo sit problema: *invenire tres numeros x , y , & z , qui eandem habeant inter se differentiam, & simul sumti summam constituent 105.*

Conditiones hujus problematis non nisi per duas æquationes exhiberi possunt, scilicet $x + y + z = 105$, & $x - y = y - z$; quod si in secunda æquatione fiat $x = 2y - z$, & hic valor quantitatis x substituatur in prima, reperietur $y = 35$, & hinc $x + 35 + z = 105$, unde obtingit æquatio $x + z = 70$, ex qua nec quantitas x , nec z eliminari potest. Est itaque assumendus aliquis valor alterutrius, velut primæ x , ut z determinetur, ponendo v. g. $x = 10$; eritque $z = 60$, & numeri 10, 35 & 60 satisfaciunt problemati. At si ponatur $x = 12$, habetur $z = 58$, & numeri 12, 35, 58 aliam solutionem suppeditant.

Quin apparet etiam, problema præsens habere 69 solutiones in numeris integris & positivis, cum pro x omnes numeri ab 1 usque ad 69 successive substitui possint; at vero non plures, quod summa binarum incognitarum x & z reperta sit 70. Verum si assumatur pro x numerus quivis infra 70 cum fractione qualibet arbitraria, solutiones infinitæ erunt.

236. III. In problematis indeterminatis primi gradus, valor incognitæ unius est arbitrarius, modo ne ipse status quæstionis aliquos valores, qui alias assumi possent, excludat, v. g. Si quærendus esset numerus rerum, quæ divisionem non admittunt, adeoque per fractiones haberi nequeunt, uti hominum, equorum &c. Verum si in problematis secundi gradus determinari debeat valor incognitæ ad quadratum elevatæ, pro altera incognita talis assumen-

mendus est valor, ut quadratum alterius $\bar{n}$ fiat negativum: foret enim ejusmodi quadrati radix quantitas impossibilis.

Sic in æquatione $xx + y = b$ nequit quantitati y tribui valor major, quam b ; secus enim fieret quadratum xx negativum, & impossibile (225).

237. Radices potentiarum impossibilium vocantur *radices imaginariæ*. Ita $\sqrt{-xx}$ est radix imaginaria. Et hinc dum ostenditur, omnes radices aliqujus æquationis esse imaginarias, demonstratur, problema esse impossibile; totidem vero casus impossibiles in problemate involvi, quot radices imaginarias ejus æquatio continet.

His subjungimus problemata nonnulla, in quibus tiro exerceri possit.

I. Petrus Parisios veniens, primo die expendit partem tertiam suæ pecuniæ; die altero partem quartam; die denique tertio partem quintam, ut ei solum remanerent 26 libræ. Quæritur, quantum pecuniæ secum Parisios attulerit? $= 120$

II. Aurifaber emit vice quadam massam compositam ex 3 unciis auri, & 5 unciis argenti pretio 318 librarum, altera vice vero pro massa 5 unciarum auri, & 7 unciarum argenti dedit 522 libras. Quæritur valor uncie auri, & unius uncie argenti? $- \text{Or} = 6. \text{Auri} = 96.$

III. Petrus, Jacobus, & Joannes amiserunt in lusu omnem suam pecuniam. Petrus & Jacobus simul perdidērunt 10 libras, Petrus & Joannes simul 11 libras; denique Jacobus & Joannes simul 9 libras. Quæritur, quantum amiserint singuli? $\text{Petrus} = 6. \text{Jacobus} = 4. \text{Joannes} = 8.$

IV. Asina clitellis onerata dicebat mulæ sociæ: si unus e saccis, quos ego porto, tibi imponeretur, onus utriusque æquale foret; at si e tuis unus adderetur mihi, meum onus foret duplum tui. $\text{Unius} = 7. \text{Alterius} = 3.$

V. Cum Petrus & Joannes tantundem pecuniæ ad lusu-

sum attulissent, Petro amissis 12 libris quadruplo plus remansit, quam Joanni, perditis 57 libris. Quæritur, quantum quisque ad lusum attulerit? *Summa = 72. Petri 60. Jo. 15.*

VI. Interrogatus quispiam, quot florenos haberet? respondit: si ad dimidium addas partem tertiam, & quartam, summa excedet numerum florenorum, quos habeo, unitate. *= 12.*

VII. Mercator aliquis emit tres equos; pretium primum cum dimidio pretio reliquorum duorum sunt 25 aurei; pretium secundi cum parte tertia pretii aliorum duorum, sunt aurei 26: denique tertii pretium cum dimidio pretio equorum reliquorum, sunt 29 aurei. Quæritur singulorum equorum pretium?

VIII. Operarius quidam habet in suo peculio 6 libras, quibus addit mercedem 5 septimanarum: ex hac summa ei post duas septimanas remanet quarta pars; verum ubi huic quartæ parti adjungit mercedem duarum septimanarum, reperit se habere 21 libras. *Unius Mansio Merces = 6.*

De natura, & proprietatibus generalibus æquationum diversorum graduum.

238. Ut regulæ solutionis æquationum omnium graduum commodius constituentur, moris est, omnes terminos in primo æquationis membro collocare, posito in altero membro 0; & termini quidem in primo membro eo ordine disponuntur, quod exponentes potentiarum quantitatis incognitæ decrescunt: atque id intelligitur, dum ordinare æquationem dicitur. Unde hunc in modum scribenda est æquatio quarti gradus ...

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x - 258 = 0.$$

Æquatio completa, seu in qua sunt omnes termini, ea vocatur, in qua exponentes potentiarum quantitatis incognitæ ordine numerorum naturalium sine interruptione decrescunt, & præterea adest terminus ex meris quantitibus cognitis compositus, cujusmodi est æquatio paulo ante allata.

Hinc sequitur, in æquatione completa terminorum numerum debere unitate excedere exponentem potentiæ maximæ incognitæ; v. g. in æquatione quarti gradus esse quinque terminos.

239. Termini cujuslibet denominatio desumitur a loco, quem in æquatione completa, & ordinata occupat. Sic dicitur *primus terminus* is, in quo quantitas incognita elevata est ad maximam potentiam; *secundus terminus*, in quo incognitæ exponens unitate est minor; *terminus tertius*, ubi exponens rursus unitate decrescit &c; *terminus ultimus* denique, in quo quantitas incognita non amplius reperitur; adeo, ut si series exponentium incognitæ ordine naturali decrescentium interrumpatur, dicantur illi termini in æquatione incompleta deficiere, qui in æquatione completa adessent in illis locis, ubi series interrumpitur. Exempli causa æquatio $x^5 - x^3 + x x - b = 0$, est incompleta, in qua termini secundus, & quintus deficiunt.

240. Deinceps supponemus *imo*, terminum primum æquationis compositæ non esse multiplicatum per quantitatem quampiam cognitam, aut eum ab ejusmodi coefficiente ope divisionis esse liberatum. *2do* Æquationem compositam, esse factam e tot æquationibus primi gradus, quot exponens maximæ potentie quantitatis incognitæ habet unitates. Ut si ponatur $x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, & hæ tres æquationes in se invicem ducantur, habebitur $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$. Atque hinc pro theoria generali æquationum cujuscunque gradus possunt formulæ algebraicæ construi, in quibus quantitati x diversi valores tribuantur, prout signa diversimode inter se combinari possunt.

Exempli gratia pro tribus diversis valoribus quantitatis incognitæ combinationes signorum fieri possunt, ut vel omnes tres valores sint positivi, vel omnes tres negativi; vel unus positivus cum duobus negativis; vel denique duo positivi, & unus negativus. Ex his vero combinationibus orientur quatuor formulæ pro omnibus æquationibus tertii gradus, nempe...

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x - c = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 - xx(a+b+c) + x(ab+ac+bc) - abc = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x + a = 0 \\ x + b = 0 \\ x + c = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 - xx(-a-b-c) + x(ab+ac+bc) + abc = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x + c = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 - xx(a+b-c) + x(ab-ac-bc) + abc = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x + b = 0 \\ x + c = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 - xx(a-b-c) + x(-ab-ac+bc) - abc = 0. \end{array} \right.$$

Jd genus formulas etiam pro omnibus casibus æquationum quarti, quinti &c graduum constructas interim supponimus. Quod si eas attente consideremus, animadvertemus, hæc necessarias consecutiones & constructione æquationum, quæ e factis diversorum valorum realium (non imaginariorum) ejusdem quantitatis incognitæ oriuntur, deduci.

241. THEOREMA I. Gradus cujusvis æquationis exprimitur numero valorum quantitatis incognitæ. Et quoniam æquatio algebraica est formula continens proprietatem generalem magnitudinis alicujus (231, 232), sequitur, cujusvis æquationis esse tot radices, quot unitates sunt in numero gradum æquationis definiente.

242. THEOREMA II. Coefficientis secundi termini æqualis est summa radicum æquationis: coefficientis termini tertii æquatur summa factorum ex binis quibusvis radicibus, coefficientis termini quarti est summa factorum ex ternis radicibus &c; Terminus ultimus est factum ex omnibus radicibus. Dicimus autem hic coefficientem eam quantitatem cognitam, quæ signis parentheos continetur, atque per incognitam cujusvis termini multiplicatur.

243. THEOREMA III. Quando in æquatione ordinata, & completa, termini alterni afficiuntur signis contrariis, omnes radices sunt positivæ: dum eodem omnes notantur signo, radices sunt omnes negativæ. Univerſe tot sunt æquationis radices positivæ, quot signorum permutationes occurrunt, si quisque terminus cum sequente comparatur; & tot radices negativæ, quoties idem signum in binis terminis contiguis recurrit.

244. THEOREMA IV. Quando in æquatione summa radicum fit æqualis 0, aut si summa radicum positivarum æquatur summa radicum negativarum; secundus terminus debet deficere. Quæcunque enim quantitas ducatur in zerum, semper factum est = 0. Et universim si in æquatione deficiat aliquis terminus,
radi-

radices non possunt idem omnes signum habere. Etenim cum coefficientis oriatur ex summa plurium factorum, non aliter fieri potest, ut evanescat, nisi si per negativa elidantur positiva; ad hoc autem requiritur, ut quantitates, ex quibus ea facta nascuntur, habeant signa contraria.

245. THEOREMA V. In æquatione, cujus secundus terminus est negativus, summa radicum positivarum excedit summam negativarum; si secundus terminus sit positivus; summa radicum negativarum excedit summam positivarum.

246. THEOREMA VI. Si numerus radicum positivarum æquationis est par, terminus ultimus est positivus; si vero is numerus impar est, terminus ultimus est negativus, & vicissim.

247. THEOREMA VII. Æquatio, in qua terminus ultimus deest, est gradus proxime inferioris, quam indicet exponens potentiae maximae quantitatis incognitæ. Tum enim incognita in omnibus terminis reperta ope divisionis (223) tolli potest, quo fiet, ut quisque terminus ad gradum inferiorem deprimatur. Sic æquatio $x^3 - ax^2 + bx = 0$ non est reipsa, nisi secundi gradus, cum singuli ejus termini exacte possint per x dividi, & æquatio reduci ad hanc $xx - ax + b = 0$.

248 THEOREMA VIII. Si in æquatione pro incognita substituat aliquis ejus valor, tota æquatio reducitur ad 0. Exempli causa, si in prima formula (240) adhibeatur a^3, a^2, a loco x^3, x^2, x , ea fiet $a^3 - aa(a + b + c) + a(ab + ac + bc) - abc = 0$, & reductione facta habebitur $a^3 - a^3 - aab - aac + aab + aac + abc - abc$.

COROLL: Quantitas incognita æquivalet indifferenter singulis æquationis radicibus. Verum itaque alicujus radicis valorem inventum esse, ex eo cognosci potest, si eo valore pro quantitate incognita substituto tota æquatio reducitur ad 0.

De Aequationibus habentibus Radices imaginarias.

249. Manifestum est, radices quadratas quantitatis a esse $+\sqrt{a}$, & $-\sqrt{a}$, quarum factum $+\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -a$, uti productum ex $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, aut $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a}$ est $= a$. Ob eandem causam radices de $-a$ debent esse quantitates i-

maginariæ $+\sqrt{-a}$, & $-\sqrt{-a}$, ita ut factum ex $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ sit $= +a$, & factum ex $+\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a}$

$\sqrt{x+a}$, vel $-\sqrt{x+a}$ fit $= -a$. Ex quo universe intelligitur, factum e quantitibus imaginariis posse haberi sub forma quantitatis realis, ac propterea in æquatione composita posse dari radices imaginarias. In præsens sermo nobis tantum est de iis quantitibus imaginariis, quæ per radices quadratas quantitatum negativarum exprimuntur, ut quæ solæ sint, quarum usus est in æquationibus cujusvis gradus.

Jam autem in multiplicatione id genus radicalium signum radicale non tollitur; nisi binæ semper ejusmodi in se se ducantur, quæ easdem quantitates habent sub signo radicali. Sic

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a; \text{ at vero } \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a\sqrt{-a};$$

$$\text{ \& rursus } \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = a;$$

$$\text{ sed } \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a\sqrt{-a};$$

Eodem modo est $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$; $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a\sqrt{a}$ &c. Eodem modo est $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ &c. Itaque patet, factum e radicalibus imaginariis non posse exhiberi per quantitatem realem, nisi illæ numero pari inter se multiplicatæ sint.

Unde dum in polynomio occurrit terminus, qui sit quantitas radicalis imaginaria, ut $x - a - \sqrt{-b}$, signum radicale tolli potest, dummodo polynomium hujusmodi ducatur in alterum, quod ab eo non nisi signo $+$ vel $-$ quantitati radicali præfixo differat. Ex hoc vero liquet, non nisi multiplicatione polynomii $x - a - \sqrt{-b}$ per $x - a + \sqrt{-b}$ signum radicale auferri posse existente facto $xx - 2ax + aa + b$: etenim in nullo alio casu facta particularia quantitatis imaginariæ in terminos reales sese ob signorum contrarietatem mutuo elidunt. Illud etiam manifestum est, terminum b , qui est factum ex binis radicalibus $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$, esse in hoc eodem casu necessario positivum. His positis. . . .

250. THEOREMA IX. Radices imaginariæ, si quæ sunt in æquatione, semper sunt numero pari.

251. THEOREMA X. Si accipiantur quævis binæ radices imaginariæ alicujus æquationis, sub signo radicali eandem quantitatem habent, nec differunt, nisi signo $+$ vel $-$.

252. THEOREMA XI. Quævis æquatio gradus imparis, saltem unam radicem realem habet.

253. THEOREMA XII. Quævis æquatio gradus paris ordinata, si ultimum terminum habet negativum, saltem unam radicem realem habet. Nam factum reale radicalium imaginario-
rum, quæ sunt partes duorum polynomiorum in se se invicem ductorum, non potest esse, nisi quantitas positiva (249).

De reductione & transformatione Aequationum.

254. Ut operationes in æquationibus commodius instituantur, ad formulas, quantum fieri potest, simplicissimas reducuntur; uti formula prima generalis æquationum tertii gradus (240) reducitur ad sequentem, $x^3 - pxx + qx - r = 0$, posito scilicet $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$.

Porro facile intelligitur, posse quamvis æquationem datam transformari in aliam ejusdem gradus, in qua quantitas incognita æquationis datæ mutata sit alia quavis quantitate cognita, hoc est, in qua vel aucta, vel imminuta sit quavis data quantitate f ; vel vero in qua incognita æquationis datæ sit multiplicata, vel divisa quantitate data f ; vel denique ad cujus incognitam quantitas incognita æquationis datæ habeat rationem datam f ad g , seu dein f sit quantitas cognita aut determinata, seu sit incognita aut indeterminata. Hujusmodi enim ut transformatio fiat, satis est, si pro singulis id genus mutationibus po-

natur $y + f = x$, vel $y - f = x$, vel $yf = x$, vel $\frac{y}{f} = x$ vel

$\frac{fy}{g} = x$, atque valor assumtus substituatur. V. g. si fiat $y + f = x$

loco x^3 adhibeatur cubus quantitatis $y + f$; loco pxx factum ex p in quadratum de $y + f$; & pro gx accipiat g in $y + f$ ductum. Ubi nova æquatio ordinata fuerit, reperietur $y^3 + yy(3f - p) + y(3ff - 2pf + q) + f^3 - pff + qf - r = 0$.

255 Patet hinc, quod si fuisset positum $f = \frac{1}{3}p$, adus terminus in nova æquatione evanesceret; esset enim $3f - p = 0$. Hæc observatio si applicetur formulis generalibus quasunque æquationes repræsentantibus, sequentem supeditat regulam: *posse ex quavis æquatione tolli secundum terminum, si in aliam transfor-*

metur, in qua quantitas incognita augeatur, vel minuatür coefficiente secundi termini æquationis datæ per exponentem maximæ potentie ejusdem incognitæ diviso, prout scilicet secundus terminus æquationis datæ vel negativus, vel positivus fuerit.

Possit quidem ex eadem observatione inveniri nova æquatio, in qua tertius, quartus, vel quintus &c. terminus deficeret; verum ut reperiretur quantitas incognitæ y jungenda, solvi prius deberet alia æquatio secundi, tertii, quarti &c gradus. Etenim ex tertio novæ æquationis termino y ($3ff - 2pf + q$) valor quantitatis facquiri nequit, nisi æquatio secundi gradus $3ff - 2pf + q = 0$ solvatur

Quomodo Æquationes compositæ in numeris solvendæ.

Maxima difficultas, quæ in resolutione problematum, quorum æquationes ad altiores gradus elevatæ sunt, occurrit, est, ut extrahantur radices sive algebraice, sive in numeris; hoc est, ut inveniantur singuli valores quantitatis incognitæ seu per formulam aliquam particularem algebraicam, seu in numeris. Et licet hac in re maxime occupetur algebra, nobis tamen fusioribus esse non licet, tum quod theoria ex tot inventis præsentem materiam spectantibus sit admodum intricata, tum etiam quod plures excogitatæ sint methodi, quam præfixa nobis brevitate complecti possimus. Unde de his alii libri Algebraici consuli poterunt, uti *Analysis demonstrata* P. Reynau, *Arithmetica universalis* Newtoni cum suo commentario &c.

Nobis in præsens satis fuerit duas asserre methodos, quibus radices æquationum cujusvis gradus in numeris reperiri possint: prior locum non habet, nisi dum radices reales sunt numeri integri; altera adhibenda est, quando his numeris junctæ sunt fractiones.

256. I. METHODUS. Primo: quærantur omnes divisores ultimi termini æquationis (156). Si radices reales sint numeri integri, necesse est, ut inter hos divisores sint, cum ultimus terminus (242) nihil sit aliud, quam factum ex omnibus radicibus. Et quoniam substituto radicis valore pro quantitate incognita tota æquatio reducitur ad 0 (248), divisores inventi substituantur successive pro incognita, donec tota æquatio reducatur ad 0: erit numerus, cujus substitutione æquatio evasit æqualis 0, una e radicibus quæsitis.

Pro-

Proponatur exempli causa æquatio $x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 = 0$. Divisores ultimi termini 36 sunt 1, — 1, 2, — 2, 3, — 3, 4, — 4, 6, — 6, 9, — 9, 12, — 12, 18, — 18, 36, — 36. His numeris aliis post alios substitutis loco x , invenitur radix 2, cum æquatio fiat $16 - 64 + 60 - 48 + 36 = 0$.

Secundo: Dividatur æquatio data, per æquationem simplicem, quæ fit ex radice jam inventa (in præsentem exemplo per $x - 2 = 0$), erit divisio exacta, & quotus, æquatio uno gradu inferior. Et in nostro quidem casu habebitur $x^3 - 6x^2 + 3x - 18 = 0$. Quærantur rursus divisores ultimi termini hujus novæ æquationis, qui sunt 1, — 1, 3, — 3, 6, — 6, 9, — 9, 18, — 18. Substituantur successive pro quantitate incognita in nova æquatione, donec reducatur ad 0 (non autem necesse est adhibere eos divisores, quorum substitutione prior æquatio non potuit ad 0 reduci); reperietur altera radix; apud nos scilicet 6, æquatione abeunte in $216 - 216 + 18 - 18 = 0$.

Tertio. Æquatio, quæ divisione per primam radicem inventa fuit, dividatur iterum per æquationem simplicem ex secunda radice ortam; erit divisio exacta, & quotus nova æquatio rursus uno gradu inferior. Hic operandi modus continuetur, donec vel in quoto deveniatur ad æquationem simplicem, vel saltem secundi gradus, cujus solutio per se sit facilis. Sic æquatione $x^3 - 6xx + 3x - 18 = 0$ per $x - 6 = 0$ divisa, reperitur $xx + 3 = 0$, quæ est secundi gradus, cujus radices imaginariæ extractu faciles sunt, $-\sqrt{-3}$, & $+\sqrt{-3}$. Ex his autem liquet, methodum adhibitam nil aliud esse, quam operationes iis contrarias, quibus ostendimus (240) æquationem formari. Eadem applicari potest æquationibus mere Algebraicis, quarum eadem sit forma, ac formularum generalium superius (240) repperarum.

257. II. METHODUS. Detur æquatio $x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0$. Primo: Substituantur quantitati incognitæ successive numeri 1, 2, 3, 4, &c, donec in quantitate, ad quam æquatio reducitur, mutetur signum: erit radix numerus positivus, minor, quam cujus substitutione signum mutatum est, sed major immediate præcedente.

In exemplo proposito fiet

$$\begin{array}{rclcl}
 1 \dots & 1 + & 2 - & 36 + & 5 - 116 = - 144 \\
 2 \dots & 16 + & 16 - & 144 + 10 - & 116 = - 218 \\
 3 \dots & 81 + & 54 - & 324 + 15 - & 116 = - 290 \\
 4 \dots & 256 + & 128 - & 576 + 20 - & 116 = - 288 \\
 5 \dots & 625 + & 250 - & 900 + 25 - & 116 = - 116 \\
 6 \dots & 1296 + & 432 - & 1296 + 30 - & 116 = + 346
 \end{array}$$

Continetur itaque una e radicibus positivis inter 5 & 6.

Secundo, Fractio addenda numero 5, ut obtineatur radix veræ proxima, vocetur d ; habebitur $x = 5 + d$: (potuisset etiam poni $6 = a$, & $x = 6 - d$). Substituatur jam $5 + d$ pro x in æquatione data; mutabitur in:

$$\begin{array}{rcl}
 + & x^4 = & + 625 + 500d + 150d^2 + 20d^3 + d^4 \\
 + & 2x^3 = & + 250 + 150d + 30d^2 + 2d^3 \\
 - & 36x^2 = & - 900 - 360d - 36d^2 \\
 + & 5x = & + 25 + 5d \\
 - & 116 = & - 116 \\
 \hline
 - & 116 + & 295d + 144d^2 + 22d^3 + d^4
 \end{array}$$

Habetur itaque nova æquatio, in qua valor quantitatis d designat fractionem quæsitam. Jam vero cum (159) potentie fractionum eo minores constituent quantitates, quo & ipsæ fractiones minores sunt, & earum potentie altiores; poterunt imprimis $22d^3 + d^4$ negligi, seu poni $= 0$, & valor quantitatis d quæri ex æquatione secundi gradus $-116 + 295d + 144dd$; & reperietur in decimalibus $d = 0,33758$; ideoque $x = 5,33758$ fere.

Sed quoniam fractio d in se non adeo parva est, ut citra errorem sensibilem poni possit $22d^3 + d^4 = 0$, calculo iterato opus est, atque valor 5,337 loco incognitæ x in æquatione data substituendus; fiet ea (si notæ decimales non ultra sex adhibeantur) $+ 811,313703 + 304,033616 - 1025,408484 + 26,685 - 116 = 0,623835$. Quemadmodum autem ex eo, quod in prima substitutione numeri 6 pro incognita x æquatio redu-

cta

ita fuerit ad quantitatem positivam $+346$, patuit, valorem 6 esse justo majorem; ita hic quoque, cum ex substitutione $5,337$ pro x redigatur æquatio ad $+0,623835$, colligitur radicem $x=5,337$ esse majorem vera. Unde rursus ponatur $x=5,337-d$, atque ut superius, in æquatione data substituatur, neglectis terminis, in quibus d ultra secundam potentiam elevaratur, obtinebitur

$$\begin{array}{rcl}
 + & x^4 & = + 811,313703 - 608,067231 d \\
 & & + 170,901414 dd \\
 + & 2x^3 & = + 304,033616 - 170,901414 d \\
 & & + 32,022000 dd \\
 - & 36x^2 & = - 1025,408484 + 384,264000 d \\
 & & - 36,000000 dd \\
 + & 5x & = + 26,685000 - 5,000000 d \\
 - & 116 & = - 116 \\
 \hline
 & + & 0,623835 - 399,704645 d \\
 & & + 166,923414 dd
 \end{array}$$

En novam æquationem secundi gradus, ex qua eruitur $d=0,001562$; subducatur hic valor ex $5,337$, habebitur radix veræ multo propior $x=5,335438$. Eadem methodo reperiri possunt radices negativæ, substitutis scilicet pro x numeris $-1, -2, -3, -4, -5$ &c. Imo etiam quæri sic possunt radices, quæ sunt meræ fractiones, si pro x surrogentur decimales $0,1,0,2;0,3,&c.$, aut etiam $-0,1;-0,2;-0,3&c.$

258. Dum in æquatione radices dantur, quæ haud plus unitate inter se differunt, numeri, qui ex substitutione $1,2,3$ &c oriuntur, plerumque signum non mutant; at iidem, ubi decreverunt, & mutationi signorum jam videntur vicini, rursus crescere incipiunt. Uti si in æquatione $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$, substituatur $1,2,3,4,5,6$ &c, obtingent numeri $+32, +13, +2, +5, +28, +77$ &c. Hisce in casibus numerus minimus, atque mutationi signi vicinissimus, eum indicat, qui valori vero alicujus radice est proximus. In allato exemplo, $+2$, qui ex substitutione 3 obvenit, indicio est, numerum integrum valori radice cujuspiam vicinissimum, esse 3. Quare, ut antea, is valor accuratius indagatur, adhibita in æquatione quantitate $3+d$

$3 + d$, ut in alteram transformetur, in qua d fractionem numero 3 adjungendam suppeditat.

Postquam expolita adhuc methodo una e radicibus inventa est, æquatio per eandem dividitur, ut ad inferiorem gradum deprimitur; & tum denuo substituuntur alii numeri, quam qui jam sunt adhibiti. Sic exempli causa æquatio proposita reducitur ad $x^3 + 7,33544x^2 + 3,13777x + 21,74137 = 0$.

DE COMPARATIONE MAGNITUDINUM,

SEU

TRACTATUS

DE RATIONIBUS & PROPORTIONIBUS.

259. *Ratio*, seu *relatio*, universim dicitur duarum quantitatum comparatio, seu modus ille, quo altera sese habet ad alteram.

Comparantur vero duæ quantitates inter se, ut sciatur, utrum æquales sint, vel quantum alteram altera excedat, aut quoties una in alia continetur. Exempli causa potest 4 comparari cum 12, ut detegatur, num $4 = 12$, vel quantum 4 excedatur a 12, vel quoties 4 in 12 reperiatur.

Primus terminus eorum, qui comparantur, dicitur *antecedens*; alter *consequens*.

260. Plerumque comparari non solent, nisi quantitates inæquales, vel quarum æqualitas adhuc latet. Atque hinc reapse nonnisi duplex rationum species datur: dum scilicet collatio quantitatum fit eum in finem, ut innotescat, quantum altera ab altera superetur, hæc comparatio dicitur *relatio*, vel *ratio Arithme-*

rithmetica; dum vero quæritur, quoties una in altera contineatur, comparatio appellatur *relatio*, vel *ratio Geometrica*.

Illud autem facile intelligitur, quod omnis ratio consistat in quantitate exprimente modum, quo antecedens se habet ad consequens suum. Unde sequitur . . .

261. I. Rationem Arithmeticam consistere in differentia antecedentis a consequente, vel consequentis ab antecedente; rationem vero Geometricam constituendam esse in quotiente, qui fit antecedente per consequens diviso, seu consequente per antecedens.

262. II. *Duorum terminorum eandem esse rationem, ac aliorum duorum, seu rationes esse æquales, quando vel differentia, vel quotientes sunt æquales.* Sic cum excessus numeri 7 supra 3 sit idem, ac excessus numeri 9 supra 5, scilicet 4, manifestum est, rationem Arithmeticam 7 ad 3 esse eandem cum ratione 9 ad 5; seu esse 7 ad 3 in eadem ratione Arithmetica, ac 9 ad 5. Similiter cum 3 toties contineatur in 12, quoties 2 in 8, atque adeo quotiens rationis numeri 3 ad 12 sit idem cum quotiente rationis duos ad 8, sequitur esse 3 ad 12 in eadem ratione Geometrica, ac 2 ad 8, si-
ve has rationes esse æquales.

263. Si quotientes æquales duarum rationum Geometricarum inter se comparatarum obtineantur eodem operandi ordine, hoc est, si oriantur ex divisione antecedentis per suum consequens in utraque ratione, aut ex divisione consequentis per suum antecedens in utraque ratione, quemadmodum in superiore exemplo; eæ rationes *Geometricæ* dicuntur *directæ*. Sic 3 est ad 12 in ratione directa 2 ad 8, quia diviso numero 3 per 12 obtinetur idem quotus, qui fit diviso numero 2 per 8, nempe $\frac{1}{4}$. At si quoti æ-

qua-

quales fiant per operationes ordine inverso institutas, exempli causa diviso in prima ratione antecedente per consequens, & in secunda diviso consequente per antecedens, termini harum duarum rationum dicuntur esse *in eadem ratione inversa*, seu *in ratione reciproca*. E. g. numeri 12 & 3 sunt in eadem ratione reciproca Geometrica cum numeris 2 & 8: Et quidem esse eos in ratione eadem, inde manifestum est, quod idem sit utriusque rationis quotiens 4; quod vero hæc ratio sit inversa, patet, cum quotus obtineatur, si in prima ratione dividatur antecedens per consequens; in secunda consequens per antecedens. Hinc infertur . . .

Quatuor terminos, qui sunt in ratione inversa eadem, posse etiam ita ordinari, ut sint in ratione eadem directa, scilicet nempe duo alterutrius rationis termini inter se permutentur.

264. III. Sequitur ex dictis, *inæqualitatem diversarum rationum, quæ inter se comparantur, consistere in inæqualitate differentiarum vel quotientium*. Ut autem lege certa hæc inæqualitas determinetur, prius statuendus est ordo tenendus in operationibus, quæ ad reperiendas differentias, vel quotientes adhiberi debent, ut is in singulis rationibus idem omnino sit.

265. Quando quatuor termini duarum rationum sunt in ratione directa, *proportionem* constituunt, quæ vel Arithmetica, vel Geometrica erit, prout rationes æquales terminorum vel sunt Arithmeticæ, vel Geometricæ. Atque hinc quatuor termini 7, 3, 9, 5 faciunt proportionem Arithmeticam; id ipsum vero ut indicetur, sequente ratione scribendi utimur 7.3:9.5. Eodem modo quatuor numeri 3, 12, 2, 8 efficiunt proportionem Geometricam, quæ exprimitur his signis 3.12::2.8; vel 3:12::2:8; vel 3:12 = 2:8; vel denique 3 | 12 || 2 | 8.

266. Terminus primus, & ultimus alicujus proportionis dicuntur *extrema*; secundus & tertius *media*.

267. Contingit sæpius, ut consequens primæ rationis simul sit antecedens secundæ, v. g. potest dari hæc proportio Arithmetica $a. b. : b. c.$, vel hæc Geometrica $a:b::b:c$. Hujus generis proportionem dicuntur *continua*. Proportio Arithmetica continua sic designari solet $\div a. b. c$; Geometrica vero hoc modo $\div\div a. b. c$. Terminus 2dus solet tum dici *medius proportionalis*.

268. Dum plures duabus rationibus æqualibus continenter scribuntur, efformatur *series quantitatum proportionalium*. Hunc in modum 7.3:9.5:11.7 exprimit seriem quantitatum Arithmetice proportionalium, & 3.12::2.8::5.20::7.28 seriem quantitatum Geometricæ proportionalium. At vero si rationes, ex quibus series confurgit, ejusmodi sint, ut consequens cujusvis præcedentis simul sit antecedens in sequente; series dicitur *progressio*. Sic 3.6:6.9:9.12:12.15 est progressio Arithmetica, quæ ut compendio exprimat, scribi solet $\div 3. 6. 9. 12. 15$. Eodem modo 32:16::16:8::8:4::4:2::2:1 exhibet progressionem Geometricam, quæ compendiosius sic efformatur $\div\div 32. 16. 8. 4. 2. 1$.

269. Univerſim igitur *progressio Arithmetica est series terminorum, quorum singulorum ab immediate sequentibus est eadem differentia; & progressio Geometrica est series terminorum, quorum singulorum per immediate sequentes divisorum est idem quotus*.

Proprietates Rationum, Proportionum, & Progressionum Arithmeticarum.

270. Theorema I. Quævis ratio Arithmetica ad unam e sequentibus formulis revocari potest $a. a \pm d$; vel $b. b \pm d$; vel $c. c \pm d$ &c, seu (nam idem est) consequens cujusvis

rationis Arithmeticae semper æquatur antecedenti plus vel minus eorum differentia.

Demonstratio. Quævis quantitas per a exprimi potest, atque antecedens esse in ratione quapiam Arithmetica; jam vero si a sit antecedens, vel majus est, vel minus suo consequente; si majus est, excedit suum consequens quantitate, vel differentia, quam possumus vocare d ; igitur in hoc casu consequens erit $a - d$; si a minus est suo consequente, ab hoc exceditur quantitate, quæ potest d dici; & in hoc casu erit consequens $a + d$. Quare in omni ratione Arithmetica consequens æquatur antecedenti plus vel minus eorum differentia: (designatur autem plus vel minus per $\pm$); igitur quælibet ratio Arithmetica exhiberi potest hac formula $a.a \pm d$.

Eodem modo demonstratur, quod si quantitas quævis alia dicatur b , & d ejus differentia ab altera qualibet, ratio Arithmetica inter eas quantitates sit $b.b \pm d$. Item si antecedens appellatur c , & differentia a consequente f , formula rationis sit $c.c \pm f \&c$.

271. Theorema II. *Omnis proportio Arithmetica potest repræsentari per $a.a \pm d : b.b \pm d$.*

Demonstratio. In duabus rationibus Arithmeticis, quæ æquales ponuntur, differentia literâ eadem exprimi debet, velut d ; si itaque a & b generatim exhibeant terminos antecedentes binarum rationum Arithmeticarum æqualium, necesse est, ut consequentes repræsententur per $a \pm d$, & $b \pm d$ (270). Quare $a.a \pm d : b.b \pm d$ universe quatuor terminos duarum rationum Arithmeticarum æqualium, ideoque quamlibet proportionem Arithmeticam designat.

272. Theorema III. *In omni proportionem Arithmetica summa extremorum æqualis est summæ mediorum.* Patet id manifeste in proportionem $a.a \pm d : b.b \pm d$, cum summa extremorum sit $a + b \pm d$; mediorum vero $a \pm d$

$+ b$, idemque sit $a + b \pm d$, ac $a \pm d + b$. Hinc autem constat, quod etiam si singuli proportionis termini designentur per alias literas, ut $a.b:c.d$, nihilominus tamen semper sit $a + d = b + c$.

273. Coroll: I. In proportionem continua summa extremorum æqualis est duplo termini medii; idem enim est, seu scribatur $\div a.b.c$, seu $a.b:b.c$; igitur $a + c = 2b$.

274. Coroll: II. Quod si unus terminus proportionis Arithmetice sit incognitus, facile reperitur. Etenim si ejus loco sumatur x , ac terminis debito ordine dispositis fiat æquatio summæ extremorum cum summa mediorum, valor quantitatis x sine negotio invenitur.

Exempli causa si cognitis tribus primis terminis proportionis Arithmetice quæraturs quartus, fiat $a.b:c.x$; erit (272) $a + x = b + c$, & adhibita transpositione $x = b + c - a$, ex qua formula habemus: quartum terminum proportionis Arithmetice æquari differentie termini primi à summa mediorum.

Si inveniendus sit medius Arithmetice proportionis inter a & b , ponatur $\div a.x.b$; hinc vero $a + b$

$= 2x$, & divisione per 2, $x = \frac{a + b}{2}$; hoc est: se-

misumma extremorum æqualis est termino medio Arithmetice proportionali.

275. Theorema IV. Quælibet progressio Arithmetica potest reduci ad hanc $\div a.a \pm d.a \pm 2d.a \pm 3d.a \pm 4d.a \pm 5d.a \pm 6d.a \pm 7d$ &c in infinitum.

Demonstratio. Quoniam (269) progressio Arithmetica est series terminorum, qui ordine accepti inter se se eandem habent differentiam, sequitur, quod si differentia primi a , & secundi $a \pm d$ sit d , differentia inter secundum & tertium sit itidem $\pm d$: quare tertius terminus necessario erit $a \pm d \pm d$, hoc est $a \pm 2d$.

Eodem modo cum differentia inter terminum tertium & quartum sit rursus $\pm d$, manifestum est, terminum quartum fore $a \pm 2d \pm d$, seu $a \pm 3d$, & sic de reliquis.

276. *Observa.* Hæc formula generalis tam progressionem Arithmeticam crescentem, quam decreascentem, exhibere potest. Nam pro crescente erit $\div a. a + d. a + 2d. a + 3d. a + 4d$ &c; pro decreascente habebitur $\div a. a - d. a - 2d. a - 3d. a - 4d$ &c.

277. *Coroll. I.* In omni progressionē Arithmetica summa terminorum ab extremis æquidistantium semper constans est, id est, æquatur summæ extremorum, vel etiam summæ aliorum duorum ab extremis æquidistantium; vel denique duplo termini medii, si numerus terminorum progressionis sit impar.

Sic in progressionē formulæ 7 terminis constante, summa termini tertii & quinti, scilicet $a \pm 2d + a \pm 4d$, seu $2a \pm 6d$, æqualis est summæ extremorum, qui sunt a , & $a \pm 6d$, sive $2a \pm 6d$; & summa secundi, & sexti termini est itidem $2a \pm 6d$; aut denique duplo termini medii $a \pm 3d$.

278. *H.* In progressionē Arithmetica, quivis terminus æqualis est summæ ex termino primo, & facto differentię in numerum terminorum, qui eum terminum præcedunt. Nam sextus v. g. terminus $a \pm 5d$, qui in progressionē crescente est $a + 5d$, æquatur summæ termini primi a , & facti ex differentia d in 5, qui est numerus terminorum sextum præcedentium. Pariter in progressionē decreascente sextus terminus $a - 5d$, quæ itidem est summa ex a , & $-5d$, sive facto differentię $-d$ in 5, numerum terminorum, qui sextum præcedunt.

279. *III.* In progressionē Arithmetica differentia inter terminum primum & ultimum est æqualis differentię communi
in

in numerum terminorum totius progressionis unitate multiplicatum ducta. Sic in allata (275) progressionem manifestum est, differentiam inter a & $a \pm 7d$ esse $\pm 7d$.

280. IV. Summa omnium terminorum progressionis Arithmeticae aequalis est dimidio facto ex summa extremorum in terminorum numerum ducta, seu aequalis est facto ex summa extremorum in numerum terminorum dimidium ducta; seu facto ex semisumma extremorum ducta in terminorum numerum, seu facto e termino medio (si numerus terminorum sit impar) in numerum terminorum. Omnia eodem redeunt, eodemque modo demonstrantur. Itaque si $2a \pm 6d$ (nimirum summa extremorum progressionis superius relatae) multiplicetur per 7, numerum terminorum, fiet $14a \pm 42d$, cujus dimidium est $7a \pm 21d = a + a \pm d + a \pm 2d + a \pm 3d + a \pm 4d + a \pm 5d + a \pm 6d$; Si enim in hac aequatione alterum membrum reducatur, sit $7a \pm 21d$.

281. Theorema V. In progressionem Arithmetica potest esse terminus, qui sit aequalis 0.

Demonstratio. Nam inter 0 & numerum quemvis differentia semper habetur aequalis illi numero.

282. Coroll. Hinc progressio decrescens ultra quosvis limites continuari potest, si habeatur v.g. — 16. 12. 8. 4. 0, poterit ulterius continuari in hunc modum — 16. 12. 8. 4. 0. — 4. — 8 — 12 — 16 &c. Pariter in progressionem — 11. 6. 1. terminorum numerus augetur, si fiat — 11. 6. 1. — 4. — 9. — 14. — 19 &c.

283. OBSERVA. Zerus reapse talis rationem Geometricam ingredi non potest, utpote cum nec continere terminum alterum, nec in eo vere contineri possit.

284. Scholium. Ex allatis progressionum Arithmeticarum proprietatibus facile eruuntur formulae pro solutione sequentis Problematis generalis: si dentur tria ex his quinque: terminus primus = a ; terminus ultimus = e ; differentia communis terminorum = d ; numerus terminorum = n ; summa omnium terminorum = s , invenire alterum ex reliquis duobus. Suppo-

namus enim progressionem crescere (potest autem quævis decrescens progressio instar crescentis tractari, si pro primo termino sumatur ω ; & pro ultimo a); & primo quod Coroll. III. dictum est, exhibeatur algebraice; erit $\omega - a = dn - d$; in hac æquatione si successive substituantur valores quantitatum ω , a , d , & n , habebuntur quatuor particulares formulæ. Secundo repræsentetur etiam algebraice Corollarium IV, dabitur æquatio $an + \omega n = 2s$, ex qua rursus quatuor aliæ formulæ nascentur. Tertio. In postrema æquatione substituaturs valor de $\omega = a + dn - d$ ex prioræ æquatione erutus, mutabitur ea in $2an + dnn - dn = 2s$, quæ quatuor alias formulas suppeditabit.

Quarto. Si in eadem æquatione $an + \omega n = 2s$ substitutur valor de $a = \omega - dn + d$, acceptus ex prima, obtinetur $2\omega n - dnn + dn = 2s$, ex qua quatuor novæ formulæ profluunt.

Quinto. Denique si in æquatione $an + \omega n = 2s$ substitutur valor de $n = r + \frac{\omega - a}{d}$ ex prima, fiet $2s = a + \omega + \frac{\omega\omega - aa}{d}$, & hinc adhuc quatuor orientur peculiares formulæ.

Jam vero ope 20 harum formularum omnes casus possibiles problematis superius enunciati solventur.

285. Problema. Inter duos terminos datos invenire numerum in mediorum Arithmetice proportionalium, ut progressio oriatur.

Resolutio. Differentia inter duos terminos datos dividatur per $m + 1$, quotiens erit differentia communis terminorum in progressionem quæsitæ. v. g. Si inter 7 & 13 inveniendi sint termini 4 medii, differentia terminorum communis progressionis est $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$; unde erit progressio $7.8\frac{1}{5}.9\frac{2}{5}.10\frac{3}{5}.11\frac{4}{5}.13$.

Quod si enim inter 7 & 13 ponantur 4 medii, oritur progressio sex terminorum, & hinc quinque differentiæ æquales; sed manifestum est, has quinque differentias simul sumptas reperiri in differentia termini primi 7, & ultimi 13; quare ut una ex illis quin-

quinque (quæ nempe sit communis inter singulos terminos) inveniatur, necesse est, ut differentia termini primi & ultimi per 5 dividatur.

De Rationibus, Proportionibus, & Progressionibus Geometricis.

286. In omni magnitudinum genere sæpissime rationes Geometricæ in considerationem veniunt. Atque hinc, quando voces *Ratio*, *Proportio*, *Analogia*, *Progressio* sine alio addito proferuntur, eæ semper de Geometricis sumuntur.

In sequentibus vero supponemus; quod quotiens in ratione directa semper oriatur ex divisione consequentis per antecedens.

287. Hinc vero, & ex ipsa rationis Geometricæ notatione, sequitur, quamvis fractionem esse rationem Geometricam, in qua numerator sit consequens, & denominator antecedens.

288. *Ratio numeri ad numerum* est, in qua quotiens est quantitas, quæ numeris exprimi possit, sive non incommensurabilis; *ratio irrationalis*, seu *ratio surda* dicitur, cujus quotiens nullis numeris, seu fractis, seu integris, potest exprimi accurate. Sic ratio 7 ad 11, item $4\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ &c est ratio numeri ad numerum, cum in utraque quotientes sint accurate $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ &c. At vero rationes 4 ad $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ad 8 &c sunt surdæ, quia nullus numerus integer vel fractus inveniri potest, qui valorem

accuratum de $\frac{\sqrt{3}}{4}$; vel de $\frac{8}{\sqrt{5}}$ exhibeat (187).

At enim hinc inferri nequit, duarum quantitatum incommensurabilium rationem semper esse surdam, cum altera possit accurate esse dupla, tripla &c alterius, quacum comparatur.

289. Quando consequens in suo antecedente accurate continetur bis, ter &c, eorum ratio dicitur *dupla*, *tripla* &c; dum autem antecedens continetur accurate bis, ter &c in suo consequente, ratio vocatur *subdupla*, *subtripla* &c. E. g. ratio numerorum 48 ad 6 est ratio *octupla*; ea vero, quæ habet 4 ad 12, est *subtripla*.

290. Si plurium rationum datarum termini cor-

respondentes inter se multiplicentur, hoc est antecedens per antecedens, & consequens per consequens, facta constituunt *rationem compositam* ex singulis rationibus datis. Exempli causa dentur tres rationes $a:d, b:e, c:f$; ratio ex his composita erit $abc:def$, & quævis ex tribus rationibus datis, dicitur ratio *componens*, seu etiam *radix compositæ*.

291. Ratio, quæ componitur ex rationibus æqualibus, est *duplicata, triplicata, quadruplicata* &c, si componentes, seu radices, sint duæ, tres, quatuor &c. Itaque si componantur rationes æquales $2:4, 6:12, 3:6$, oritur ratio triplicata $36:288$.

292. Theorema Fundamentale. *Quævis ratio Geometrica potest reduci ad hanc formulam $a:aq$, seu etiam ad hanc $b:bq$ &c; seu (idem est) consequens in omni ratione Geometrica est æquale facto ex antecedente in quotientem rationis.*

Demonstratio. Cum quotiens rationis obtineatur divisione consequentis per antecedens, evidens est (54), consequens (utpote dividendum) æquari facto ex quotiente ducto in antecedens (seu divisorem). Universum igitur quævis ratio Geometrica, in qua antecedens sit a , quotus q , habebit consequens aq , idoque recte exhibebitur per $a:aq$; & quævis ratio Geometrica, in qua antecedens b , quotus q , ob eandem rationem rite exprimitur per $b:bq$, &c.

293. *Observa I.* Si supponeretur, quotientem rationis semper oriri ex divisione antecedentis per consequens; ut rationes Geometricæ revocari possent ad easdem formulas $a:aq, b:bq$ &c, necesse foret, quotientem sumere $\frac{1}{q}$, qua expressione nunc modo fracti, sed etiam integri numeri designari possunt.

294. II. Quando antecedens majus est consequen-

quente, quotiens q est fractio unitate minor; ex opposito dum antecedens minus est suo consequente, q est numerus unitate major. In exemplo: in ratione 4 ad 12 est $q = 3$, & quia antecedens $= 4$, erit consequens $4 \times 3 = aq$. Sed in ratione 12 ad 4, est $q = \frac{1}{3}$, hinc cum antecedens $a = 12$, erit consequens $12 \times \frac{1}{3} = 4 = aq$.

295. Theorema II. Quævis proportio Geometrica potest ad hanc formulam revocari $a:aq::b:bq$.

Demorstratio. Si quatuor termini duarum rationum æqualium ordine ponantur, efformant proportionem (265); jam vero duæ rationes æquales debent eundem quotientem habere, qui proinde eadem litera, velut q , exprimendus est: si itaque a & b sint termini antecedentes duarum quarumvis rationum æqualium, aq , & bq earundem ut sint consequentes, necesse est: & hinc formula generalis $a:aq::b:bq$ ad quamlibet proportionem Geometricam pertinebit.

296. Theorema III. Valor rationis (seu ipsa ratio) non mutatur, si uterque ejus terminus per eandem quantitatem multiplicetur, vel dividatur. Aliter. Producta, vel quotientes duarum quantitatum inæqualium per eandem quantitatem tertiam, sunt in eadem ratione, ac quantitates illæ inæquales.

Demonstratio. Ratio duarum quantitatum consistit in quotiente; quodsi ergo ratio quævis $a:aq$ multiplicetur per quamlibet quantitatem m , ratio factorum $am:amq$ rursus consistet in quotiente eodem q , ut ante multiplicationem: quare am & amq sunt in eadem ratione, ac a & aq . Eodem modo ostendetur esse

$$\frac{a}{m} \text{ \& \& } \frac{aq}{m} \text{ in eadem ratione } a \text{ ad } aq. \text{ Ergo est } a:aq::\frac{a}{m}:\frac{aq}{m}, \text{ \&c.}$$

Scholium. Cum ratio Geometrica & fractio idem sint, facile intelligitur, fractionis valorem non mutari, seu uterque ejus terminus multiplicetur, seu dividatur per eandem quantitatem (78).

297. Coroll. Hinc sequitur, duas quantitates esse in eadem ratione, ac earum dupla, tripla, quadrupla &c; item ac earum subdupla, subtripla, subquadrupla &c; (sive quod idem est) fractiones esse inter se, si habeant eundem deno-

minatorem, ut earum numeratores. Sic $a:b::\frac{a}{2}:\frac{b}{2}::$

$$\frac{a}{3}:\frac{b}{3}::\frac{a}{p}:\frac{b}{p}; \text{ \&c.}$$

298. Theorema IV. Ratio duplicata æqualis est rationi quadratorum duorum quorumvis terminorum unam e rationibus componentibus, seu radicem aliquam, constituentium. Et ratio triplicata æquatur rationi cuborum binorum terminorum, qui constituunt rationem aliquam e componentibus; idem est de aliis potentiis.

Demonstratio I. Sint duæ rationes æquales $a:aq, b:bq$; erit ratio duplicata earum $ab:abqq$. Est autem manifestum, esse $ab:abqq::aa:aaqq::bb:bbqq$, utpote cum idem sit omnium harum rationum exponens qq .

II. Dentur tres rationes æquales $a:aq, b:bq, c:cq$; erit ratio triplicata $abc:abcq^3$; porro liquet, ut prius, esse $abc:abcq^3::a^3:a^3q^3::b^3:b^3q^3::c^3:c^3q^3$.

Observa. Quia rationes quadratorum, cuborum &c, sunt rationes duplicatæ, triplicatæ &c, rationes radicum quadratarum, cubicarum &c, dictæ sunt rationes subduplicatæ, subtriplicatæ &c.

299. Theorema V. Si duo termini sint in ratione reciproca duorum aliorum, cum iisdem rationem directam con-

si-

stituere possunt, modo, servato eodem terminorum ordine, termini alterutrius rationis forma fractionum exhibeantur, quarum numerator sit 1, vel quævis quantitas eadem.

Demonstratio. Ratio $bq:b$ est reciproca rationis $a:aq$; ut igitur habeatur directa, ponendum erit $b:bq::a:aq$, vel $bq:b::aq:a$. Sed dico, si v. g. rationis $bq:b$ termini fractionum forma scribantur, qua-

rum numerator idem sit 1, fore etiam $\frac{1}{bq}:\frac{1}{b}::a:aq$.

Etenim quotiens ex $\frac{1}{b}$ per $\frac{1}{bq}$ diviso, est q , quemadmodum si aq per a dividatur.

Eodem modo ostendetur esse $bq:b::\frac{1}{a}:\frac{1}{aq}$; vel

$$\frac{m}{bq}:\frac{m}{b}::a:aq, \text{ \&c.}$$

Proprietates Proportionum Geometricarum.

300. Theorema VI. In omni proportionem Geometricam factum extremorum æquale est facto mediorum.

Patet ex ipso proportionis $a:aq::b:bq$ intuitu.

301. Coroll: Quod si itaque proportionis termini singuli diversis literis exprimantur v. g. a, b, c & d ; sive si ponatur $a:b::c:d$; erit nihilominus $ad=bc$.

302. Theorema VII. Ex factoribus duorum productorum æqualium semper potest fieri proportio, si factores unius sumantur pro extremis; factores alterius pro terminis mediis proportionis.

Demonstratio. Cum enim (300) semper habeatur æquatio ex productis mediorum & extremorum proportionis; in quavis æquatione duorum productorum

potest alterum considerari tanquam factum mediorum, alterum tanquam factum extremorum: quare factores unius producti spectari possunt tanquam termini medii proportionis; factores vero alterius, tanquam extremi, ut adeo ex omnibus proportio formari possit.

303. *Coroll. I.* Quælibet ergo æquatio mutari potest in proportionem; e. g. ex $ad = bc$ sit $a:b::c:d$. Æquatio $ad - bd = cg + c$ suppeditat analogiam sequentem $a - b:g + 1::c:d$; item $1 - xx = a$, reducitur ad, $1 - x:a::1:1 + x$; & $xx - yy = 1$, dat proportionem continuam $\frac{1}{1-x} : \frac{1}{1-y} :: x+y$. $1.x - y$, &c.

304. *Coroll. II.* Quatuor cujusvis proportionis termini $a:b::c:d$ possunt septem aliis modis ordinari, ut semper maneat proportio directa. Cum enim hæc proportio suppeditet bina facta $ad = bc$, possunt poni a & d pro extremis, b & c pro mediis, vel b & c pro extremis; a & d pro mediis, sequentibus octo modis.

$$\begin{array}{llll} a:b::c:d. & b:a::d:c. & c:a::d:b. & d:b::c:a. \\ a:c::b:d. & b:d::a:c. & c:d::a:b. & d:c::b:a. \end{array}$$

Quin possunt etiam quocunque aliæ proportiones efformari, si iidem termini ope additionis, vel subtractionis connectantur, modo in utraque ratione eadem operationes, eodemque ordine adhibeantur, ita, ut factum extremorum, & mediorum reducatur ad idem factum, quod in æquatione prima habebatur $ad = bc$. Sic fieri possunt:

$$\begin{array}{ll} a + b:b::c + d:d. & a - b:b::c - d:d. \\ a:a + b::c:c + d. & a:a - b::c:c - d. \\ a + b:a - b::c + d:c - d. & a - b:a + b::c - d:c + d. \text{ \&c.} \end{array}$$

305. *Observa.* Ex 24 permutationibus quatuor terminorum proportionis $a:b::c:d$, dantur octo, in quibus termini sunt
in

in ratione directa, ut superius diximus; octo, in quibus est ratio inversa; & octo, in quibus termini nec directe, nec reciproce sunt proportionales. Combinationes, in quibus ratio est reciproca, sunt:

$$\begin{array}{cccc} a b d c & b a c d & c a b d & d b a c \\ a c d b & b d c a & c d b a & d c a b \end{array}$$

Nam si e. g. fiat $a:b::\frac{x}{a}:\frac{x}{b}$, facta extremorum & mediorum erunt $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, & sublati fractionibus $ad = bc$. Reliquæ octo permutationes sunt:

$$\begin{array}{cccc} a d b c & b c a d & c b a d & d a b c \\ a d c b & b c d a & c b d a & d a c b \end{array}$$

Patet autem, debere unum terminum ex singulis rationibus transponi, ut proportionem directam constituent.

306. Theorema VIII. In omni proportionem Geometrica si antecedens unius rationis est majus, æquale, vel minus suo consequente, etiam in altera ratione erit antecedens majus, æquale, vel minus consequente; & si antecedens primæ rationis est majus, æquale, vel minus antecedente secundæ rationis; etiam consequens primæ rationis erit majus, æquale, vel minus consequente secundæ.

Demonstratio. Pars prima Theorematis ex ipsa notione proportionis evidens est; pars altera non minus erit evidens, si cogitetur, quod (304) antecedens secundæ rationis possit fieri consequens in prima ratione, & vicissim, quin propterea proportio turbetur.

307. Theorema IX. Si termini duarum, pluriumve proportionum homologi inter se multiplicentur, vel dividantur, etiam facta, vel quotientes erunt proportionales.

Demonstratio. Primo. Si duarum proportionum $a:q::b:p$ & $c:p::d:r$, termini homologi inter se mul-

tiplicentur, antecedentes per antecedentes, consequentes per consequentes, manifestum est, facta $ac:apq::bd:bdpq$ constituere proportionem, cum idem utriusque rationis sit quotiens pq .

Secundo. Si termini proportionis $a:aq::b:bq$ dividantur per homologos alterius $c:cp::d:dp$, eodem

modo liquet, fore $\frac{a}{c}:\frac{aq}{cp}::\frac{b}{d}:\frac{bq}{dp}$, cum rursus in utraque ratione sit quotiens $\frac{q}{p}$.

308. Coroll: *Potentiae eadem quantitatum proportionalium sunt proportionales; & radices eadem quantitatum proportionalium sunt proportionales.* Exemplum. Detur proportio $a:b::c:d$. Quadrata, cubi &c, horum terminorum nil aliud sunt, quam facta terminorum homologorum ejusdem proportionis bis, ter &c positæ. Quod si jam supponamus, per a, b, c, d designari quatuor potentias ejusdem gradus inter se proportionales, uti quatuor cubos, posito nempe $a=r^3, b=s^3, c=t^3, d=u^3$, erit $r^3:s^3::t^3:u^3$, hoc est, habebuntur facta proportionalia terminorum correspondentium proportionis $r:s::t:u$ ter positæ, atqui r, s, t, u , sunt radices cubicæ terminorum r^3, s^3, t^3, u^3 , seu per hypothesein a, b, c, d : igitur etiam radices cubicæ quantitatum proportionalium a, b, c, d sunt proportionales. Idem est de quibusvis aliis radicibus, quas, alias constat, non esse nisi potentias exponentis fracti (173).

309. Theorema X. *Si terminorum correspondentium duarum, pluriumve proportionum summæ vel differentiæ accipiantur, eæ proportionales non sunt, nisi si primo in proportionibus datis sit idem quotiens; vel secundo antecedentes termini proportionis unius sint proportionales cum antecedentibus proportionis alterius; vel (quod idem est) consequentes*
uni-

unius sint in eadem ratione cum consequentibus alterius proportionis.

Demonstratio. Ut sumtis summis terminorum correspondētiū in proportionibus $a:aq::b:bq$, & $c:cp::d:dp$, inferri possit, esse $a+c:aq+cp::b+d:bq+dp$, necesse est, ut ostendatur haberi hanc æquationem $abq+adp+bcq+cdp=abq+bcq+adq+cdp$, sive, ablati utrinque æqualibus, $adp+bcq=adq+bcq$. Atqui evidens est, inter hæc haberi veram æquationem imo, si $p=q$, cum hoc posito reduci possit ad $adp+bcq=adp+bcq$. Secundo si $ad=bc$: substitutione enim tunc fiet $adp+adq=adp+adq$. Habetur autem $ad=bc$, quando est $a:b::c:d$ (301), sive quando est $aq:bq::cp:dp$, quia in posteriore hac hypothesi est $adpq=bcq$, quæ æquatio reducitur (223) ad $ad=bc$. Eadem demonstrandi ratio applicabitur, si in duabus proportionibus sumantur differentię terminorum homologorum. Igitur si accipiantur si mmæ vel differentię &c.

310. Theorema XI. Si detur series terminorum proportionalium, erit summa antecedentium ad summam consequentium, ut est quodvis antecedens ad suum consequens.

Demonstratio. Dentur $a:aq::b:bq::c:cq::d:dq$, erit exempli causa $a+b+c+d:aq+bq+cq+dq::b:bq$. Etenim consequens primæ rationis $aq+bq+cq+dq$

idem est ac $a+b+c+d \times q$; est autem evidens,

esse $a+b+c+d:a+b+c+d \times q::b:bq$. &c.

Proprietates Progressionum Geometricarum.

311. Theorema XII. Quævis progressio Geometrica potest ad hanc formulam revocari $\therefore a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, \&c.$

De-

Demonstratio. Progressio Geometrica est series terminorum, qui alternatim agunt antecedens & consequens ejusdem rationis, sive qui semper eundem habent quotientem (269); atqui talem seriem recte exhiberi per $a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4$. &c evidens est, cum quilibet terminus per proximam anteriorem ex parte sinistra, sive per antecedens suum, divisus det quotientem eundem q .

312. *Scholium.* Quoniam exponentes terminorum in progressionem sese consequentium evidenter constituunt seriem numerorum naturalium crescentium, & ab o incipientium, liquet porro, formulam generalem progressionis Geometricæ posse etiam sic exhiberi $\div aq^0 \cdot aq^1 \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4$. &c. Et certe si dividatur aq

per aq^0 , habebitur $\frac{aq^1}{aq^0} = q^{1-0} = q$ (146). Hinc autem

infertur esse $aq^0 = a$, consequenter $q^0 = 1$. Nam aq^0 denotat a toties acceptum, quot in q^0 sunt unitates (43); quod si igitur hoc factum nihilominus manet $= a$, non potest a nisi semel accipi, atque adeo debet esse $q^0 = 1$. Quare universim: *potentia exponentis o cujusvis quantitatis æqualis est unitati*; id, quod probe notandum.

313. Theorema XIII. Quivis progressionis Geometricæ terminus est æqualis facto ex termino primo ducto in quotientem elevatum ad eam potentiam, cujus exponents designat numerum terminorum præcedentium

Demonstratio. Patet hoc ex primo progressionis $\div a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5$ &c intuitu, cum illico appareat, quintum v. g. terminum aq^4 esse factum primi a in quotientem q elevatum ad quartam potentiam.

Formula generalis hujus Theorematis esse potest $m = aq^{n-1}$, in qua m exhibet terminum quæsitum, n vero indicat, quotus is sit in progressionem.

314. Coroll. I. *Series potentiarum alicujus quantitatis successive crescentium constituit progressionem Geometricam.*

Ponatur enim $a = 1$, & q repræsentet quamlibet quantitatem, progressionis formula mutabitur in hanc $\dots 1, q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6$ &c. Sunt igitur potentiæ quantitatis q serie naturali sese excipientes progressio Geometrica.

Verum aliter res habet in radicibus sese consequentibus, quæ scilicet sunt potentiæ exponentium fractorum $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c, qui non constituunt progressionem Arithmeticam.

315. Coroll. II. *Summæ, vel differentiæ terminorum proximè sese in progressionem Geometricam consequentium, sunt in progressionem Geometricam.* Nam progressionis $\dots a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6$ summæ, vel differentiæ terminorum expositæ sunt $a \pm aq, aq \pm aq^2, aq^2 \pm aq^3, aq^3 \pm aq^4, aq^4 \pm aq^5, aq^5 \pm aq^6$. Atqui nemo non videt, hosce terminos esse in progressionem Geometricam, cum singuli æquantur primo ducto in quotientem elevatum ad eam potentiam, cujus exponens indicat numerum terminorum præcedentium. v. g. quintus $aq^4 \pm aq^5$ est factum ex $a \pm aq$ in q^4 .

316. Theorema XIV. *In omni progressionem Geometricam facta extremorum, & terminorum ab extremis æquidistantium, sunt inter se æqualia, vel etiam quadrato termini medii, si numerus terminorum sit impar.*

Demonstratio. Opus solummodo est, ut progressionis formula consideretur, $\dots a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6$; evidens enim est, facta primi termini in ultimum aaq^6 ; secundi in penultimum $aq \times aq^5 (= aaq^6)$; tertii aq^2 in antepenultimum aq^4 , nempe aaq^6 ; quadratum medii aq^3 , seu a^2q^6 , omnia inter se æquari.

Coroll. *In proportionem Geometricam continua factum extremorum æquale est quadrato medii.* Talis enim proportio est progressio trium terminorum.

317. THEOREMA XV. *Si in progressionem quavis Geometricam $\dots a, aq, aq^2, aq^3$ &c sit $q = 2$ vel $\frac{1}{2}$, differentia inter terminum primum & ultimum æqualis est summæ omnium terminorum dempto maximo. Si $q = 3$, vel $\frac{1}{3}$, differentia inter primum & ultimum æqualis est duplæ summæ omnium terminorum.*

minorum dempto maximo. Si $q = 4$, vel $\frac{1}{4}$, differentia primi & ultimi est tripla summæ omnium dempto maximo &c. Posito enim $q = 2$, progressio $\dots a. aq. aq^2. aq^3$ &c mutatur in hanc $\dots a. 2a. 4a. 8a$ &c: jam vero si sumatur differentia termini primi & ultimi hujus progressionis $8a - a$, habetur $7a = a + 2a + 4a$, quæ est summa omnium terminorum maximum præcedentium. Ponatur $q = 3$, fiet progressio prior $\dots a. 3a. 9a. 27a$, in qua extremorum differentia $27a - a = 26a$ est dupla summæ $a + 3a + 9a = 13a$. Eodem modo demonstratio procedit, si $q = \frac{1}{2}$, vel $q = \frac{1}{3}$.

318. Theorema XVI. In omni progressionē Geometrica est terminus primus ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum secundi; primus ad quartum, ut cubus primi ad cubum secundi; & sic deinceps.

Univerſim: duo quilibet termini certo intervallo a ſeſe diſtantes ſunt inter ſe, ut duo quivis contigui ad eam potentiam elevati, cujus exponens designat locum, quo alter terminus ab altero diſtat. Exempli cauſa, tertius terminus eſt ad nonum, ut ſexta potentia cujuſlibet termini ad ſextam potentiam immediate ſequentis.

Demonſtratio. In progressionē $\dots a. aq. aq^2. aq^3. aq^4. aq^5. aq^6. aq^7. aq^8$, manifestum est, eſſe $a : aq^2 :: a^2 : a^2 q^2$, cum utriusque rationis quotiens ſit q^2 . Similiter eſt $a : aq^3 :: a^3 : a^3 q^3$, cum rursus quotiens in utraque ratione habeatur idem q^3 &c.

Sic etiam liquet, cum terminus nonus a tertio ſit ſexto loco poſitus, eſſe $aq^2 : aq^8 :: aq^5 : aq^6$; ſeu etiam $aq^2 : aq^8 :: a^6 q^5 : a^6 q^6$; nam quotiens utriusque rationis eſt q^6 .

Generatim ſi aq^m , & aq^r exhibeant duos quovis terminos inter ſe comparandos; locus, quo alter ab altero diſtat, ſi $r - m$; terminus quivis alius ſit aq^n , adeoque hunc immediate ſequens aq^{n+1} , ſemper erit $a q^m : a q^r :: a^{r-m} q^{nr-m} : a^{r-m} q^{(n+1)(r-m)}$ quod quotiens in utraque ratione ſit idem q^{r-m} .

319. Theorema. XVII. Termini, quorum literæ eadem, & exponentes sunt in proportionem, vel progressionem Arithmetica, sunt in proportionem, vel progressionem Geometrica.

Demonstratio. Equidem clarum est, terminos aq^1, aq^2, aq^3, aq^4 constituere proportionem Geometricam $aq^1:aq^2::aq^2:aq^3$, cum utriuslibet rationis quotiens sit q^1 . Pariter est $\frac{2}{1} aq^2, \frac{3\frac{1}{2}}{1} aq^3, \frac{5}{1\frac{1}{2}} aq^4$; est enim quotus terminorum communis q .

Varia Problemata de proportionibus & Progressionibus Geometricis.

320. Problema I. Datis tribus quibusvis terminis proportionis invenire quartum.

Resolutio. Terminus incognitus dicatur x , & cum reliquis datis ordine debito disponatur: fiat ex factis extremorum & mediorum æquatio, in cujus alterutro membro erit x ; dividatur jam per alterum factorem hujus membri tota æquatio; habebitur valor incogniti x , cum membrum alterum meris quantitibus datis constet. Unde sequens deducitur regula universalis: terminus quivis proportionis Geometricæ æqualis est vel factio extremorum per unum e mediis diviso; vel factio mediorum diviso per unum ex extremis.

Exemplum: dentur primi tres termini a, b, c , & quærat quartus: habebitur $a:b::c:x$; & hinc $ax=bc$,

& (221) $x = \frac{bc}{a}$, si datis primo, tertio & quarto, x

fit secundus, erit proportio $a:x::b:c$; æquatio $ac=bx$;

& $x = \frac{ac}{b}$. Regula generalis in solutione contenta appellari solet *regula trium*.

321. *Observa* I. In usu regulæ trium Arithmetici præcipiunt, ut dispiciatur, an tres termini dati sint in ratione directâ, an vero in reciproca cum quæsito, quod ex quæstionis statu colligitur. In priore casu regulam trium vocant directam, quando nempe terminus quæsitus tanto debet esse major vel minor tertio, quanto secundus est major vel minor primo: & tum x erit quartus terminus proportionis, formulaque adhibenda

$x = \frac{bc}{a}$, quæ sic enunciatur: *Regula trium directâ est, quando terminus secundus multiplicatur per tertium, & factum divisum per primum exhibet quæsitum.*

322. Terminum incognitum esse in ratione reciproca cum tribus datis inde intelligitur, quando per statum quæstionis tanto debet esse major tertio, quanto secundus minor est primo, vel tanto minor tertio, quanto secundus est major primo. Et tunc regula dicitur inversa, x secundo, aut tertio loco posito,

attendendumque formula $x = \frac{ac}{b}$, cujus enunciatio est: *In regula trium inversa multiplicetur terminus primus datus per tertium, & factum dividatur per secundum datum; erit quotiens quartus quæsitus.*

EXEMPLUM I. 36 hexapedæ operis fruendi constant 60 libris; quot constabunt hexapedæ 48? Manifestum est, regulam trium directam hic adhibendam esse, cum pretium quæsitus tanto debeat esse majus, quam 48; quanto pretium 60 librarum majus est, quam 36. Hinc ex formula $x = \frac{bc}{a}$ habebitur

$x = 80$ libræ:

EXEMPLUM II. 20 operæ perfecerunt uno die 45 hexapedas; ut 81 hexapedæ fruenterentur, quis operarum numerus adhiberi debuisset?

Liquet, terminos 20, 45, 81 cum quarto incognito x non pos-

posse esse in ratione directa; quæsitus enim operarum numerus non debet tantum excedere numerum 81, quantum 45 major est, quam 20: immo vero apparet, paucioribus operis pro 81 hexapedis opus esse, quam 81, quemadmodum etiam pro 45 hexapedis non requirebantur 45 structores. Igitur terminorum

ordo adhibendus est sequens $20:45::x:81$, & formula $x = \frac{a c}{b}$,

ex qua fit $x = 36$.

323. II. Regula trium non est inversa, nisi quando termini problematis male sunt dispositi. Nam si quæstio præcedens rite enunciatur, hic debet esse terminorum ordo: si ad 45 hexapedas operis, necessarii sunt structores 20; ad 81 quot requiruntur?

324. III Subinde problemata magis complicata proponuntur, quorum solutiones dicuntur *regulæ societatis*; sed pro hisce nova regula opus non est, cum solvi possint pluribus proportionibus adhibitis, quarum ope termini incogniti directe reperiuntur.

EXEMPLUM III. 20 operæ intra 15 dies struunt 160 hexapedas, quot hexapedas facient 30 homines intra dies 12?

Hoc problema reducendum ad sequentia duo: 20 operæ tempore dato faciunt 160 hexapedas; quot hexapedas facient tempore eodem operæ 30? reperiuntur 240.

Tempore 15 dierum numerus datus operarum facit 240 hexapedas; intra 12 dies quot faciet? Invenientur 192.

Vel vero problema propositum reducatur ad hæc duo: intra 15 dies a dato operarum numero fiunt 160 hexapedæ; quot fient intra dies 12? Reperiuntur 128. Operæ 20 dato tempore absolvunt 128 hexapedas, quot absolverent operæ 30? invenientur 192.

Quin de regulis hujusmodi proportionum solliciti sumus, mediocri attentione animi adhibita id genus quæsitæ independenter ab omni proportionem resolveri possunt. Enimvero in hoc exemplo satis est imprimis quærere, quantum operis unus homo die uno faciat, dicendo 160 orgyæ per 15 dies dant pro uno

no die $\frac{160}{15}$, cujus pars vigesima, sive $\frac{160}{15 \times 20}$, præstatur

ab uno. His ita habentibus 30 operæ per diem facient

$$30 \times \frac{160}{15 \times 20}, \text{ five } \frac{30 \times 160}{15 \times 20}; \text{ \& hinc intra dies 12 efficient}$$

$$\frac{12 \times 30 \times 160}{15 \times 20} = 192 \text{ org;}$$

Eodem modo si proponatur quæstio (quam Arithmeticus *regulam septem* appellavit): 10 fesquimodii tritici, singuli ponderis 240 librarum, alebant 525 milites diebus 4; 17 fesquimodii, appendentes singuli 320 libras, quot diebus sufficient 217 militibus? Quærat primo, quantum requiratur die uno pro milite uno, inferendo, decies 240 libræ intra 4 dies absumptæ, dant annonam diei unius $\frac{10 \times 240}{4}$, cujus pars 525ta est

alimentum militis unius diurnum, id est $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$. Quod si ita sit, decies septies 320 libræ divisæ in 217 portiones, seu $\frac{17 \times 320}{217}$ exhibet, quantum a milite uno, numero dierum quæsito consumatur, ita, ut si hæc quantitas dividatur per $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$ (quod indicat victum diurnum unius), obtineatur numerus dierum quæstus $\frac{17 \times 320 \times 4 \times 525}{10 \times 240 \times 217} = 21 \frac{33}{62}$.

EXEMPLUM IV. Tres mercatores contulerunt summam 12000 librarum: Petrus nempe 2000, Jacobus 4000, & Joannes 6000 libr. Damnum commune passi sunt 2400 lib. Quæritur damnum singulorum?

Solvitur hoc problemæ totidem proportionibus, quot sunt termini incogniti; est enim summa tota communis ad damnum totum commune, ut pars singulorum ad damnum singulorum; atque hinc regula trium ter adhibita reperietur damnum Petri 400, Jacobi 800, & Joannis 1200 libr.

325. IV. Id genus quæstiones solvi etiam possunt per *regulam falsi*, sive *falsæ positionis*, quæ in eo consistit, quod terminis incognitis substituantur interim arbitrarie assumpti, qui tamen

men incognitis sunt proportionales, ut dein horum ope adhibita regula trium ipsi incogniti reperiantur. Exemplo sit problema superius hunc in modum propositum: partiendum est damnum 2400 librarum ex summa collata a Petro, Jacobo, & Joanne: fuit autem portio Joannis æqualis summæ portionum reliquorum duorum; & Petrus dedit dimidium illius, quod contribuit Jacobus.

Quoniam non datur quantitas a singulis mercatoribus collata, sed solum ratio partium, substituuntur interim quantitates proportionales, ponaturque Petrus dedisse 10 libras, Jacobus 20, Joannes 30, quarum summa est 60 libr: tum fiant hæc proportionēs: ut 60 libr: sunt ad damnum totum 2400 libr: ita 10 libr., 20 libr., 30 libr. sunt ad damna partialia 400 libr: 800 libr. 1200 libr:

Si pars Petri assumpta fuisset 3 libr.: portio Jacobi fuisset 6, & Joannis 9 libr: quarum summa 18 libr: itaque ineunda proportio: ut 18 libr. ad 2400 libr. ita sunt 3, 6, 9 libr: ad 400, 800, & 1200 libr:

326. PROBLEMA II. *Datis termino primo, & quotiente progressionis, invenire terminum quemvis.*

Formula $m = aq^{n-1}$ (313). Itaque si petatur terminus v. g. undecimus progressionis, cujus terminus primus $= a$, quotiens $= 4$, erit $a = 1$, $q = 4$, $n = 11$, terminus quæsitus $= m$: facta substitutione habebitur $m = 1 \times 4^{10} = 4^{10} = 1048576$.

327. Problema III. *Datis termino primo a, ultimo ω , & quotiente q progressionis Geometricæ, invenire summam s.*

Resolutio. In progressionē Geometricā quivis terminus est antecedens rationis, excepto ultimo; & quilibet est etiam consequens rationis ejusdem, præter primum. Igitur summa omnium antecedentium æqualium rationum est $s - \omega$; & summa omnium consequentium $s - a$: est autem (310) $s - \omega : s - a :: a : aq$, ergo $aq s - aq\omega = as - aa$, seu (223) $qs - q\omega = s - a$; & $sq - s = q\omega - a$: denique

$$s = \frac{qa - \omega}{q - 1}$$

328. PROBLEMA IV. *Datis termino primo a, terminorum numero n, & quotiente q, invenire summam s.*

$$\text{Formula } s = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \text{ vel } s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

DEMONSTRATIO. Terminus ultimus progressionis est aq^{n-1} ; habetur igitur; ut prius $s = aq^{n-1}$: $s - a :: a : aq$; hinc $saq - aaq^n = sa - aa$, & divis omnibus per a habetur $sq - aq^n = s - a$; unde $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$.

329. PROBLEMA V. *Datis quotiente q, numero terminorum n, & summa s, invenire singulos terminos progressionis.*

$$\text{Formula } a = \frac{sq - s}{q^n - 1} \text{ vel } a = s \frac{q - 1}{q^n - 1}. \text{ Hæc formula}$$

ex æquatione præcedentis problematis eruta præbet terminum primum; & si hic multiplicetur per potentias continuo crescentes quotientis, habebuntur omnes reliqui termini, qui erunt

$$s \frac{q^2 - q}{q^n - 1}, s \frac{q^3 - q^2}{q^n - 1}, s \frac{q^4 - q^3}{q^n - 1}, s \frac{q^5 - q^4}{q^n - 1} \&c; \text{ vel etiam}$$

$$s \frac{q - 1}{q^n - 1}, s \frac{q - 1}{q^{n-2} - 1}, s \frac{q - 1}{q^{n-3} - 1}, s \frac{q - 1}{q^{n-4} - 1},$$

$$\&c. \quad \frac{q}{q^n - 1}, \frac{q^2}{q^{n-2} - 1}, \frac{q^3}{q^{n-3} - 1}, \frac{q^4}{q^{n-4} - 1},$$

330. PROBLEMA VI. *Datis terminorum numero n, terminis primo a, & ultimo ω , invenire progressionis quotientem q.*

$$\text{Formula } q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}. \text{ Nam (312) } \omega = aq^{n-1}.$$

331. PROBLEMA VII. *Datis in progressionem Geometricam termino primo a, ultimo ω , & quotiente q, invenire numerum terminorum n.*

RESOLUTIO. Æquatio $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$ (323) multiplicetur per q; fiet $\frac{\omega q}{a} = q^n$. Ex hoc vero manifestum est, quod si terminus ultimus ω ducatur in quotientem progressionis q, & factum dividatur per terminum primum a, quotus,

qui obtinetur, æqualis sit quotienti progressionis elevato ad eam potentiam, cujus exponens est numerus terminorum quæsitus n . Igitur si quotiens progressionis elevetur successive ad potentias ordine sese consequentes, donec aliqua æquetur quoto illius divisionis, numerusque potentiarum notetur, ad quas successive quotiens progressionis elevatus est, facile terminorum numerus cognoscetur. Sit exempli causa $a = 5, q = 3, w = 3645$; ducatur 3645 in 3; factum 10935 dividatur per 5; erit quotus 2187. Elevetur quotiens progressionis 3 ad secundam, tertiam, quartam &c potentiam, donec reperiatur aliqua æqualis quoto 2187; sunt autem hæ potentie 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187; & cum 2187 sit potentia septima quotientis 3, numerus terminorum quæsitus est 7. Reipsa progressio est $\ddot{::} 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645$.

Facillime repertus fuisset is exponens, si logarithmus numeri 2187 fuisset divisus per logarithmum numeri 3.

332. Problema VIII. *Inter datos duos terminos invenire quotvis medios proportionales.*

Primo. Oporteat inter terminos a & b invenire unum; erit $\ddot{::} a.x.b$; consequenter (316) $ab = xx$, & (225) $x = \sqrt{ab}$.

Secundo. Sint inter a & b duo medii reperiendi. Habebitur $\ddot{::} a.x.y.b$; & (318) $a:b::a^3:x^3$, consequenter $a^3 b = a x^3$, & dividendo per a utrumque

membrum, $aab = x^3$, five $x = \sqrt[3]{aab}$. Habito jam primo & secundo termino, facile tertius reperietur,

cum sit $a:\sqrt[3]{aab}::y:b$, & omnibus terminis elevatis ad tertiam potentiam, $a^3:aab::y^3:b^3$, ideoque y^3

$$= \frac{a^3 b^3}{aab} = abb, \text{ \& } y = \sqrt[3]{abb}.$$

Tertio. Generaliter: si inter a & b inveniendus sit, numerus mediorum n erit locus, quo b distat ab a , $n + 1$; hinc

$$\text{erit (318) } a^{n+1}:x^{n+1}::a:b. \text{ Quare } \frac{a^{n+1}b}{a} \text{ (seu } a^n b).$$

$= x^{n+1}$, & extracta radice $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, five . . .

$x = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$. Atque ita terminus primus e mediis quæfitis habetur. Quod si idem calculus applicetur reliquis, re-

perietur alter $\sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2}$, tertius $\sqrt[n+1]{a^{n-2}b^3}$, quartus

$+1$

$\sqrt[n+1]{a^{n-3}b^4}$, & sic deinceps, donec exponens quantitatis b fiat $= n+1$, quo casu est exponens termini $a = 0$ &

terminus $\sqrt[n+1]{a^0 b^{n+1}}$ reducitur ad b .

333. Problema IX. Inter binos quosvis terminos progressionis Geometricæ invenire numerum in mediorum proportionalium.

Resolutio. Sit data progressio Geometrica $\div aq^0$, aq^1 , aq^2 , aq^3 &c: quærat^r numerus m terminorum Arithmetice proportionalium inter binos quosvis exponentes progressionis Geometricæ datæ; habebuntur exponentes terminorum mediorum Geometricæ proportionalium, qui inter binos progressionis datæ terminos quærebantur (319). Exempli causa si petantur tres termini inter binos quoslibet progressionis datæ fiet . . .

$\div aq^0$. $aq^{\frac{1}{4}}$. $aq^{\frac{2}{4}}$. $aq^{\frac{3}{4}}$. aq^1 . $aq^{\frac{5}{4}}$. $aq^{\frac{6}{4}}$. $aq^{\frac{7}{4}}$. aq^2 .
&c.

DE LOGARITHMIS.

De Logarithmorum Natura, & Ufu.

334. **L**ogarithmi sunt numeri certo artificio compositi, qui si alias usitatorum loco adhibeantur, omnem multiplicationem in additionem, omnem divisionem in subtractionem mutant.

Diximus jam, quamvis progressionem Geometricam exhiberi posse hac formula $\frac{1}{a} \cdot aq^1 \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5 \cdot aq^6 \cdot aq^7 \cdot aq^8 \cdot \&c.$, in qua per a & q quosvis numeros designare licet: unde si ponatur $a = 1$, ea mutabitur in $\frac{1}{1} \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdot q^5 \cdot q^6 \cdot q^7 \cdot q^8 \cdot \&c.$ Hinc autem infertur

335. I. Factum duorum terminorum quorumvis hujus progressionis habere exponentem æqualem summæ exponentium eorum terminorum (142), uti factum $q^3 \times q^4 = q^7$. Quando igitur quæritur, quinam terminus progressionis æquetur facto duorum aliorum, ille sumendus est, cujus exponens æqualis est summæ illorum exponentium.

336. II. Quotientem duorum terminorum esse illum, cujus exponens æquatur differentię exponentium duorum illorum. v.g. quotus ex q^8 divisio per q^5 est q^3 , seu q^{8-5} . Quare ut habeatur terminus progressionis æqualis quotienti duorum quorumlibet, quærat ille, cujus exponens est differentia exponentium duorum aliorum.

337. Logarithmus numeri est exponens potentie decadis, quæ potentia æqualis est illi numero. Itaque posita progressionem Geometricam

$\frac{1}{10^0} \cdot 10^1 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \&c.$

& substituto valore horum terminorum

$\frac{1}{1} \cdot 10 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 10000 \cdot 100000 \cdot 1000000 \cdot \&c.$

Exponens 0 est logarithmus unitatis, seu 1; exponens 1 est logarithmus numeri 10; exponens 2 logarithmus numeri 100; exponens 3 logarithmus numeri 1000 &c. At quoniam exponentes isti non præbent logarithmos, nisi tantum numerorum integrorum in progressione decupla 1, 10, 100, 1000 &c, & præterea necesse est, habere logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 &c; iisdem exponentibus singulis additæ sunt 7 notæ decimales, quo factum est, ut forma progressionis mutaretur in hanc

	0,0000000	1,0000000	2,0000000	3,0000000	
∴	10	10	10	10	&c.

Jam vero (319) quamdiu hi exponentes sunt in progressione Arithmetica, valores decadis elevatæ ad eas potentias, quas hi exponentes designant, constituunt progressionem Geometricam. Quare si iisdem exponentes successive crescant una decies millio-

nesima parte, sive $\frac{1}{10000000}$; seu, quod idem est,

si inter binos quoslibet interferantur 9999999 medii Arithmetice proportionales, nova orietur progressio Geometrica, cujus priores termini sunt

	0,0000000	0,0000001	0,0000002	
∴	10	10	10	
		0,0000003	0,0000004	
	10	10	10	&c.

In hac autem progressione Geometrica termini ab unitate incipientes tardissime crescunt, cum primi valor sit 1, & termini post primum decies millionesimi valor solummodo 10. Hinc ex decem millionibus terminorum intermediorum erit unus aliquis, qui valeat 2; alius, qui valeat 3; alius rursus, qui vale-

leat 4 &c. Atque hac ratione repertum est. termi-
 ni 10 $\begin{matrix} 0,3010300 \\ 0,6020600 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0,4771213 \\ \end{matrix}$
 valorem esse 2; terminum 10

esse = 3; 10 = 4 &c; consequenter etiam
 exponentes horum terminorum sunt logarithmi nu-
 merorum 2, 3, 4 &c.

338. His principiis, quorum usus planior reddi-
 tus est ope regularum, quæ elementis altius assur-
 gunt, nititur calculus tabularum logarithmorum pro
 numeris ab 1 usque ad 100000 constructarum, qua-
 rum ope etiam logarithmi pro numeris majoribus in-
 veniri possunt. In his tabulis quandoque majoris ac-
 curationis causa logarithmi habent decem, immo
 quindecim notas decimales; plerumque septem, qua-
 rum etiam postremæ duæ in usu sæpius negliguntur.
 Tabularum passim adhiberi solitarum initium est.

Numeri	Logarithmi.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600
5 &c.	0,6989700 &c.

339. Hinc porro colligitur primo, logarithmos
 omnium numerorum inter 1 & 10 incipere a 0; lo-
 garithmos eorum, qui sunt inter 10 & 100, primam
 notam habere 1; qui vero continentur inter 100 &
 1000, eorum logarithmos habere primam notam 2
 &c. Prima hæc nota (quæ est quantitas integra ex-
 ponentis) dicitur *Characteristica* logarithmi, quod ea
 indice intelligatur, quot notis numerus logarithmo
 dato respondens constet. Etenim facile patet, a nu-
 mero notarum debere unitate excedi characteristi-
 cam

cam. Sic, ut primum datur logarithmus 4,8145605, colliget quisque, ei competere numerum e quinque notis compositum, utpote cum characteristica logarithmi sit 4.

340. Colligitur *secundo*, facti duorum numerorum (335) logarithmum esse summam logarithmorum utriusque numeri; & logarithmum quotientis esse differentiam logarithmorum dividendi & divisoris. Ut itaque multiplicetur numerus 48 per 166, addantur utriusque logarithmi, nempe 1,6812412, & 2,2201041, summa 3,9013493, est logarithmus facti, cui in tabulis respondet numerus $7968 = 48 \times 166$. Si dividendus sit numerus 7336 per 56, subtrahatur logarithmus divisoris 1,7481880 a logarithmo dividendi 3,8654593; differentia 2,1172713 est logarithmus quoti, cui in tabulis convenit numerus 131. Habetur igitur quotus 131 ex divisione 7336 per 56.

341. Colligitur *tertio*, ut *regula trium per logarithmos fiat*, oportere logarithmos termini secundi & tertii addere, & a summa subtrahere logarithmum termini primi; residuum fore logarithmum quarti quaesiti. Exemplum. Dantur $2843:8529::3147:x$. Ut terminus x inveniat, juxta leges alias praescriptas (329), debet 3147 multiplicari per 8529, & factum 26840763 dividi per 2843, tumque habetur quotiens $9441 = x$. Verum operatio haec longa est, nec errandi caret periculo, nisi magna adhibeatur attentio. Sed si logarithmis utamur, solum opus est, ut numerorum 8529 & 3147 logarithmi, scilicet 3,93090 & 3,49790 addantur, & a summa 7,42880 auferatur 3,45378, logarithmus numeri 2843; residuo 3,97502, quod est logarithmus quaesiti x , in tabulis respondet numerus 9441.

342. Colligitur *quarto*; ut *quantitas quaecumque ad certam potentiam eleveatur*, ejus logarithmum sibi ipsi toties

es addendum esse, quoties illa quantitas per se multiplicari deberet, ut haberetur potentia petita; hoc est, ejus logarithmum multiplicandum esse per exponentem potentiae. v. g. Ut 8 elevetur ad quartam potentiam, ducatur ejus logarithmus 0,90309 in 4, factum 3,61236 est logarithmus numeri 4096, seu quartae potentiae numeri 8.

343. Colligitur denique: Si logarithmus quantitatis datae dividatur per exponentem radice extrahendae ex ea quantitate, quotientem fore logarithmum radice quaesitae. Ut extrahatur radix cubica ex 6859, hujus numeri logarithmus 3,83626 dividatur per 3; quotiens 1,27875 est logarithmus radice quaesitae, cui respondent in tabulis 19.

De usu Tabularum Logarithmorum praecipue infra-
ctionibus.

344. Tabulis logarithmicis plerumque jungitur instructio, ex qua lector usum intelligat; ac propterea nos in praesens pauca hac de re adferemus, illo contenti, si rationem utendi logarithmis, quando numeri fracti exhibendi sunt, rite exposuerimus: res haec summo cum laboris compendio, ingentique utilitate conjuncta est; sed methodus, qua utemur, raro satis explicite traditur.

Imprimis itaque sciendum est, quod si detur logarithmus alicujus numeri valorem quantitatis non accurate exprimentis, ut acquiratur is numerus cum fractione decimali adjungenda, Characteristica logarithmi dati tot unitatibus augenda sit, quot notae in fractione decimali desiderantur, & numerus logarithmo sic aucto respondens quaerendus: ubi hic repertus est, separatur versus partem dextram interposita virgula tot notae, quot unitates logarithmi dati characteristicae sunt adjectae; erunt haec notae fractio decimalis quaesita. Quaeratur v. g. numerus accuratior, quam qui respondet logarithmo 1,7413364 in tabulis; sumatur ejus loco logarithmus 3,7413364, & quaeratur numerus proxime huic in tabulis respondens, qui est 5512; separatis

tis postremis duabus notis habetur valor accuratior 55, 12 competens logarithmo 1,7413364. Si Characteristica additæ fuissent 4 unitates, sive substitutus logarithmus, 5,7413364, inventus fuisset valor 55,1235. Ratio hujus facile intelligitur. Logarithmus, cujus characteristica augetur una, duabus, tribus &c unitatibus, fit logarithmus numeri ejusdem per 10, 100, 1000 &c multiplicati: quod si itaque valor hujus producti dividatur per 10, 100, 1000 &c, (hoc est, si refecentur una, duæ, tres &c notæ ex parte dextra (72)), necesse est, ut habeatur valor numeri quæsitum cum fractione decimali.

Ex eadem ratione manifestum, quod si inveniendus sit logarithmus numeri habentis annexam fractionem decimalem, quærendus sit logarithmus competens illi numero ita considerato, quasi una cum notis decimalibus constitueret unicum numerum integrum; tum a logarithmi reperti Characteristica tot auferendæ sint unitates, quot notæ decimales erant in fractione integro annexa.

345. His positis, cum fractiones proprie dictæ sint quantitates unitate minores (76), & logarithmus unitatis sit 0 (337); sequitur, logarithmos fractionum debere esse defectivos sive negativos, prefixo eorum Characteristica signo —; verum quod ad operandi rationem, hi logarithmi tractari possunt, ac si essent positivi, supponendo scilicet, characteristicam logarithmi unitatis esse 10, 100, vel 1000 &c; & facta semel tali suppositione, omnes logarithmi, qui ex operatione quavis in fractionibus instituta prædeunt, respondent fractionibus decimalibus quarum notas præcedunt tot zeri dempto uno, quot unitatibus ejusmodi logarithmorum characteristica a 10, 100, 1000 &c deficiunt. En sequentem tabulam!

Numeri Naturales. Logarithmi Tabulares. Logarithmi Hypothetici.

10000 ...	+	4,0000000 ...	14,0000000 ...	104,0000000
1000 ...	+	3,0000000 ...	13,0000000 ...	103,0000000
100 ...	+	2,0000000 ...	12,0000000 ...	102,0000000
10 ...	+	1,0000000 ...	11,0000000 ...	101,0000000
1 ...	±	0,0000000 ...	10,0000000 ...	100,0000000
0,1 ...	—	1,0000000 ...	9,0000000 ...	99,0000000
0,01 ...	—	2,0000000 ...	8,0000000 ...	98,0000000
0,001 ...	—	3,0000000 ...	7,0000000 ...	97,0000000
0,0001 ...	—	4,0000000 ...	6,0000000 ...	96,0000000 &c.

Nos

Nos supponemus isthic, characteristicam logarithmi unitatis esse 10 (id, quod plerumque in calculis sufficit, quando nempe non occurrunt fractiones prorsus exiguae, uti quæ partibus centies-millionesimis forent minores; quarum fortassis ratio habenda esset: tunc enim characteristica logarithmi unitatis sumi deberet ∞ 100). Hinc quotiescunque post operationem quampiam characteristica logarithmi excedet 10, eum ad numerum integrum pertinere constabit, qui tot notis plus una sit compositus, quot unitates supra 10 habuerit characteristica; & quotiescunque characteristica logarithmi a 10 deficiet, is pertinebit ad fractionem decimalem, cujus notas tot præcedant zeri minus uno, quot unitatibus characteristica fuerit infra 10.

346. I. Quotiescunque logarithmus major subtrahendus est e minore, ut cum 4 dividi debent per 7, augeatur decade characteristica logarithmi numeri dividendi; in præsentem exemplo loco 0,60206, qui est logarithmus tabularis numeri 4, sumatur 10,60206, & a logarithmo ita aucto subtrahatur logarithmus tabularis numeri divisoris, hic nempe numeri 7, qui est 0,84510; residuum 9,75696 erit logarithmus quotientis. Atque hunc in modum fractionum passim usitatarum logarithmi reperiuntur.

347. II. Ut vero inveniatur valor logarithmi cujusvis in fractionibus decimalibus, is logarithmus quærat in tabulis, velut si ejus characteristica foret 3, 4, 5 &c, prout scilicet quatuor, quinque, sex &c notæ decimales desiderantur: numero correspondenti reperto præfigantur tot zeri, quot unitatibus characteristica logarithmi dati deficit a 9.

Exemplum: quærendus sit valor logarithmi 5,41867, quem pertinere ad fractionem alias constet. Quærat idem logarithmus cum characteristica 3, nempe 3,41867, inter tabulares; invenietur numerus proxime respondens 2622; & quoniam characteristica logarithmi dati 5 deficit a 9 quatuor unitatibus, erit fractio quæsitæ 0,00002622. Eodem modo invenitur, logarithmo 9,45924 convenire fractionem 0,2879; logarithmo 3,48365 competere 0,0000030455, &c.

348. III. Si proponatur fractio multiplicanda per alteram fractionem, earum logarithmi (inventi scilicet per N. 347) adduntur, & a characteristica summæ auferuntur 10; residuum est logarithmus facti. v.g. Si fractio $\frac{7}{2}$ ducenda in $\frac{147}{81230}$, utriusque logarithmi 9,76592, & 7,25760 colligantur in unam summam

mam 17,02350, cujus characteristica si minuatur decade, residuum 7,02350 est logarithmus facti datarum fractionum, nempe 0,0010556. Eodem modo si multiplicanda sit fractio 0,0047 per 0,000051, logarithmus illius 7,67210 addatur logarithmo hujus 5,70757; erit logarithmus facti 3,37967, cui competit fractio 0,0000002397. Cur autem a characteristica summæ logarithmorum subtrahi debeant 10, ratio est; quod sit (44) unitas ad multiplicatorem, ut est multiplicandus ad productum; quando igitur inveniendum est productum duarum fractionum, v. g. $\frac{7}{12}$ & $\frac{147}{81230}$, facienda est hæc proportio, $1 : \frac{7}{12} :: \frac{147}{81230} : \frac{7}{12} \times \frac{147}{81230}$; consequenter si logarithmis utamur, addendi sunt logarithmi terminorum mediorum proportionis (341), & a summa auferendus logarithmus unitatis, qui per hypothesin est 10.

349. IV. Si fractio per fractionem dividenda sit, characteristica logarithmi fractionis dividendæ augeatur decade, & a summa subtrahatur logarithmus fractionis, per quam divisio facienda; erit residuum logarithmus quotientis. Est enim (53) divisor ad unitatem, ut dividendus ad quotientem. Sic si oporteat $\frac{7}{12}$ dividere per $\frac{147}{81230}$, logarithmus 7,25760 auferatur a logarithmo 19,76592, erit logarithmus 12,50832 quotientis, cui competit numerus integer 322, seu accuratius 322,35.

350. V. Quando fractio elevanda est ad potentiam quamvis m , multiplicetur logarithmus fractionis datæ per exponentem potentiæ m , & a characteristica facti subtrahatur factum

$10 \times m - 1$. Exempli causa petatur quinta potentia fractionis 0,17; ducatur ejus logarithmus 9,2304489 in 5, & a caracte-

ristica facti 46,1522445 auferatur $10 \times 5 - 1 = 49$; residuum 6,1522445 est logarithmus fractionis 0,0001419857, quæ est quinta potentia datæ 0,17.

351. VI. Ut radix quævis extrahatur ex fractione data, augeatur characteristica logarithmi fractionis facto ex 10 in exponentem radicis unitate multiplicatum, summa dividatur per exponentem radicis integrum. Exemplum. Quæraturs radix undecima fractionis 0,17; characteristica ejus logarithmi 9,2304489

addantur 100, sive $10 \times 11 - 1$, summa 109,2304489 dividatur per 11; quotiens 9,930444 erit logarithmus fractionis 0,85193, quæ est radix undecima datæ 0,17. Similiter, ut in-

ve-

veniat radix quinta fractionis $\frac{7}{12}$, ejus logarithmi characteri-

fica 9,76592 augeatur 40, seu facto $10 \times 5 - 1$: summa 49,76592 divisa per 5 dat quotum 9,95318, qui est logarithmus 0,8978, radicis quintæ fractionis datæ $\frac{7}{12}$.

352. Ut postremarum regularum veritas constet, illud ad-vertendum, quod quantitatem aliquam elevare ad suas potentias ordine sibi succedentes, nihil aliud sit, quam hasce successive proportionem facere $1:a::a:a^2$, dein $1:a::a^2:a^3$; tum $1:a::a^3:a^4$ &c. Sit igitur $a = 0,17$, cujus logarithmus est 9,23045; patet, haberi logarithmum de a^2 , si fiat 9,25045 + 9,23045 = 10,00000 = 8,64090; item logarithmum de a^3 fore 9,23045 + 8,64090 = 10,00000 = 7,69135; logarithmum de a^4 9,23045 + 7,69135 = 10,00000 = 6,92180 &c. Ex quo manifestum est, subtrahendum esse toties logarithmum unitatis, quot unitates dempta una habet exponens potentie. Verum illud quoque apparet, hanc regulam locum habere, si numeri integri elevandi sint ad quasvis potentias, dum logarithmus unitatis non supponitur æqualis 0. Idem ratiocinium applicetur logarithmis radicum.

Ex omnibus hisce apparet, characteristicas esse in tabulis logarithmorum numerorum naturalium notas prorsus inutiles, cum calculatoris sit iis utentis, in singulis, quibus eos adhibet, casibus illarum valorem determinare.

DE PROPRIETATIBUS MAGNITUDINIS, SI SPECTETUR UT INFINITA,

353. *Propositio I. Magnitudo est divisibilis in infinitum.*

Demonstratio. Magnitudo per naturam suam capax est augmenti & decrementi: igitur etiam aucta, vel diminuta naturam suam retinet, consequenter adhuc incrementi vel decrementi capax est; adeoque sine fine, seu in infinitum. Exempli causa, series naturalis numerorum 1, 2, 3, 4 &c evidenter in infinitum

tum crescit: ad quamcumque enim magnitudinem aliquis hujus seriei terminus pervenerit, nondum ultimo vicinior est, id, quod fieri nequit in serie, cujus terminorum numerus sit finitus.

Jam vero licet termini infiniti hujus progressionis numeris exprimi nequeant; cum tamen maneant *magnitudines*, quamvis infinitæ, non desinunt habere proprietates finitas, quo fit, ut calculo subjici possint, si caractere quopiam, velut ∞ , designentur, atque hinc tota numerorum series hunc in modum poterit exhiberi $1.2.3.4.5.....\infty$

Simili ratione quantitas finita in partes semper minores, & minores dividi potest, donec divisione in infinitum continuata deveniatur ad partem infinite parvam; ut adeo unitas in suas partes divisa representari possit hac serie $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \frac{1}{\infty}$.

354. Propositio II. *Quantitas, quæ in infinitam abiit, non est amplius capax augmenti vel decrementi, nisi infiniti.*

Demonstratio. Si quantitas finita in infinitam abiit, omnia sua incrementa finita possibilia acquisivit; igitur nulla quantitate finita amplius augeri potest. Eodem modo si quantitas abiit in infinite parvam, omnibus decrementis finitis possibilibus jam imminuta est, hinc nulla amplius quantitate finita potest minui. Atqui quantitas, quæ seu in infinite magnam, seu in infinite parvam abiit, nihilo minus adhuc est quantitas, atque adeo incrementi & decrementi capax: quare necesse est, ut hoc incrementum vel decrementum infinitum sit.

Sic $\infty \pm 1 = \infty$, $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$; sed $\infty + \infty = 2 \infty$; & $\frac{1}{\infty} \times 3 \infty = \frac{3 \infty}{\infty} = 3$, $\frac{2}{\infty}$ divis: per $\frac{a}{\infty} = \frac{2}{a}$, &c.

355. Coroll. I. *Quantitas finita addita vel subtracta a quantitate infinite magna, in calculo negligi potest, & supponi* $= 0$. Itaque $\infty \pm a = \infty$. Idem est censendum de quantitate infinite parva respectu quantitatis finitæ; sic $a \pm \frac{1}{\infty} = a$.

356. II. *Quantitatum infinitarum dantur infinitæ species, five ordines.* Nam potest v. g. concipi hæc progressio Arithmetica $\div 1\infty, 2\infty, 3\infty, \dots, \infty\infty$, cujus ultimus terminus $\infty\infty$, seu ∞^2 , primum infinities excedit. Jam vero est $\infty^2 + \infty^2 = 2\infty^2$; & hinc rursus concipere possumus alteram progressionem $\div 1\infty^2, 2\infty^2, 3\infty^2, 4\infty^2, \dots, \infty\infty^2$, seu ∞^3 , cujus ultimus terminus est infinities major primo. Simili ratio- cinio ex nova $\div 1\infty^3, 2\infty^3, 3\infty^3, 4\infty^3, \dots, \infty\infty^3$ habetur ∞^4 , & universim devenietur ad ∞^∞ , imo ∞^∞ in infinitum.

Idem est de quantitativis infinite parvis: nam potest concipi series $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{2\infty} \cdot \frac{1}{3\infty} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\infty\infty}$, seu $\frac{1}{\infty^2}$, in qua terminus postremus infinities minor est primo. Ulterius in serie $\frac{1}{\infty^2} \cdot \frac{1}{2\infty^2} \cdot \frac{1}{3\infty^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\infty\infty^2}$, five $\frac{1}{\infty^3}$, rursus ultimus terminus est infinities minor primo. Et universim potest concipi $\dots \frac{1}{\infty^\infty}$, imo $\frac{1}{\infty^\infty}$ in infinitum &c.

357. Exponentes quantitatum infinitarum exprimunt, cujus ordinis quæque sit: ut $\infty, 3\infty$, quarum exponens est 1, five $\infty^1, 3\infty^1$, sunt quantitates in-

infinite magnæ primi ordinis; $3\infty^4$, $ab\infty^4$, sunt magnitudines infinitæ quarti ordinis. Similiter $\frac{4}{\infty}$, $\frac{d}{3\infty}$,

sunt quantitates infinite parvæ primi ordinis; $\frac{1}{a\infty^2}$, est infinitesima secundi ordinis, &c.

358. Observa, quantitates infinite parvas exprimi, dum nota infiniti ponitur in denominatore fractionis, cujus numerator est quantitas finita, vel infinita inferioris ordinis. Quotiescunque autem signum infiniti non est in denominatore, denotantur quantitates infinite magnæ.

359. III. *Ordines diversi infinitorum, ut sese consequuntur, constituunt progressionem Geometricam.* Etenim eorum exponentes progrediuntur in serie naturali continua numerorum; sic ∞^4 , ∞^3 , ∞^2 , ∞^1 , ∞^0 , ∞^{-1} , ∞^{-2} , ∞^{-3} , &c, quæ

series eadem, ac $\frac{1}{\infty^4}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^1}$, $\frac{1}{\infty^0}$, $\frac{1}{\infty^{-1}}$, $\frac{1}{\infty^{-2}}$, $\frac{1}{\infty^{-3}}$ &c.

360. IV. *Infinitum ordinis cujuscunque nequit augeri vel minui additione vel subtractione numeri finiti infinitorum ordinis inferioris; hoc est unum, plurave infinita ordinis inferioris sunt $= 0$ respectu infiniti ordinis superioris.* Itaque $\infty^2 \pm a\infty = \infty^2$; similiter $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

361. V. *Si infinitum multiplicetur vel dividatur per infinitum, factum, vel quotiens est quantitas ejus ordinis, quem indicat exponent facti, vel quotientis.* Ut $\infty \times \infty = \infty^2$; $3\infty \times b\infty = 3b\infty^2$; hoc est, si infinitum primi ordinis ducatur in infinitum primi ordinis, factum est infinitum secundi ordinis.

$\infty^2 \times \infty = \infty^3$; $3\infty^4 \times 4\infty^3 = 12\infty^7$; itaque factum duorum infinitorum est infinitum ordinis, quem indicat summa exponentium.

$\infty \times a = a\infty$: igitur factum ex infinito in finitum, est infinitum ejusdem ordinis.

$\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$; est ergo factum ex infinite magno in infinite parvum ejusdem ordinis, quantitas finita.

$\frac{1}{\infty} \times a = \frac{a}{\infty}$; $\frac{1}{4\infty^3} \times 2b = \frac{b}{2\infty^3}$, hoc est, factum ex infinitesima in quantitatem finitam, est quantitas infinitesima ejusdem ordinis.

Sic quoque in divisione $\frac{\infty}{\infty} = 1$; $\frac{\infty}{b\infty} = \frac{1}{b}$; five quotiens ex divisione infiniti per infinitum ejusdem ordinis, est quantitas finita.

$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$; si dividatur infinitum per infinitum ordinis inferioris, quotiens est quantitas infinita ordinis inferioris, quem indicat exponentium differentia $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$; quotiens ex divisione infiniti per infinitum ordinis superioris est infinitesima ordinis indicati per exponentium differentiam.

*Nonnullæ notiones de seriebus; de earum natura,
& formatione.*

362. *Series dicitur terminorum sese invicem sequen-*

quentium collectio, qui ordine continuo juxta certam aliquam legem crescunt vel decrescunt: hujusmodi sunt progressionēs Arithmeticae, & Geometricae.

363. *Series finita* est, cujus terminorum numerus est limitatus; *series infinita* vero, quæ in infinitum continuari supponitur.

364. *Series divergentes* appellantur, in quibus termini continuo crescunt; quorum autem termini perpetuo decrescunt, dicuntur *convergentes*. Series eo magis divergit, vel convergit, quo terminus quisque immediate præcedente major, vel minor est.

365. Tres præcipue serierum classes apud Mathematicos in considerationem veniunt; series numerorum *figuratorum*, sive diversorum ordinum; series numerorum polygonorum; & series potentiarum.

I. Series numerorum figuratorum sic incipiunt.

Numeri	Constantes, seu primi ordinis..	1	1	1	1	1	1, &c.
	Naturales, seu 2di ordinis..	1	2	3	4	5	6, &c.
	Triangulares, seu 3tii ordinis..	1	3	6	10	15	21, &c.
	Pyramidales, seu 4ti ordinis..	1	4	10	20	35	56, &c.

366. Lex, quam observant series numerorum figuratorum, est, quod quivis ordine terminus æquetur summæ totidem terminorum seriei præcedentis. Hinc secunda series fit continua additione unitatum; tertia formatur continua additione terminorum secundæ. v. g. $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 3 = 6$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, &c.

367. II. Numeri polygoni formantur ex summa numerorum progressionis Arithmeticae ab 1 incipientis, dicunturque triangulares, quadrangulares, pentagoni, hexagoni &c prout differentia progressionis Arithmeticae, ex cujus terminorum summa oriuntur, fuerit 1, 2, 3, 4 &c. Exemplum:

Progressiones Arithmeticae

Numeri Polygoni.

1 2 3 4 5 &c. Diff: 1 . . 13 6 10 15 &c. triangulares.
 1 3 5 7 9 &c. Diff: 2 . . 14 9 16 25 &c. quadrangul.
 1 4 7 10 13 &c. Diff: 3 . . 15 12 22 35 &c. Pentagoni.
 1 5 9 13 17 &c. Diff: 4 . . 16 15 28 45 &c. Hexagoni.

Nomen polygonorum inde fortiti sunt, quod exhibeant numerum punctorum necessariorum, ut in lineis ad polygonorum regularium latera parallelis symmetricè disposita spatium impleant ejusmodi polygoni.

368. III. Series potentiarum sunt illæ, quæ constant quadratis, cubis &c. numerorum 1, 2, 3, 4 &c. ordine naturali crescentium.

369. Præter expositas numerorum series (quæ formulis Algebraicis generaliter exhiberi possunt) sæpe aliæ quoque occurrunt. v. g. Fractio decimalis, ut 0,3543 nil aliud est, quam series

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000}$$

(98). Si idem numerus successive dividatur per terminos progressionis Arithmetice, ut $\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{7}{8}$

&c. constituit seriem, quam *progressionem harmonicam* vocant. Quin possunt arbitrarie formari series compositæ ex aliis pluribus, si earum termini correspondentes quacunque operatione Arithmetica combinentur. Talis esset v. g. series

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{8}{105} \cdot \frac{16}{945} \text{ \&c,}$$

cujus numeratores sunt progressio Geometrica in ratione dupla, denominatores vero sunt facta ex terminis seriei numerorum imparium, nempe ex primo; ex primo & secundo; ex primo, secundo & tertio; ex primo, secundo, tertio & quarto &c. Jam vero si lex, juxta quam series aliqua composita est, non per se in oculos incurrit, ea series ita scribenda est, ut lex ex ipsa forma deprehendi possit. Exempli causa; in serie postremo

mo allata, quisque facile videt, numeratores constituere progressionem Geometricam in ratione dupla crescentem; at qua ratione denominatores formati sint, non ita proum estprehendere. Quod si vero eadem exhibeatur sequenti forma (ubi loco signi $\times$ adhibita sunt puncta, ut sæpe in seriebus fieri solet)

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1.3}, \frac{4}{1.3.5}, \frac{8}{1.3.5.7}, \frac{16}{1.3.5.7.9}, \&c. \text{ nihil æque expeditum est, ac legem seriei videre.}$$

370. Sæpe quantitates, quæ in alias sine residuo resolvi nequeunt, reducuntur ad series infinitas: ejusmodi sunt quotientes quantitatum, quæ non sunt multipla divisoris; item radices omnium potentiarum imperfectarum. Sit exempli causa inveniendus quo-

tiens ex $\frac{1}{1+xx}$; si divisio juxta leges alias præscri-

ptas instituatur, reperietur $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$

&c. Nam si primo fiat $\frac{1}{1} = 1$; tum $1 \times 1 + xx = 1 + xx$, & subtrahatur hoc factum ex dividendo, relinquitur $1 - 1 - xx = -xx$: est igitur primus quotientis terminus 1. Si ulterius residuum $-xx$ dividatur per 1, alter quotientis terminus fit $-xx$;

& $-xx \times 1 + xx = -xx - x^2$, quo subtracto $-xx$, remanet x^2 . Novo hoc residuo iterum per 1 diviso, fit tertius terminus quotientis $+x^2$, & sic deinceps.

Eadem operandi methodo invenitur $\frac{a}{b+x}$

$$\frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} - \&c. \dots$$

Item

Item $\frac{aa}{x+b} = \frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3} - \&c.$

371. Detur $\sqrt{aa-xx}$ reducenda ad seriem infinitam; ea fiet . . .

$$a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{2048a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} - \&c.$$

Etenim radix quadrata termini primi aa est a ; subtracto aa ex quantitate data $aa-xx$, remanet $-xx$, quod cum dividi debeat per $2a$, erit terminus alter radicis $-\frac{xx}{2a}$, cujus quadratum $-\frac{x^4}{4a^2}$ una cum facto ejusdem $-\frac{xx}{a^2}$ in $2a$, five $-xx$, si subtrahatur a primo residuo $-xx$, remanet $-\frac{x^4}{4aa}$

hoc alterum residuum divisum per duplum radicis

adhuc inventæ $a - \frac{xx}{2a}$, hoc est, per $2a - \frac{xx}{a}$, dat tertium terminum radicis $-\frac{x^4}{8a^3}$, cujus factum in

$$2a - \frac{xx}{a^2} \left(\text{nempe } -\frac{2ax^4}{8a^3} + \frac{x^6}{8a^4}, \text{ five } -\frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^6}{8a^4} \right) \text{ una cum quadrato } \frac{x^8}{64a^5}, \text{ si subtrahatur}$$

ex secundo residuo $-\frac{x^4}{4a^2}$, relinquit $-\frac{x^6}{8a^4} . . .$

$\frac{x^8}{64a^6}$. Eadem radicem extrahendi methodus si
 continuetur, reliqui termini obvenient. Est exempli gratia $a=5, x=3$; erit $aa-xx=25-9=16$,
 $\& \sqrt{aa-xx}=4=5-\frac{9}{10}-\frac{81}{1000}-\frac{729}{50000}$ &c.

Pariter $\sqrt{aa+xx}$ abit in seriem $= a + \frac{xx}{2a} \dots$
 $-\frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c.

Item $\sqrt{aa+bx-xx}=a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} \dots$,
 $-\frac{bbxx}{8a^3}$, &c.

372. Ex his apparet, quod si semel habentur priores aliquot termini alicujus seriei per resolutionem reperti, non alia re opus sit, quam ut lex progressionis quæatur; hac quippe cognita, operosius resolutione omissa series continuari potest legem illam in terminis reliquis observando, modo sufficiens prius terminorum numerus inventus fuerit, ut lex progressionis non possit esse dubia.

Exemplum. Si consideretur series radicis quantitatis $aa-xx$, reperietur ea æqualis quantitati a plus progressionem Geometrica (cujus primus terminus $\frac{xx}{a}$, & quotiens communis $\frac{xx}{aa}$) in qua termini sin-

guli multiplicati sunt per singulos correspondentes seriei $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{26}, -\frac{5}{128}, -\frac{7}{256}$, &c. Illud
 igi-

igitur solum superest indagandum, ut reperiatur lex horum coefficientium, quæ est:

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1.1}{2.4}, -\frac{1.1.3}{2.4.6}, -\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}, -\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$$

&c. Sunt igitur numeratores series naturalis crescens numerorum imparium; & denominatores series naturalis crescens numerorum parium; in utraque multiplicantur termini duo, tres, quatuor &c simul; tandem fractiones inde ortæ reducuntur ad expressionem simplicissimam.

De summatione Serierum.

373. In seriebus quidem omnes operationes Arithmeticæ locum habent; at cæteris uti longe utilior, ita etiam difficilior est *Summatio*, hoc est reductio seriei totius datæ ad terminorum expressionem finitam, in qua plerumque consistit resolutio problematum, quæ series ingrediuntur. Neque illud admodum operosum est, ut complura problemata eo reducantur, ut oporteat summam seriei infinitæ invenire, quandoquidem solutio problematis a resolutione æquationis quæstionem continentis dependet.

374. Porro facile intelligitur, quod si series infinita semper divergat, ejus summa terminis finitis nequeat haberi; at vero si convergat, sæpe ejus summa finita est, ut deinceps videbimus.

Etsi autem materia præfens sit e præcipuis Analyseos partibus, nobis tamen non licet eam minutim discutere; sed satis erit, si methodum summandi eas series, quarum frequentior est usus, maxime vero, quæ nobis in Geometria erunt necessariae, tradiderimus.

375. Artificium summandi series quasvis in eo est, ut reperiatur methodus summandi paucas quasdam, quæ deinceps formularum instar sint, ad quas aliæ, nisi quid obstat, revocari possint, aut vero ut quæ illuc reduci per se nequeunt, resolvantur in plures alias, ad formulas illas revocabiles, quæ proinde, cum singularum summæ haberi possint, in unam totalem colligantur.

376. I. Exemplum. Si semel reperta sit formula summandi omnes terminos progressionis Geometricæ decrescentis in infinitum, poterunt omnes series summari, quæ resolvuntur in alias, quarum termini constituent progressionem Geometricam decrescentem.

Sit igitur $\therefore \frac{d}{b}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^4}, \dots$
 $\dots \frac{d}{bq^\infty}$ progressio infinita, cujus termini perpetuo decrescunt, crescente denominatore, si q sup-

ponatur unitate majus. At si scribatur $\therefore \frac{d}{bq^\infty} \dots$
 $\frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{b} 2$, habetur series crescens;

& si adhibeatur formula $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ (327), in qua

$$\omega = \frac{d}{b}, a = \frac{d}{bq^\infty}, \text{ erit } s = \frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}, \text{ \&}$$

neglecto termino infinite parvo $\frac{d}{bq^\infty}$, reductioneque facta, $s = \frac{dq}{bq - b}$ quæ consequenter erit formula sum.

summandi quamvis progressionem Geometricam in infinitum decrescentem.

377. Sit jam summanda series fractionum, quarum numeratores sint in progressionem Arithmetica, & denominatores in progressionem Geometrica, nempe

$$\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}, \&c. \text{ scribatur eadem}$$

$$\text{prius hoc modo: } \frac{a}{b}, \frac{b}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2},$$

$$\frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}, \&c. \text{ Dein facile eru-}$$

entur sequentes series, quæ omnes sunt progressionem Geometricæ.

$$\therefore \frac{a}{b}, \frac{a}{bq}, \frac{a}{bq^2}, \frac{a}{bq^3}, \&c \text{ summa} = \frac{aq}{bq-b}$$

$$\therefore \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \&c \text{ summa} = \frac{d}{bq-b}$$

$$\therefore \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \&c \text{ summa} = \frac{d}{bq^2-bq}$$

$$\therefore \frac{d}{bq^3}, \&c \text{ summa} = \frac{d}{bq^3-bq^2}$$

Jam vero patet, summas repertas (dempta prima) constituere sequentem progressionem Geometricam

∴

$$\therefore \frac{d}{bq-b}, \frac{d}{bq^2-bq}, \frac{d}{bq^3-bq^2} \&c, \text{ cujus summa est}$$

$$= \frac{dq}{bq^2-2bq+q}, \text{ cui si addatur summa primæ se-$$

$$\text{riei } \frac{aq}{bq-b}, \text{ habebitur } \frac{aqq-aq+dq}{bqq-2bq+b} \text{ summa tota-}$$

lis omnium serierum.

Unde eadem erit formula generalis summandi omnes series fractionum, in quibus numeratores sunt in progressionem Arithmetica, & denominatores in progressionem Geometrica.

378. *Observa.* Quodsi series infinita non possit revocari ad summam terminorum finitorum, illud agendum, ut reducatur ad talem formam, ut quam citissime convergat; dum enim series admodum cito convergit, sufficit summare aliquot e terminis prioribus, reliquis citra errorem sensibilem neglectis.

Sit exemplo $\sqrt{aa+xx}$, in qua quo quantitas x minor fuerit, quam a , eo citius converget series

$$a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} \&c, \text{ cum numeratores ad-}$$

modum fiant exigui respectu suorum denominatorum. Ponatur $a=10$, & $x=1$, erit $\sqrt{101}=10$

$$+ \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000} - \&c; \text{ est autem manife-}$$

stum, quartum terminum jam esse admodum exiguum, ideoque solos tres primos terminos exhibere radi-

cem numeri 101 veræ valde vicinam, nempe $10\frac{399}{8000}$.

379. Sit jam quærenda formula pro summandis quotcunque potentiis ordine crescentibus seriei numerorum naturalium. Quæ ut reperiatur, sequenti uti possumus ratiocinio.

Quoniam numeri ordine naturali progredientes semper differunt unitate, si sumantur quotcunque, dicanturque l, m, n, p, q, r , erit $r = q + 1$, $q = p + 1$, $p = n + 1$, $n = m + 1$, $m = l + 1$; quod si jam hi termini eleventur ad suas potentias successive altiores, fiet

$$\begin{array}{l|l} r^2 = q^2 + 2q + 1 & r^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\ q^2 = p^2 + 2p + 1 & q^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\ p^2 = n^2 + 2n + 1 & p^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ n^2 = m^2 + 2m + 1 & n^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\ m^2 = l^2 + 2l + 1 & m^3 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1 \end{array}$$

$$r^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1$$

$$q^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$

$$p^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$n^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$m^4 = l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1$$

colligantur singulae potentiae in singulas æquationes facta æqualium substitutione; habebitur

$$\begin{array}{l|l} r^2 = + 2q + 1 & r^3 = + 3q^2 + 3q + 1 \\ + 2p + 1 & + 3p^2 + 3p + 1 \\ + 2n + 1 & + 3n^2 + 3n + 1 \\ + 2m + 1 & + 3m^2 + 3m + 1 \\ l^2 + 2l + 1 & l^3 + 3l^2 + 3l + 1 \end{array}$$

Y

 r^4

$$\begin{array}{rcl}
 r^4 = & + & 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\
 & + & 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\
 & + & 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
 & + & 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\
 l^4 & + & 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1
 \end{array}$$

380. Ex singulis hisce æquationibus eruuntur singula Theoremata: Si dentur plures termini numerorum ordine naturali progredientium, I^o quadratum ultimi r^2 est æquale quadrato primi l^2 , plus dupla summa $q + p + n + m + l$ omnium terminorum ultimum præcedentium, plus $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ sive numero terminorum ultimum præcedentium, II^o Cubus ultimi termini r^3 est æqualis cubo primi l^3 plus tripla summa quadratorum omnium terminorum ultimum præcedentium, plus tripla summa omnium terminorum ultimum præcedentium, plus tot unitatibus, quot termini sunt ante ultimum. III^o Potentia quarta termini ultimi r^4 æqualis est potentie quartæ termini primi l^4 , plus quadrupla summa cuborum omnium terminorum ultimo anteriorum, plus sextupla summa quadratorum eorundem terminorum, plus quadrupla summa terminorum ultimum præcedentium, plus tot unitatibus, quot termini sunt ante ultimum. Similia pro aliis potentiis eadem ratione reperiuntur.

381. Hinc vero deducitur, quod si primus terminus dicatur a ultimus ω , numerus terminorum ante ultimum sit $\omega - a$: & si porro summa omnium horum terminorum dicatur f ; summa quadratorum eorundem f^2 ; summa cuborum f^3 ; fiet summa omnium terminorum ultimum præcedentium $= f - \omega$; summa quadratorum eorundem terminorum $= f^2 - \omega^2$, summa cuborum omnium horum terminorum $= f^3 - \omega^3$, &c; & Theorematis primi forma Algebraica erit $\omega^2 = a^2 + 2f - 2\omega + \omega - a$, seu reductione ad-

hi.

hibita $\omega^2 = a^2 - a + 2f - \omega$. Secundum Theorema ita exprimetur $\omega^3 = a^3 + 3f^2 - 3\omega^2 + 2f - 3\omega + \omega - a$, id est, $\omega^3 = a^3 - a + 3f^2 - 3\omega^2 + 3f - 2\omega$. Tertium denique $\omega^4 = a^4 + 4f^3 - 4\omega^3 + 6f^2 - 6\omega^2 + 4f - 4\omega + \omega - a$; seu $\omega^4 = a^4 - a + 4f^3 - 4\omega^3 + 6f^2 - 6\omega + 4f - 3\omega$. &c.

Ex prima formula invenitur $f = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$, qui valor si in secunda formula substituitur; fiet $\omega^3 = a^3 + 3f^2 - \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$, ex qua habetur $f^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$. Et si porro hic valor adhibeatur in tertia formula, ea mutabitur in hanc

$f^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2$.
 confimiles formulæ inveniri possunt pro potentiis altioribus,

382. Si terminus primus seriei sit 0 vel 1, fiet $f = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$; $f^2 = \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$; $f^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2$.

*De rationibus finitis, quas habent summæ infinitæ
 serierum infinitarum.*

383. Etsi plurium serierum summæ sint infinitæ, atque adeo terminis finitis exhiberi nequeant; in sequentibus tamen apparebit, id non obesse, quo minus magnus earum in Geometria sit usus, præcipue dum earum ratio vera cognoscitur.

Exempli causa constat, summam quadratorum omnium numerorum naturali serie progredientium esse æqualem tertiæ parti facti ex quadrato termini ultimi in numerum terminorum.

Etenim si series reipsa infinita sit, ultimus terminus progressionis naturalis est ∞ , adeoque hoc pro

ω in formula summæ quadratorum substituto habetur

$$f^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a,$$
 quæ reducitur ad $f^2 = \frac{1}{3}\omega^3$, quod omnes reliqui termini sint infinites minores, quam $\frac{1}{3}\omega^3$. Atqui quadratum ultimi ω^2 ductum in numerum terminorum per hypothesin ∞ , est ∞^3 , igitur summa omnium quadratorum est pars tertia hujus facti.

384. Simili calculo invenitur, summam infinitorum cuborum numerorum in serie naturali progredientium esse partem quartam facti ex cubo termini ultimi in terminorum numerum. Facta enim substitutione ∞ pro ω formula reddit ad hanc $f^3 = \frac{1}{4}\omega^4$. Et universim summa infinitarum potentiarum exponentem finitum m habentium

ex numeris serie naturali progredientibus est $\frac{1}{m+1}$

facti potentie ∞^m termini ultimi in numerum terminorum ∞ , seu $f^m = \frac{1}{m+1}\infty^{m+1} = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$; id,

quod etiam radicibus ejusdem exponentis numerorum serie naturali progredientium applicari potest. Nam si v. g. fumantur radices quadratæ, erit $m = \frac{1}{2}$

(173), & $m+1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$, & $\frac{1}{m+1} = \frac{2}{3}$, quare

summa radicum quadratarum terminorum infinitorum ordine naturali progredientium est æqualis duabus tertiis partibus facti ex radice quadrata termini ultimi ducta in terminorum numerum. Est enim

$\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$, hoc est, $\frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty$.



PARS SECUNDA.
ELEMENTA
GEOMETRIÆ.

385. **G**eometria est scientia quæ demonstrat proprietates quantitatis continuæ, seu extensæ.

Continui tres tantummodo sunt dimensiones, longitudo, latitudo, profunditas, seu crassitudo.

386. Quamvis nulla detur in rerum natura quantitas continua, quæ non habeat omnes hasce tres dimensiones simul; nihilominus quævis separatim, ut a reliquis non dependens; vel etiam binæ tantum, quin tertia cogitetur, spectari possunt. Atque hunc in modum expendi potest viæ alicujus longitudo, quin latitudo ejus in considerationem veniat; sic attentio figitur in planitie, quin de soli, quo constat, profunditate cogitetur.

387. Dimensio unica separatim considerata, *linea* appellatur; si duæ jungantur, *superficies* efficitur; tres simul sumtæ *corpus*, seu *solidum* constituunt.

388. Geometræ præterea punctum considerant, velut quantitatem, cujus dimensiones sint infinite parvæ, cui propterea nulla extensio finita tribui possit.

SECTIO PRIMA

De Lineis.

Genesis, & proprietates generales Linearum.

389. **L**ineam motu puncti generari concipere possumus. Si punctum moveatur, quin in ullam partem deflectat, ejus via est linea *recta*; sicubi deflectat a via cæpta, lineam *curvam* describit.

390. Cogitare licet, lineam a puncto describi progressionibus infinite parvis; jam vero in progressu infinite parvo nullus flexus concipi potest. Unde si hunc in modum genesis lineæ nobis proponamus, erit *linea recta finita series infinitarum rectarum infinite parvarum, quæ singulæ directe sint positæ sine ullo flexu, sine ulla inclinatione alterius ad alteram; & linea curva finita series rectarum infinitarum infinite parvarum, quarum aliæ alias positiones habent.*

391. Quoniam progressus isti, quibus lineam describi fingimus, sunt infinite parvi, quilibet eorum puncto describenti æqualis censi potest; hinc ipsa linea instar seriei punctorum erit; ex quibus manifestum sit

392. I. *Lineam rectam debere esse brevissimam, quæ inter duos terminos duci possit; ideoque eam esse veram mensuram distantie terminorum.*

393. II. *Lineæ rectæ unicam esse speciem; curvarum infinitas.*

394. III. *Puncta duo positione data sufficere, ut determinetur positio rectæ; sed pluribus opus esse, quam duobus, ut determinetur positio alicujus curvæ.*

Proprietates Linearum Rectarum.

POSTULATA.

395. I. *Assumitur, posse in plano duci lineas rectas versus omnem partem, nempe in tali superficie, cujus omnia puncta sint æquabilissime disposita, nec ullum infra aliud deprimatur, nec supra aliud emineat. Genesin talis plani Geometricam in sequentibus ostendemus (613).*

396. II. *Assumitur quoque, fieri posse, ut lineæ rectæ finitæ in plano descriptæ medium punctum determinetur. Qua ratione id Geometrice præstetur, paulo post docebimus (445).*

De proprietatibus Linearum rectarum ex positione unius respectu alterius.

397. *Concipiatur recta immota AB (quam fixam AB appellabo) descripta in plano immobili (Fig: 1); concipiatur etiam altera recta (quam dicam mobilem AB) priori æqualis, itaque supra priorem posita, ut eandem cum illa lineam efficiat. Sit punctum E medium hujus lineæ, circa quod ita circumagi cogitur recta mobilis AB, ut pars ejus EA descripta in eodem plano via AORB, perfecte congruat cum parte fixæ EB, dum interea pars altera mobilis EB percurra via BVZA exacte coincidit cum parte fixæ AE.*

His

His ita peractis linea mobilis descripsit figuram, cujus partibus variæ datæ sunt denominationes, quas in promptu habere oportet.

398. *Definitiones.* I. Figura tota a recta mobili descripta *circulus* vocatur; linea curva ARBYA figuram claudens, *circumferentia circuli* appellatur; & punctum E, circa quod ea circumferentia descripta est, *centrum*.

399. II. Partes quævis determinatæ circumferentiæ, ut NA, ANO, ORT, &c dicuntur *Arcus* circuli.

400. III. Linea AE, quæ motu suo circa E circumulum describit, est *radius* circuli; & universim radii sunt omnes rectæ ex centro circuli usque ad circumferentiam ductæ, velut EO, ER, EX, &c.

401. *Corollarium.* Hinc sequitur, omnes radios ejusdem circuli, vel æqualium circularum, esse æquales inter se: unde etiam circumulum sic definire licet, quod sit figura unica linea curva terminata, cujus omnia puncta æqualiter distant ab uno aliquo puncto intra figuram posito, quod centrum appellatur.

402. IV. Recta AB, quæ per centrum ducta circumulum in duas partes æquales dividit, dicitur *diameter circuli*, uti etiam omnes lineæ rectæ diametri sunt, quæ per centrum transeunt, & utrinque in peripheria terminantur, ut OB, PX, RZ, &c.

403. Circumferentia cujusvis circuli in 360 partes æquales dividitur, quæ *gradus* dicuntur; (115) gradus quilibet subdividitur in 60 partes æquales, quæ *minuta* appellantur; & quodvis minutum in 60 *secunda*, quodvis secundum in 60 *tertia* &c. Verum harum partium magnitudo absoluta non consideratur; uti mensurarum usitatarum alias, veluti ponderum, pedum &c; sed sunt quantitates proportionales magnitudi-

tionales magnitudini circuli sui; adeo, ut gradus unus circuli majoris possit esse major gradu uno minoris circuli.

404. Sed consideremus paulum ea; quæ accidunt per motum lineæ illi mobili; & clarum quidem est I, quod antequam ea moveri inciperet, fixam nusquam secuerit, nullam ad eam habuerit inclinationem; sed quod omnia ejus puncta exacte posita fuerint supra omnia puncta correspondentia fixæ.

405. II. Quod linea mobilis non potuerit circa punctum E converti, nisi omnia ejus puncta eodem tempore fuerint mota, idemque omnium numerus progressuum momentaneorum fuerit.

406. III. Quod quamprimum motus coepit, omnia lineæ mobilis puncta separata fuerint utraque ex parte a punctis correspondentibus fixæ, eorumque distantia tanto fuerit major, quantum quodvis remotius erat a puncto E, quod utrique lineæ commune fuit. Hinc igitur linea mobilis secuit fixam in puncto E, & partes ejus inclinatæ sunt ad partes fixæ. V. g. dum situs lineæ mobilis erat NET, nullam cum fixa amplius habuit partem communem, præter solum punctum E: punctum N longe magis distabat a puncto A, quam quodvis inter N & E, velut n , a quovis alio fixæ inter A, & E, uti a , licet totidem fuerint progressus momentanei puncti n , ut ex a in n perveniret, quot fuerunt puncti N, ut ex A in N transferretur. Idem est de puncto T respectu puncti B. Secuit igitur linea NET fixam in E, & ejus partes NE, ET inclinatæ fuerunt ad partes fixæ EA, EB. Notio igitur *inclinationis duarum rectarum* includit simul notionem earum interfectionis aut actualis, aut possibilis, siquidem producantur.

407. Recta inclinata ad alteram, aut secans al-

teram rectam, vel ei in extremo suo puncto occurrens, aut insistens, facit cum ea *angulum* ad punctum occursum; uti NE, AE *angulum* ad E efficiunt.

408. *Angulus* exprimit, quantum una linea ab altera, cui una ex parte occurrit, recedat: ut *angulus* tanto sit major, quanto magis eæ lineæ a sese recedunt.

409. Evidens porro est, mensuram hujus linearum recessus esse numerum progressuum, quo quodvis lineæ mobilis punctum a puncto correspondente lineæ fixæ remotum est: si enim punctum A lineæ mobilis bis tot progressus habuit, ut ex A veniret in P, ac habuerit, ut ex A transiret in N, liquet sane, punctum A in P translatum duplo magis recessisse a linea fixa, quam cum in N esset, ideoque *angulum* AEP esse duplum anguli AEN. Pariter est manifestum, totidem fuisse progressus puncti a lineæ mobilis usque in p vel n, ac fuerint puncti A usque in P, vel N; atque hinc esse duplo plures progressus ejusdem puncti a usque in p, quam usque in n; lineamque EP duplo magis recedere a linea AE, quam lineam EN. Hinc autem eruitur . . .

410. Theorema I. *Mensura anguli rectilinei est arcus circuli cujusvis interceptus inter lineas angulum comprehendentes, cujus centrum est in vertice anguli.* Sic cum dicimus, *angulum* esse 20 graduum, significamus, *anguli* mensuram esse arcum circuli 20 graduum.

411. Theorema II. *Omnes anguli, quos metiuntur arcus ejusdem numeri graduum, sunt inter se æquales; & vicissim omnes arcus ex vertice descripti, & ab eodem vel æqualibus angulis intercepti, eundem numerum graduum habent.*

412. Theorema III. *Data magnitudine anguli, datus arcus ex anguli vertice descriptus, & inter ejus crura inter-*

terceptus; & vicissim: dato numero graduum arcus ex anguli vertice tanquam centro descripti, & ejus lateribus comprehensi, datur magnitudo anguli.

413. Sed resumamus paulo attentius motum illum circulem lineæ mobilis circa fixam: apparebit sane, eam lineam obtinere successive omnes omnino positiones possibiles respectu fixæ; adeoque cum eadem facere successive omnes angulos, quotquot esse possunt.

Quamdiu linea mobilis magis vergit versus partem AE, a qua primo recessit, quam versus partem oppositam fixæ EB, omnes anguli, ut AEN, AEO &c, qui ea ex parte fiunt, sunt *acuti*,

414. Quando linea mobilis acquirit situm PE, quo nec magis versus AE, quam versus EB inclinatur, anguli sunt recti AEP, PEB.

415. Recta cum altera recta faciens angulum rectum, eidem est *perpendicularis*, uti PE rectis AE, & EB, sive etiam toti AB: & vicissim rectæ EA, EB, vel tota AB, sunt perpendiculares ad EP.

416. Anguli AEQ, AER &c hisque similes, dicuntur *obtusi*, quando linea mobilis jam magis inclinatur versus partem fixæ EB, quam versus AE, a qua digressa est. Hæc omnia locum habent in linea mobili EB, alterum semicirculum BVZA describente.

417. Theorema IV. *Quivis angulus acutus minor est quovis recto vel obtuso; & quivis rectus minor est quovis obtuso.*

418. Theorema V. *Angulorum acutorum, & obtusorum infinitæ sunt species; anguli recti unica.*

419. Theorema VI. *Anguli recti sunt omnes inter se æquales; utpote qui comprehenduntur a duabus rectis,*

quæ in concursu suo non magis in unam, quam in alteram partem propendunt.

420. Corollarium I. *Mensura duorum angulorum rectorum est semicircumferentia circuli; ideoque mensura unius recti est arcus 90 graduum.*

421. Corollarium II. *Anguli acuti mensura est arcus minor 90 gradibus; sed anguli obtusi mensura est arcus 90 gradibus major (417).*

422. Theorema VII. *Per idem in eadem recta punctum non potest in eodem plano nisi unica perpendicularis duci. Unicus enim locus esse potest, in quo recta mobilis non magis inclinetur versus partem fixæ EA, quam versus EB.*

423. Theorema VIII. *Tota circuli circumferentia quatuor angulos rectos tantummodo metitur; tota enim circumferentia APBXA exhauritur ab arcubus metientibus rectos AEP, PEB, BEX, XEA; seu quater 90° accurate efficiunt 360°.*

424. Corollarium. *Igitur summa omnium angulorum, qui possunt ad idem punctum E fieri, non potest excedere 360°, seu quatuor rectos.*

425. Theorema IX. *Recta quævis OE incidens in aliam rectam AB, facit cum eadem duos angulos AEO, OEB, quorum summa est 180°, seu duo recti. Arcus enim ANO, ORB, metientes eos angulos, efficiunt simul semiperipheriam circuli AORB.*

426. Corollarium. *Quotcunque rectæ FE, NE, OE, PE, QE, RE, ME, terminentur ad idem punctum E rectæ AB, efficiunt angulos, quorum summa est 180°.*

427. *Angulus deinceps positus, vel angulus complementi ad duos rectos, vel angulus supplementi, est ille, qui cum altero facit 180°; talis est OEB respectu OEA, vel OEA respectu OEB. Angulus complementi ad re-*

ctum

Sum, vel *complementi* dicitur, qui alteri additus efficit 90° , qualis est PEO respectu OEA .

428. Theorema X. *Ex quatuor angulis, qui sunt a duabus rectis AB, OV se interfecantibus in E, nempe AEO, OEB, BEV, VEA, bini quivis ad verticem oppositi sunt inter se æquales; ut $OEB = VEA$, & $AEO = BEV$.*

Demonstratio. Etenim pars EA lineæ mobilis AB nequit moveri versus O , nisi tantundem moveatur pars EB versus V : igitur EA tot progressus momentaneos habuit, donec pertingeret ad situm EO , quot EB , ut obtineret positionem ET ; adeoque arcus AO tot habet gradus, quot arcus BV : igitur angulus $AEO = BEV$. Eodem modo demonstratur esse $OEB = VEA$.

Corollarium. Dato uno angulo e quatuor, quos efficiunt duæ rectæ se mutuo secantes, etiam reliqui tres dantur.

De Proprietatibus Linearum rectarum ex positione unius respectu duarum, vel plurium aliarum, quin spatium claudant.

429. Cogitetur jam recta CD (Fig. 2) ita sita respectu lineæ immobilis AB , ut undique ab ea æqualiter distet, veluti si ipsa recta AB ita translata esset ex AB in CD , ut ejus pars IC nuspiam magis propenderet versus AE , quam pars ID versus EB . Hæc si ita sint, recta CD dicitur *parallela* alteri AB , atque manifestum est, has rectas nullo modo ad sese inclinari, nec posse alteram ab altera secari, utcunque productæ intelligantur. Concipiatur dein, uti prius, recta mobilis AB circa punctum medium E circumagi, apparebit liquido

430. I. Quamdiu recta mobilis congruit cum fi-
xa

xa AB, eam non posse occurrere alicubi rectæ CD, quoniam tum utraque eandem constituit lineam ad CD parallelam.

431. II. At quam primum mobilis AB circa punctum E motum utcumque exiguum conceperit, ea occurret rectæ CD, eamque sufficienter productam secabit; tum enim pars alterutra lineæ mobilis AB versus CD inclinata est, & quodvis punctum illius partis tanto propius accessit ad CD, quanto longius a puncto E abest (406).

432. III. Quemadmodum linea mobilis omnes successive inclinationis gradus acquirit respectu fixæ AB; ita per eosdem inclinationis gradus successive transit respectu parallelæ CD, atque eosdem cum ea facit angulos, quos facit cum fixa AB. Supponamus enim mobilem venisse ad positionem NT: quoniam recta CD ideo parallela est ad AB, quia ponebatur ex situ AB (in quo cum recta NT faciebat angulum AEN) ita translata in situm CD, ut nullam prorsus inclinationem ad AB acquireret, evidens est, quod manentibus immotis rectis NT & AB, recta CD non aliam acquirere potuerit inclinationem ad NT, nisi quam habuit in situ AB; & quod consequenter angulus CGN, qui ejus inclinationem cum NT metitur, sit æqualis angulo AEN. Ex eadem ratione anguli TEB, EGD sunt inter se æquales: uti & AET, CGE, NGD, NEB; anguli vero acuti sunt complementa ad duos rectos obtusorum, & vicissim obtusi acutorum.

Angulus TEB dicitur *alternus externus* respectu anguli CGN, uti etiam TEA respectu NGD. Et angulus AEG vocatur *alternus internus* anguli EGD, quemadmodum GER anguli EGC.

Idem

Idem eodem modo demonstratur de rectis omnibus NT, OV &c respectu AB & CD.

Ut penitus discutiatur, si quid obscuri huic demonstrationi inhæreat, considerandum est, quid in infinito eveniat. Et certe cum rectas ita spectemus in præsens, velut quæ spatium non concludant, infinite protensæ repræsentandæ sunt, ut proprietates inde erutæ lineis cujusvis longitudinis aptari possint.

Manifestum est, duas rectas fixas AB, NT, ad sese sub dato quovis angulo AEN, vel TEB inclinatas, a se magis semper recedere, ut magis semper producantur, ita, ut lex discessus binorum quorumvis punctorum correspondentium, velut A, N, in quacunque ab intersectione E distantia sumantur, nunquam mutetur. Hinc sequitur, rationem metiendi angulum TEB eandem debere esse tam in infinito, quam in finito, hoc est, seu ejus mensura a vertice E ad distantiam infinitam, seu ad finitam accipitur. Quare duo anguli in finito æquales, seu quorum mensuræ non nisi quantitate infinite parva differunt, debent etiam in infinito esse æquales, & eorum mensura nequit differre, nisi quantitate finita. Item duo anguli in finito inæquales, sive quorum mensura differt quantitate finita, manent in infinito quoque inæquales, & eorum mensura differt quantitate infinita; ac vicissim.

His positis, si duæ rectæ fixæ sint inter se parallelæ, atque altera ab altera habeat distantiam finitam, in infinito censendæ sunt tota sua longitudine ita congruere, ut unam, eandemque rectam efficiant, quippe mutua punctorum omnium correspondentium distantia finita, & ubivis æquali, respectu harum rectarum infinitæ extensionis evanescente. Sic dum mobilis infinita AB circa punctum E super infinita fixa AB rotatur, censenda est rotari super una, eademque recta composita e binis parallelis AB, CD, quarum altera alteri incumbat: & quoniam puncta intersectionum E, G finite distant inter se, putanda sunt in E congruere, angulusque TEB cum angulo TGD. Et reapse mensura anguli TEB accepta in infinito, seu arcus TB infinite a puncto E distans, non differt a mensura anguli TGD itidem ad distantiam infinitam accepta, nisi ea quantitate, qua discrepat arcus TB, cujus centrum in E, ab-

arcu TD, cujus centrum G. Jam vero cum tam puncta G & E, quam puncta B & D inter se distantiam finitam habeant, differentia, quæ est in mensura angulorum TEB, TGD ad distantiam infinitam accepta, nequit esse, nisi finita: quare etiam anguli TEB, TGD in finito non possunt nisi infinite parum differre, ideoque in finito æquales habendi sunt.

433. Theorema I. *Si recta quævis EG secat parallelas AB, CD, erunt primo anguli alterni interni inter se æquales; 2do æquabuntur quoque anguli alterni externi; 3tio duo anguli interni BEG, EGD erunt alter alterius complementum ad duos rectos; quarto duo anguli externi TEB, DGN itidem sese mutuo complebunt ad duos rectos; Et vicissim si recta incidens in duas alias rectas faciat vel angulos alternos internos, vel alternos externos inter se æquales, vel duos externos ad eandem partem simul æquales duobus rectis; vel duos internos ad eandem partem simul æquales duobus rectis; eæ lineæ duæ, in quas altera incidit, erunt parallelæ inter se. Nihil enim horum contingere potest, nisi hæ duæ lineæ BE, DG nullam inclinationem ad sese habeant.*

434. *Observa.* Quod adhuc dictum est de binis parallelis, intelligendum est de quocunque. Quas enim proprietates habet prima respectu secundæ, eandem habet secunda respectu tertiæ, tertia respectu quartæ, & sic deinceps, ut adeo eadem conveniant omnibus.

435. IV. Illud præterea, linea mobili motum suum circa E peragente, manifestum est, puncta intersectionis illius cum recta CD, nempe F, G, H, tanto fore viciniora puncto E, quanto linea mobilis propius ad situm perpendicularem respectu fixæ AE accesserit; ita, ut punctum I, in quo intersectio fit ad angulos rectos, sit omnium vicinissimum. At ubi moveri pergit, magis semper intersectionum puncta ab E re-

E recedent, quo mobilis magis versus EB inclinatur.

436. V. Itaque quando linea mobilis in situ ER tantundem inclinatur ad fixam EB, quantum in situ EN inclinabatur ad EA, five quod idem est, quando anguli AEN, BER, vel NEP, REP sunt æquales; puncta intersectionum G, L, æqualiter distant a punctis E & I, hoc est $GI = IL$, & $GE = LE$.

Ut hujus rei veritas evidens fiat, concipiatur in figura secunda pars sinistra ita imponi parti dextræ, ut tota figura secundum longitudinem perpendicularis EP velut complicata sit: tunc enim fieri necesse est, ut AE cadat supra EB, IC supra ID, arcus AN supra æqualem BR, & NP supra PR: quare radius NE exacte congruet cum radio ER, & punctum G cum puncto L; consequenter $GE = LE$, & $GI = IL$.

437. Theorema II. Perpendicularis EI ex quovis puncto E ad rectam CD ducta est omnium linearum brevissima, quæ ex eodem puncto ad eandem rectam duci possunt. Et vicissim, si recta EI est brevissima omnium, quæ ex puncto E ad rectam datam CD duci possunt, est perpendicularis ad eandem. Quod si enim aliquam inclinationem haberet, posset duci perpendicularis, quæ foret brevior.

438. Corollarium. Per perpendicularem itaque recte metimur distantiam puncti a Linea.

439. Theorema III. Ex puncto quovis E extra rectam CD dato, non nisi unica perpendicularis ad eam rectam duci potest. Non enim datur nisi unicum punctum I in recta, quod puncto E sit vicinissimum; & non nisi unicus situs lineæ mobilis, in quo non magis versus unam, quam versus alteram partem inclinetur.

440. Theorema IV. Recta quævis EI est perpendicularis ad alteram CD, si duo ejus puncta, v. g. E, I, æqua-

liter distant a duobus punctis G, L alterius utrinque acceptis, hoc est, si $EG = EL$, & $IG = IL$; tunc enim evidens est, ea duo puncta E & I non magis versus G, quam versus L vergere; & quoniam ad determinandum situm rectæ duo puncta sufficiunt (394), tota recta EI non versus G magis inclinatur, quam versus L.

441. Theorema V. *Si duo puncta G & L rectæ æqualiter distent a puncto ejusdem I, in quo ab altera secatur perpendiculariter, omnia puncta perpendicularis EI æqualiter distant a punctis G & L.* Quod si enim in perpendiculari daretur punctum aliquod, quod inæqualem haberet distantiam a punctis G & L, ipsa perpendicularis in eo puncto magis inclinaretur versus partem distantiae minoris, ideoque nec foret perpendicularis.

His proprietatibus rite intellectis, facilis erit sequentium problematum resolutio.

442. Problema I. *Per datum punctum C (fig: 3) extra rectam datam AB ducere parallelam.*

Resolutio. Circino ad arbitrium aperto, & uno crure fixo in C, describatur altero arcus quivis EK; dein posito altero crure in E describatur eadem apertura arcus CF, occurrens rectæ AB in F: accipiat Circino arcus CF, & transferatur in arcum EK ex E in I; ducatur per datum punctum C, & per inventum I recta CID: erit hæc ad AC parallela.

Demonstratio. Nam si ducatur recta CE, ob arcus EI, CF æquales, erunt anguli CEF, ECI æquales (411); igitur recta EC secat rectas AB, CD ita, ut anguli alterni interni sint æquales; ergo (434) rectæ CD, AB sunt parallelæ.

443. Problema II. *Ex dato in recta CD (fig: 4) puncto I erigere perpendicularem.*

Resolutio. Accipiantur circino in recta CD puncta H & K ad arbitrium, utrinque a dato I æqualiter distantia: Ex punctis H & K tanquam centris describantur eadem (majore tamen, quam IH) circini apertura duo arcus OER, AEB sese interfecantes in E: ducatur EI, erit ea ad CD perpendicularis.

Demonstratio. Nam evidens est, si ducantur radii HE, KE, eos fore æquales, quod eadem fuerit apertura circini, dum arcus descripti sunt; præterea ex constructione est $HI = IK$; ergo EI est recta, cujus duo puncta E, I æqualiter distant a duobus punctis H, K rectæ CD: quare (440) EI est ad CD perpendicularis.

444. Problema III. Ex dato extra rectam CD (fig: 5) puncto E, demittere ad eandem perpendicularem EG.

Resolutio. Fixo circini crure uno in dato puncto E, notentur altero duo alia H & K in recta CD, quæ æqualiter distent ab E: tum centris H & K describantur duo arcus arbitraria, sed eadem circini apertura, qui se interfecent in G; jungatur denique G cum puncto dato E recta EG.

Demonstratio. Ductis radiis HG, KG, item HE, KE, eodem modo, quo superius (443) patet, puncta G, E æqualiter distare a punctis K, H rectæ datæ CD, ideoque ad hanc esse GE perpendicularem.

445. Problema IV. Rectam datam HK (Fig: 6) scindere in duas partes æquales HI, IK.

Resolutio. Ex extremis punctis H & K tanquam centris describantur eadem circini apertura utrinque bini arcus se se interfecantes in G, & E: jungantur intersectionum puncta recta EG, quæ datam HK dividet bifariam in I.

Demonstratio. Est enim manifestum, puncta E & G esse æqualiter distita ab extremis datæ HK, adeo-

oque (441) etiam reliqua omnia hujus rectæ E G puncta æqualiter distare ab iisdem extremis, consequenter etiam punctum I.

DE NONNULLIS PROPRIETATIBUS LINEARUM RECTARUM RESPECTU CIRCULI.

446. **R**ecta FM (Fig: 2 vel 7) utrinque in circumferentia circuli terminata, dicitur *chorda*, vel *subtensa*. Sic dicimus, arcus FPM chordam, vel subtensam esse FM; item Chorda IK (Fig: 7) subtendit arcum IPK; hoc est, terminatur ad extrema arcus IPK puncta.

447. Portio circuli intra arcum & ejus chordam comprehensa, velut FPONF (fig: 2), dicitur *segmentum* circuli: & portio PEO, vel AEF, inter arcum & duos radios contenta, vocatur *sector* circuli.

448. Theorema I. *Recta EP ex centro circuli E ad chordam FM perpendicularis, dividit chordam bisariam.*

Demonstratio. Quoniam recta EP ex centro circuli ducitur, ejus punctum E æqualiter distat ab extremis chordæ F & M; & quoniam præterea est ad chordam perpendicularis, omnia ejus puncta (441) ab iisdem extremis F, M æqualiter distant; est igitur etiam punctum I tantundem remotum ab F, quantum ab M, adeoque $FI = IM$.

449. Theorema II. *E converso recta quævis EP transiens per centrum circuli, & chordam bisariam secans, est ad chordam perpendicularis.*

Demonstratio. Quoniam EP secat chordam in duas partes æquales, habet aliquod punctum I æquali-

liter ab extremis chordæ F & M remotum, & quia præterea transit per centrum E , habet etiam alterum punctum E æqualiter ab iisdem extremis remotum; igitur EP est recta, cujus duo puncta I & E easdem habent distantias a duobus punctis chordæ F & M , nempe F & M ; igitur EP est ad FM perpendicularis (440).

450. Theorema III. *Item si recta EP secat chordam FM bifariam, & perpendiculariter, ea transit per centrum circuli.*

Demonstratio. Cum enim EP lecet chordam bifariam, habet aliquod punctum I , æqualiter ab extremis F , M chordæ FM distans; & quia præterea est ad chordam perpendicularis, omnia ejus puncta transeunt per puncta æqualiter ab iisdem extremis distantia (441); atqui centrum E est unum e punctis æqualiter distantibus ab extremis chordæ F & M (401); est igitur centrum ex illis punctis, per quæ transit perpendicularis EP .

451. *Hypothesis.* Si supponatur chorda F M ita moveri per circumferentiam sui circuli, ut ejus extrema puncta F , M semper sint in circumferentia, primo hæc chorda ubique subtendat arcum æqualem. secundo habebit ubique eandem a centro distantiam. Etenim spectato hoc motu concipere licet, totam figuram FEM (Fig. 2) circa centrum E moveri, ut radii EF , EM semper sequantur chordam FM ; atque hinc angulus FEM idem semper manebit, ejusque mensura arcus æqualis cum arcu FPM . Eodem modo evidens est, lineam EI perpetuo manere eandem, dum motus hic peragitur. Unde sequitur ..

452. Theorema IV. *In eodem, vel æqualibus circulis chordæ æquales subtendunt arcus æquales; chordæ vero inæ-*

inæquales subtendunt etiam arcus inæquales. Item chordæ æquales in eodem vel æqualibus circulis a centro æqualiter distant; chordæ inæquales inæqualiter. Chorda enim æqualis in peripheria circuli circumlata semper congruit cum chordis æqualibus, immo nec potest cum inæqualibus congruere.

453. Theorema V. *In eodem, vel æqualibus circulis si arcus sunt majores, a majoribus; si minores, a minoribus chordis subtenduntur; & chordæ minores magis, majores minus distant a centro. Et vicissim chordæ, quæ magis distant a centro, minores sunt; quæ minus, majores: item si chordæ sunt majores, etiam arcus subtenfi sunt majores, & ex opposito.*

454. Theorema VI. *Si recta EP (fig: 2) per centrum E ducta bisecat chordam FM, etiam arcum FPM, quem chorda subtendit, bisecat, & angulum FEM, quem is arcus metitur.*

Demonstratio. Etenim hæc recta est ad chordam perpendicularis (449) & omnia ejus puncta æqualiter distant ab extremis chordæ F, & M; igitur etiam punctum P æqualiter distat ab F & M. Et hinc si ducantur PM, PF, erunt eæ chordæ æquales, & consequenter (452) arcus PRM = PNF, angulus que FEM sectus est in partes æquales radio EP.

455. Theorema VII. *Chorda FM diametro AB parallela abscindit utrinque arcus æquales AF, BM.*

Demonstratio. Si ex centro E erigatur ad AB perpendicularis EP, eadem erit perpendicularis ad chordam FM (433), consequenter (448) secabit chordam bifariam, eritque arcus ANP = PRB, FNP = MRP; & hinc (17) ablatis æqualibus FNP, MRP ab æqualibus ANP, BRP, remanebunt arcus æquales AF, BM.

456. Corollarium I. *Duæ parallelæ CD, GH (fig. 7 & 8) in peripheria circuli intercipiunt arcus æquales FI, KM. Ducta enim per centrum E diametro AB ad GH, CD parallela, habetur $AF = BM$, & $AI = BK$: igitur (fig: 7) $AI - AF = KB - BM$, vel $FI = KM$; & (fig: 8) $AI + AF = KB + BM$, seu $FI = KM$.*

457. Corollarium II. Si supponatur recta GH (fig. 7) ita recedere a centro, ut sibi ipsi, vel rectæ CD , semper maneat parallela, donec acquirat situm gh , in quo circumferentiam circuli solummodo tangat in P , neque intra circulum sit amplius, nisi parte infinite parva, evidens est, adhuc fore $PM = PF$. Quo enim recta GH longius a centro recedit, eo puncta I, K (in quibus secat peripheriam,) propius ad se accedunt, & tandem coincidunt cum P , in quo tum ea recta peripheriam circuli tangit.

458. Recta quæ ita occurrit circulo, ut quomodocunque producta eum nuspiam secet, nec intra peripheriam ingrediatur, dicitur *tangens*; & punctum, in quo circulum tangit, dicitur *punctum contactus*.

459. Theorema VIII. *Radius EP ad punctum contactus P ductus, est tangenti gh perpendicularis.*

Demonstratio. Quoniam recta gh ita transit per punctum P , ut circulum nullibi secet, radius EP metitur minimam distantiam hujus lineæ a centro E ; igitur (437) est ad eandem perpendicularis.

460. Corollarium. *Recta, quæ circulum tangit, eum tangit in unico puncto.* Nam ex centro E non nisi unica perpendicularis (439) ad gh demitti potest.

461. Theorema IX. *E converso recta gh ad extremitatem P radii EP perpendicularis, tangit circulum in hoc unico puncto P.*

Demonstratio. Cum EP ponatur ad gh perpendiculari-

cu-

cularis; hic radius metitur minimam distantiam centri E a recta gh ; igitur omnia reliqua puncta hujus rectæ majorem habent distantiam a centro, quam P ; consequenter sunt extra circulum, & solum punctum P est in ejus circumferentia,

462. Corollarium I. *Expedite itaque duci potest tangens circuli in dato puncto P , si nempe ducatur ex centro per datum punctum P recta EPN , & ad hanc perpendicularis in P , nempe gh .*

463. Coroll. II. *Et hinc unica tantum potest duci tangens ad idem punctum circumferentiæ (422), seu, quod idem est, si per punctum contactus ducatur alia recta, ea vel congruet cum tangente, vel secabit circulum. Itaque nulla alia recta inter circumferentiam, & tangentem, transire potest,*

464. Scholium. Solebant veteres Geometræ tanquam paradoxum demonstrare, quod quamvis nulla linea recta inter tangentem & circuli peripheriam transire possit, quin eam secet, nihilo minus tamen, infiniti possent describi circuli (fig. 31) quos omnes tangeret eadem recta in E , quin vel hanc, vel alter alterius circumferentiam secarent. Etenim punctum contactus E spectari potest tanquam extremum infinitorum radiorum CE , FE , BE , DE &c, qui omnes sunt perpendiculares ad AE . Verum hoc quomodo intelligendum sit, en paucis.

Cum circulus sit (542) polygonum infinitorum laterum infinite parvorum, omnes circuli sunt polygoni similia, & ejusdem speciei, quorum illud majus est, cujus latera infinite parva majora sunt lateribus infinite parvis alterius; quemadmodum e duobus hexagonis regularibus illud majus est, cujus latera majora sunt lateribus alterius, & ex opposito. Est autem tangens circuli, immo curvæ cujuscunque, nihil aliud, quam productio finita lateris infinite parvi curvæ: ex quo porro sequitur, si latus ejusmodi infinite parvum curvæ spectetur ut punctum, (391); proprietatem communem omnibus curvarum quarumlibet tangentibus esse, ut curvam non nisi in puncto tangent.

His positis, dum per punctum E describuntur quorunque circuli, latus infinite parvum E fit iis omnibus commune, seu

seu omnium horum circularum latera infinite parva cum E coincidunt, quemadmodum in (fig 32,) si latus KEL hexagoni utrinque producatur, fieri potest latus commune plurium hexagonorum majorum regularium: Sic quoque in fig: 31 punctum E commune omnibus circulis, est latus infinite parvum, quod eo semper fit majus, quo majore radio per illud circulus describitur; interim tamen in se manet punctum, cum semper maneat infinite parvum, quamdiu radius circuli non sit infinite magnus.

465. Theorema X. *Angulus BAD* (fig. 9) *ad punctum contactus A inter tangentem BA, & chordam AD comprehensus, habet mensuram dimidium arcum AFD, quem chorda AD subtendit.*

Demonstratio. Ductis enim per centrum C diametro EG ad AD parallela, & diametro Ff ad eandem chordam AD perpendiculari, nec non radio CA ad punctum contactus, patet, angulos (459) BAC, & FCG esse rectos, quorum consequenter communis mensura est arcus FG. Pariter manifestum est, angulo BAD ad rectum deesse angulum DAC, vel huic æqualem ACG (433); est autem mensura anguli ACG arcus AG; quare mensuræ anguli BAD, quominus sit arcus FG, deest arcus idem AG: est igitur anguli BAD arcus AF, dimidius arcus AFD, (454), mensura.

Eadem omnino demonstratione, modo pro B & F substituantur literæ *b* & *f*, ostenditur, mensuram anguli *b* AD esse $\frac{1}{2}$ A f D.

466. Theorema XI. *Angulus CAD* (Fig: 10) *ad peripheriam circuli habet mensuram dimidium arcus CD, quem ejus crura AC, AD intercipiunt.*

Demonstratio. Ducatur per verticem anguli A tangens EB (462) erit summa trium angulorum BAC + CAD + DAE = 180° (462) = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA: est vero mensura anguli BAC = $\frac{1}{2}$ AC, & mensura anguli EAD = $\frac{1}{2}$ AD; igitur anguli CAD mensura esse debet dimidius arcus residuus CD.

467. Corollarium I. *Angulus DFC ad centrum circuli est duplus anguli DAC ad circumferentiam, & eidem arcui insistentis.*

468. Corollarium II. *Si angulus ad peripheriam est rectus, ejus basis est circuli diameter, & latera angulum rectum comprehendentia subtendunt simul semicircumferentiam. Si angulus est acutus, chorda, cui insitit, subtendit arcum minorem semicirculo, ipse vero existit in segmento semicirculo majore. Et angulus obtusus itidem insitit chordæ minori, quam sit diameter, & existit in segmento semicirculo minore.*

469. Corollarium III. *Omnes anguli FNM, FPM, FRM &c (fig: 8) qui sunt in eodem segmento, & quorum latera terminantur ad eadem circumferentiæ puncta F & M, sunt inter se æquales.*

470. Theorema XII. *Anguli BAD (fig: 11 & 12) intra, vel extra circumulum, mensura est $\frac{1}{2}BD \pm \frac{1}{2}CE$; signo + adhibito pro angulo intra circumulum; — pro angulo extra circumulum.*

Demonstratio. Ducatur per E ad AD parallela FE; erit angulus BEF = BAD. Est autem mensura anguli BEF arcus $\frac{1}{2}BF$; & $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD \pm \frac{1}{2}DF$; sed (456) $DF = CE$. igitur $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD \pm \frac{1}{2}CE$.

471. Corollarium I. *Angulus BAD (fig: 12) inter tangentem Ab, & secantem AD comprehensus habet mensuram $\frac{1}{2}Db - \frac{1}{2}bC$. Nam si recta AB moveatur circa punctum A, donec circumulum in b tangat, puncta E & B semper propius accedunt ad b, & tandem cum eo congruunt.*

Corollarium II. *Ex eadem ratione anguli dAb inter duas tangentes Ad, Ab comprehensi mensura est $\frac{1}{2}dFb - \frac{1}{2}dCb$.*

472. Scholium. *Ex tribus præcedentibus Theorematis, eorumque corollariis sequens Theorema Generale deducitur: angulus, ubicunque sit ejus vertex, datur, si ejus latera, producta, si opus sit, secant, vel tangant circumferentiam circuli cujuscunque in punctis datis.*

473. Theorema XIII. *Si in circulo e quatuor chordis efformetur quadrilineum, factum duarum diagonalium est æqualis summæ binorum productorum e lateribus duobus in duo latera opposita.*

Demonstratio. Ducatur BC (fig 38) ita, ut angulus BCF sit æqualis angulo DCA; aut, quod idem est, recta CA faciat angulum ACF æqualem DCB. Jam ob æquales ABC, CDA (469) triangula DAC, BCF similia sunt, ideoque DC:

$$AD = BC : BF = \frac{AD \times BC}{DC} \quad (320). \text{ Similiter quia } ACF =$$

BCD, & CDB = CAB, similia sunt triangula DBC, AFC, &

$$DC : AC :: BD : AF = \frac{BD \times AC}{DC}. \text{ Additis his duabus æquati-$$

$$\text{onibus habetur } BF + AF, \text{ seu } AB = \frac{AD \times BC + BD \times AC}{DC},$$

$$\text{ \& hinc } DC \times AB = AD \times BC + BD \times AC.$$

474. Problema I. *Arcum datum in duas partes æquales dividere.*

Resolutio. Cogitetur chorda arcum datum subtendens, & secetur ea per lineam (445) perpendicularem bifariam; dividetur etiam arcus (454) in partes duas æquales.

475. Problema II. *Angulum datum bisecare.*

Resolutio. Circini crure in anguli vertice posito, describatur altero, quavis apertura, arcus utrinque ad crura terminatus: hic bisecetur (474); recta punctum bisectionis cum vertice jungens dividet angulum in duas partes æquales.

476. *Observa.* Per hæc duo problemata licebit arcum quemvis, vel angulum in partes 2, 4, 8, 16, 32, &c æquales secare, qui numeri constituunt progressionem Geometricam in ratione dupla; at nondum inventa est anguli sectio in tres partes æquales ope solius circini, & regulæ, quod est celebre illud problema, cujus resolutionem veteres tanto studio quænaverunt, *trisectionis anguli*. Minus adhuc licet per solam Geo-

metriam elementarem angulum dividere in 5, 6, 7, 9, &c partes æquales; demonstratur enim in Analyfi, arcum circuli dividere in 3, 4, 5 &c partes æquales, esse problema 3, 4, 5ti &c gradus; neque etiam fieri posset per Geometriam elementarem, ut arcus dividatur in 4 partes æquales, nisi hoc problema quarti gradus esset ex illis, quæ possunt ad secundum reduci; uti etiam dividere arcum in 8 partes æquales est problema octavi gradus, quod per extractionem radice quadratæ quantitatis incognitæ reduci potest ad gradum quartum, tum nova extractione radice ad gradum secundum, & sic deinceps.

477. Problema III. *Per data tria puncta describere circum.*

Resolutio. Illud liquet, Problema esse impossibile, si tria puncta jaceant in eadem recta. Alias conjungantur hæc puncta per duas rectas, quæ erunt duæ chordæ circuli petiti. Quare dividatur utraque bifariam (445), & ex punctis bisectionis erigantur perpendiculares, quæ ambæ per centrum transire debent (450), quod adeo in earum intersectione ut sit, necesse est.

478. Problema IV. *Circuli, vel arcus dati invenire centrum.*

Resolutio. Ducantur ad arbitrium duæ chordæ in circulo, vel arcu dato, & quærat (477) centrum, ut Problemate præcedente.

479. Problema V. *Arcum circuli datum comple-*

re. *Resolutio.* Fiet, si arcus dati centrum reperiat (478).

PROPRIETATES LINEARUM RECTARUM, DUM SPATIUM CLAUDUNT.

480. **D**efinitiones. Rectæ, quæ concursu suo spatium comprehendunt, *figuram rectilineam* efficiunt; jam vero concursus plurium rectarum fieri nequit; nisi simul efficiantur anguli; quare figura rectilinea etiam *polygonum* dicitur.

481. Polygonum universim significat spatium pluribus rectis comprehensum, quæ rectæ appellantur *latera*; & cum latus quodlibet utrovis extremo cum latere vicino jungatur, *totidem fiunt anguli*, quot *sunt latera*.

482. Porro quisque facile videt, saltem tribus opus esse lineis rectis, ut spatium claudatur; hinc prima, & simplicissima polygonorum species est *triangulum*; hanc sequitur *quadrilaterum* sive *tetragonum*; tum *pentagonum* (hoc est figura quinque angulorum, & quinque laterum), *hexagonum*, *heptagonum*, *octogonum*, *enneagonum*, *decagonum*, *hendecagonum*, *dodecagonum* &c. *hecatogonum*, *chiliogonum*, *myriogonum* &c, quorum nempe latera & anguli sunt 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 &c 100, 1000, 10000 &c.

Quoniam omnes hæ figuræ ad triangulum referri debent, ut deinceps apparebit; primum est, ut hujus proprietates cognoscantur.

DE TRIANGULIS.

De variis speciebus, & proprietatibus triangulorum.

483. Triangulorum diversæ sunt denominationes a ratione laterum, & angulorum desumptæ.

Ratione laterum, triangulum, cujus tria latera sunt inter se æqualia, velut ABC (Fig. 14), dicitur *æquilaterum*; cujus duo latera AC, AB (Fig. 15) inter se æquantur, vocatur *isosceles*; cujus denique omnia latera inæqualia sunt, ut ABC (Fig. 16) appellatur *scalenum*.

484. Ratione angulorum, triangulum, cujus omnes tres anguli sunt acuti, ut ABC (Fig. 14), est *oxygonum* vel *acutangulum*; cujus unus angulus est rectus, v. g. ad A (Fig. 15) dicitur *rectangulum* vel *orthogonum*; cujus denique unus angulus, velut ad C (Fig. 16) est obtusus, *amblygonum*, vel *obtusangulum* vocatur.

485. In triangulo rectangulo ABC (Fig. 15) latus BC angulo recto oppositum, dicitur *hypotenuſa*.

486. In quovis triangulo latus angulo alicui oppositum vocatur *basis* illius anguli.

487. Theorema I. Quodvis triangulum potest circulo inscribi; hoc est, potest describi circulus, qui per tres angulos trianguli transeat. Idem enim est, ac describi circulum per data tria puncta transeuntem (477).

488. Theorema II. Summa trium angulorum cujusvis trianguli est 180 graduum, seu æqualis duobus rectis.

Demonstratio. Inscribatur enim triangulum circulo; erit cujusvis anguli mensura dimidius arcus, quem latus oppositum subtendit (466); est igitur summa trium angulorum æqualis semisummæ trium arcuum, qui-

quibus insistant, hoc est, semicircumferentiæ, sive 180° .

489. Coroll. I. *Triangulum non nisi unicum angulum rectum, vel unicum obtusum habere potest; & tunc reliqui duo debent esse acuti.*

490. Coroll. II. *In triangulo rectangulo duo anguli acuti sunt alter alterius complementum ad rectum.*

491. Coroll. III. *In triangulo, cujus duo anguli sciuntur, scitur etiam tertius. Æquatur enim differentię summę duorum cognitorum a 180° . Et dato uno angulo, habetur summa reliquorum duorum æqualis complemento dati ad duos rectos.*

492. Theorema III. *Si in triangulo quovis ABC (Fig: 14) producaturs latus quodlibet CB, est angulus externus ABI æqualis summę duorum interiorum oppositorum ACB, CAB.*

Demonstratio. Summa anguli externi ABI, & deinceps positi ABC, est 180 graduum (425); sed etiam (488) summa duorum angulorum ACB, CAB, & ejusdem ABC est 180 graduum; igitur angulus externus ABI æquatur summę duorum interiorum oppositorum ACB, CAB.

493. Theorema IV. *Si ex quovis puncto D intra triangulum CAB (Fig: 15) ducantur rectę DA, BD ad extrema lateris cujusvis AB, erit angulus ADB rectis his comprehensus major angulo BCA lateri AB opposito.*

Demonstratio. Nam si triangulum ABC inscribatur circulo, manifestum est, mensuram anguli ACB esse dimidium arcum a chorda BA subtensum (466), cum angulus BDA habeat mensuram, præter eundem dimidium arcum, etiam dimidium illius, qui a lateribus BD, AD productis intercipitur (470).

494. Theorema V. *In quovis triangulo summa duorum quorumvis laterum major est latere tertio.*

Demonstratio. Recta AB (Fig: 16) est via brevissima

ma ex A in B (392); itaque via ex A per C in B est via longior; atqui via ex A per C in B continet accurate duo latera AC, CB; ergo summa laterum AC, CB major est latere tertio AB.

495. Theorema VI. *In omni triangulo latus majus opponitur angulo majori, & latus minus angulo minori; & vicissim, angulus cui opponitur latus majus, major est; & cui opponitur latus minus, est minor. Quod si enim triangulo circumscribatur circulus, mensura anguli majoris erit arcus major, & (453) arcus major subten-detur a chorda majore; & e converso.*

496. Corollarium. *Si supponatur angulus quivis in triangulo successive augeri, manente longitudine laterum angulum illum comprehendentium eadem; etiam latus angulo crescenti oppositum crescet; & ex opposito, decrescente angulo, latus oppositum decrescet.*

497. Theorema VII. *Perpendicularis ex angulo trianguli ad basin demissa cadit intra triangulum, si uterque angulus ad basin sit acutus; at si unus sit obtusus, perpendicularis cadit extra triangulum in basin productam.*

Demonstratio. Si in triangulo GEK (Fig. 2) anguli KGE, EKG sint acuti, dico 1mo, perpendicularem EI cadere intra K & G. Quod si enim caderet extra, v. g. si poneretur EL perpendicularis, triangulum EK L foret rectangulum ad L, & angulus EK L foret obtusus (complementum enim anguli acuti ad duos rectos est obtusus), quod fieri nequit (489). Itaque perpendicularum ex angulo GEK demissum non potest nisi intra G & K cadere.

Dico 2do, si in triangulo FEH sit angulus obtusus ad H, perpendicularem ex angulo acuto FEH in latus oppositum FH ductam cadere versus I in hoc latus productum. Ponatur enim ea perpendicularis esse EG; erit in triangulo EGH angulus HGE

rectus, & EHG obtusus, quod absurdum est. Unde perpendicularis non potest nisi versus angulum obtuso deinceps positum ad I cadere.

498. Theorema VIII. *In triangulo æquilatero omnes anguli sunt inter se æquales, aut singuli sint 60° . Et vicissim si tres anguli sint inter se æquales, & singuli 60° , triangulum est æquilaterum.* Nam si triangulum æquilaterum concipiatur inscriptum circulo, tria latera æqualia sunt tres chordæ æquales, quæ arcus itidem æquales subtendunt, quorum dimidii scilicet metiuntur tres angulos æquales, & singuli sunt pars tertia 180 graduum &c.

499. Theorema IX. *In triangulo isosceli anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales; & vicissim, si in triangulo duo anguli sint inter se æquales, triangulum est isosceles.* Etenim si hoc triangulum intelligatur circulo inscriptum, latera æquales angulos comprehendentia abscindunt arcus æquales; & e converso arcus æquales subtenduntur a chordis æqualibus (452).

500. Coroll: Si in triangulo isosceli ex angulo E (Fig: 2) æqualibus lateribus EG, EL comprehenso demittatur ad latus oppositum GL perpendicularis EI, ea secabit hoc latus in partes æquales GI, IL; quoniam scilicet laterum GE, LE eadem est inclinatio (436).

501. Theorema X. *Quodvis triangulum circulo circumscribi potest; seu (idem significat) cuiusvis triangulo potest circulus inscribi.*

Demonstratio. Bisecentur quivis duo anguli trianguli, velut B & A trianguli ABC (Fig. 15); rectæ eos angulos bisecantes BD, AD, sibi alicubi occurrent in D. Dico jam, perpendiculara ex hoc puncto in tria latera demissa DG, DF, DE esse æqualia inter se, consequenter esse radios ejusdem circuli tria latera trianguli in punctis G, F, E tangentis (451). Nam triangula rectangula GBD, BDE sunt æqualia, ob angulos ad

Cc

B æ-

B æquales, & latus BD commune; igitur $GD = DE$. Ex eadem ratione æqualia sunt triangula DEA , DFA & $DE = DF$; consequenter $GD = DE = DF$.

502. Coroll: *Tres rectæ, quæ tres angulos in triangulo dividunt bisariam, sese in eodem puncto intra triangulum secant.* Manifestum enim est, quod si angulus C dividatur per rectam in duas partes æquales, ea recta transeat per punctum D.

De Comparatione Triangulorum.

503. Duplici ratione Geometræ triangula, omnesque figuras reliquas, inter se comparant; primo quidem, dum situm laterum & magnitudinem angulorum figurarum conferunt; secundo dum ipsa figurarum spatia comparant. Verum altera hæc comparationis ratio pertinet ad ea, quæ de superficiebus dicenda sunt. Unde prima solummodo hic nobis exponenda est.

Triangula æqualia inter se dicuntur illa, quorum omnes anguli & latera æqualia sunt, singula singulis.

504. *Triangula similia sive æquiangula sunt, quorum anguli, singuli singulis, sunt æquales.* Sic triangula ABC , DEF (Fig. 16) similia sunt, quoniam angulus $A = E$, angulus $B = D$, & angulus $C = F$.

505. Dum figurarum fit comparatio, partes homologæ dicuntur magnitudines ejusdem denominationis. Ut in duobus triangulis similibus latus maximum unius est homologum lateri maximo alterius, medium medio &c.

506. Theorema I. *Triangula, quorum omnia latera homologa æqualia sunt, sunt æqualia inter se.*

Demonstratio. Dico esse triangulum ABC (Fig. 13) æquale triangulo abc si $AB = ab$, $AC = ac$,
BC

$BC = bc$. Describantur ex punctis A & B tanquam centrīs arcus FCG , DCE se interfecantes in vertice C : intelligatur dein triangulum abc impositum triangulo ABC , ut ob $AB = ab$, punctum a cadat in A , & b in B : quia $ac = AC$, latus ac terminabitur alicubi in arcu FCG ; ob eandem causam latus $bc = BC$, alicubi occurret arcui DCE : & quoniam latera ac , bc junguntur ad idem punctum c , utrumque necesse est, ut occurrat sectioni arcuum communi in C . Hinc ac congruet cum AC : & bc cum BC , consequenter totum triangulum abc toti ABC , eruntque triangula inter se æqualia.

507. Theorema II. *Triangula, quæ habent omnes angulos æquales, singulos singulis, & unum latus homologum æquale, sunt æqualia.*

Demonstratio. Si angulus $A = a$, $B = b$, $C = c$ (Fig. 13), & $AB = ab$, dico totum triangulum ABC esse æquale triangulo abc . Ponatur latus ab supra latus AB , ut punctum a cadat in A , & b in B ; evidens est, ob angulum $a = A$, & $b = B$, etiam latus ac debere cadere in AC , & bc in BC , ideoque latera ac , bc debere concurrere in eodem puncto, in quo concurrunt latera AC , BC , hoc est, punctum c cadere in punctum C , & triangulum abc exacte congruere triangulo ABC .

508. Theorema III. *Si in triangulis duo latera sint æqualia duobus homologis, & anguli his lateribus comprehensi æquales, tota triangula sunt æqualia.*

Demonstratio. Si latus $AC = ac$ & $AB = ab$, angulusque $A = a$; dico, triangulum ABC æquari triangulo abc . Imponatur ab lateri AB , & ac lateri AC ; congruent hæc latera, ob angulum $A = a$. Et quia $AC = ac$, & $AB = ab$, etiam punctum c cadet in C , & punctum b in B ; igitur bc , distantia pun-

punctorum b & c , erit æqualis, & congruet distantia BC punctorum B & C. Quare totum triangulum $a b c$ exacte congruet triangulo ABC.

509. Theorema IV. Si sint duo triangula similia & inæqualia, & unius angulus ponatur supra angulum æqualem alterius, lateraque primi eum angulum comprehendentia supra latera homologa alterius, erit latus tertium primi parallelum lateri tertio secundi.

Demonstratio. Si angulus D (Fig: 16) imponatur angulo æquali B, & latus DF sibi homologo BC, & latus DE lateri alteri homologo BA, erit FE, seu *fe* parallelum ad AC. Cum enim triangula similia sint, erit angulus *fe* B = CAB, igitur *fe* (434) est parallela ad AC.

Quod si angulus F fuisset impositus sibi æquali C, latus DE fuisset parallelum lateri AB; uti etiam F D lateri BC, si angulus E fuisset positus supra æqualem A.

510. Theorema V. E converso si ex quovis puncto *f* ad arbitrium assumpto in latere trianguli, ducatur recta *f e* parallela basi AC, triangula B *f e*, BCA sunt similia, cum nempe anguli B *f e*, BCA, & B *e f*, BAC æquales sint (433).

De Polygonis aliis.

511. Tria sunt polygonorum genera, *irregularium*, *symmetricorum*, & *regularium*. Polygona irregularia sunt, quorum latera & anguli non sunt æquales, (Fig: 20, 22, 23).

512. Polygona symmetrica dicuntur, quæ lateribus & æqualibus, & parallelis constant (vide Fig: 17, 18, 19, 21, 24, 25, 27). Hinc necesse est, ut numerus laterum sit par.

513. Polygona regularia sunt, quorum omnes anguli, & omnia latera sunt inter se æqualia, & similiter posita (vide Fig: 26, 27, 28).

514. Figura quadrilatera irregularis, *trapezium* appellatur, ut Fig: 20; regularis vero, ut Fig: 18, *quadratum*. Quadrilaterum symmetricum dicitur *parallelogrammum*, cujus si omnes anguli sint recti, est *parallelogrammum rectangulum*, vel sine addito alio *rectangulum* (Fig: 21): at si anguli recti non sint, latera tamen bina contigua æqualia, *Rhombus* vocatur (Fig: 19); si nec latera bina æqualia, nec anguli recti, *parallelogrammum*, vel *Rhomboides* (Fig: 17.)

515. *Angulus procurrens* est, cujus crura extrorsum concurrunt, & duobus rectis minor, velut ABC (Fig: 22 & 25); *angulus regrediens* est cruribus introrsum concurrentibus, gibbus, ac duobus rectis major, ut BCD. Patet hinc non nisi in polygonis irregularibus, & symmetricis posse esse angulos regredientes, cum in polygono regulari omnes anguli sint similiter positi (513).

516. Recta per polygonum ab uno angulo ad alterum ducta dicitur *diagonalis*.

Proprietates Polygonorum in genere.

517. Theorema I. Omnia polygona, seu omnes angulos habeant procurentes, seu aliquos regredientes, in tot possunt resolvi triangula, quot latera habent. Puncto enim C quolibet intra perimetrum assumpto ad omnes angulos possunt rectæ duci (vid: Fig: 20, 23) eritque latus quodvis basis trianguli.

518. Theorema II. Summa omnium angulorum internorum polygoni æquatur facto ex 180° in numerum laterum binario imminutum ductis, sive facto ex numero laterum in 180° ; minus 360° .

De-

Demonstratio. Summa omnium angulorum polygoni æquatur summæ omnium angulorum, quos continent triangula, in quæ polygonum resolvitur, exceptis iis, qui sunt circa communem verticem C, & (424) quorum summa est 360° ; jam vero triangula sunt tot, quot latera polygoni; igitur summa angulorum polygoni est toties 180° , quot sunt latera demptis 360° .

Sic polygonum septem laterum, habet summam angulorum $= 180^\circ \times 7 - 2 = 900^\circ$.

519. Theorema III. Summa omnium complementorum ad duos rectos angulorum polygoni, cujus nullus angulus regreditur, est 360° .

Demonstratio. Quilibet enim angulus internus polygoni cum ejusmodi complemento (452) facit 180° ; igitur summa omnium angulorum interiorum polygoni, cum summa omnium suorum complementorum efficit toties 180° , quot sunt latera: atqui summa ipsorum angulorum polygoni interiorum est toties 180° , quot sunt latera, demptis 360° (518) ergo summa complementorum est 360° .

520. Theorema IV. Si polygonum habeat angulos gibbos introrsum, est summa omnium complementorum ad duos rectos angulorum procurrentium junctis angulis externis gibborum, æqualis 360° , plus toties 180° , quot sunt anguli gibbi.

Demonstratio. Patet enim (Fig: 22), summam omnium complementorum ad duos rectos (sive exteriorum) angulorum procurrentium polygoni A B D E F esse 360° (519); at si hoc polygonum acquirat angulum gibbum D C B, angulus externus G D B, complementum ad duos rectos anguli E D B, augeatur angulo B D C; & angulus D B I externus, & comple-

plementum ad duos rectos anguli ABD, augetur angulo CBD; jam vero (488) anguli CDB, CBD cum angulo externo DCB gibbi cognominis, efficiunt 180° ; igitur quando angulus in polygono fit gibbus, binorum vicinorum procurrentium complementa ad duos rectos ea quantitate augentur, quæ juncta angulo externo gibbi facit 180° : quare si in polygono sint anguli gibbi &c.

521. *Scholium.* Potest etiam polygonum solvi in tot triangula, quot sunt latera, demptis duobus: si nempe tot ducantur diagonales, quot citra earum mutuam intersectionem duci possunt (vide Fig: 22). Et quoniam evidens est, summam omnium angulorum, quos hæc triangula continent, esse eandem cum summa angulorum polygones, sequitur, hanc summam efficere toties 180° , quot sunt triangula, hoc est, quot sunt latera, demptis duobus. Hæc demonstratio magis etiam generalis est, quam num. 518 allata, in qua supponitur; quod nulla recta ex puncto C ad angulos polygoni ducta cadat extra polygonum.

Proprietates Polygonorum Symmetricorum, tam eorum, quorum omnes anguli procurrunt, quam quorum perimeter facit angulos introrsum gibbos.

522. Theorema I. Si ex quovis angulo polygones symmetricon ducantur ad oppositum diagonales . . .

I. Erunt triangula opposita ad verticem, & binis diagonalibus vicinis comprehensa, inter se æqualia; velut (Fig: 17, 24, 25) BGC, FGE. Cum enim in polygono symmetrico FE sit æqualis, & parallela rectæ BC, est angulus BCG = GFE (433); ob eandem causam est CBG = GEF: hinc (507) triangula BGC, FGE sunt inter se æqualia. Eadem est demonstratio in reliquis.

523. II. *Omnes diagonales se se mutuo secant bifariam.*
Sunt enim omnia triangula opposita æqualia.

524. *Omnes diagonales se se in eodem puncto secant.*
Etenim cum diagonales BE, AD se mutuo secant bifariam, punctum medium diagonalis BE idem sit, oportet, cum puncto medio diagonalis AD. Ex eadem causa punctum medium diagonalis AD est idem cum puncto medio diagonalis FC &c. Itaque punctum medium omnium diagonalium unum, idemque est.

525. Theorema II. *Diagonalis ad angulos oppositos ducta polygonum symmetricum in duas figuras æquales & similes secat.* Nam ex utraque diagonalis parte sunt totidem & similiter posita triangula æqualia.

526. Hinc non immerito punctum, in quo sese diagonales interfecant, centrum polygoni symmetrici dici potest, cum radii ex eo ad angulos oppositos ducti sint æquales.

527. Theorema III. *Recta quævis HI (Fig: 17, 24, 25) per centrum polygoni symmetrici transiens, in eodem dividitur bifariam, simulque polygonum in duas figuras æquales & similes dividit.* Demonstratio eadem est, ac num: 522 & 525, qua scilicet æqualitas triangulorum BIG, HGE, vel IGC, FGH ostendatur.

528. Theorema IV. *Rectæ quævis per centrum polygoni symmetrici ductæ se in eodem mutuo bifariam secant.* Patet ex præcedente.

529. E converso universim verum non est, quod si duæ rectæ sese in polygono symmetrico secant bifariam, se simul secant in illius centro. Nam si in polygono symmetrico ABCD (Fig. 18) accipiat CE = BF, ducanturque rectæ CF, EB, se in G mutuo secant bifariam, ob triangula GEC, GFB æqualia (507); licet punctum G multum abfit a centro H.

Proprietates Polygonorum Regularium.

530. Theorema I. *Polygonum quodvis Regulare potest circulo inscribi, hoc est, potest describi circulus, cujus circumferentia per vertices omnium angulorum polygoni transeat.*

Demonstratio. Hoc Theorema demonstrabitur, si ostendatur, dari intra polygonum regulare aliquod punctum C (Fig: 26, 27), cujus distantiae CA, CB, CD ab omnibus angulis, sunt inter se æquales.

Dividantur itaque omnes polygoni anguli in duas partes æquales per rectas AC, BC, DC, EC &c.: dico, has rectas sese omnes in eodem puncto C secare, atque inter se æquales esse. Nam cum duæ quævis, velut BC, AC sibi mutuo occurrant in aliquo puncto C, efficiunt triangulum ABC; & duæ item BC, DC se mutuo alicubi in C secantes constituunt aliud triangulum BCD: ostendendum jam, hæc duo triangula æqualia esse. Quoniam omnes anguli polygoni regularis sunt inter se æquales, atque isthic per hypothesin bisectionis, erunt anguli CAB, CBA tum inter se, tum angulis CBD, CDB æquales: latera vero inter eosdem sita sunt itidem æqualia, AB, & DB: igitur (507) triangula ACB, BCD sunt æqualia, & isoscelia, consequenter $AC = DC = BC$; & quia latus BC commune est utrique triangulo, punctum C intersectionis laterum AC, BC coincidit cum puncto intersectionis laterum BC, CD. Idem eodem modo ostenditur de lineis EC, FC &c.

531. Coroll: I. *Radii ex centro polygoni regularis ad singulos ejus angulos ducti dividunt polygonum in tot triangula æqualia, & isoscelia, quot sunt latera.*

532. Coroll: II. *Quodvis latus polygoni regularis circulo inscripti est chorda arcus, cujus numerus graduum æ-*

qualis est quotienti ex 360° per numerum laterum divis. V. g. latus decagoni est chorda arcus 36° .

533. Coroll. III. *Latus hexagoni regularis æquatur radio circuli circumscripti.* Quod si enim hexagonum ejusmodi (Fig: 27) dividatur ex centro C in sex triangula, facile apparebit, hæc triangula esse æquilatera, quod nempe radii CA, CB æquales sint, & angulus ACB 60° , ideoque etiam anguli BAC, ABC singuli 60° , & $CA=AB$.

534. *Scholium.* Ex hac proprietate hexagoni regularis haberi potest divisio circuli in suos gradus, aut saltem in partes, quarum valor sit cognitus: quod si enim radius transferatur in circumferentiam, habetur arcus 60° ; & si hic dividatur in duas partes æquales, obtinetur arcus 30° , cujus bisectio dat alterum 15° . Sed ulterior divisio tentando peragitur, quod fieri nequeat Geometrice, ut arcus 15° in 3, 5, vel 15 partes æquales secetur (476). Quare necesse est, ut in constructione instrumentorum industria suppleat defectum methodi Geometricæ, quando in suos gradus dividenda sunt.

535. Theorema II. *Quodvis polygonum regulare circumscribi potest circulo; seu, quod idem est, cuius potest circulus inscribi, hoc est, potest intra polygonum regulare describi circulus, qui omnia ejus latera in punctis mediis tangat.*

Demonstratio. Quoniam enim latera polygoni regularis circulo inscripti (532) sunt totidem chordæ æquales, æqualem habent a centro distantiam (452). Unde si e centro ducantur ad singula latera perpendiculares, eæ dividunt omnia latera bifariam (448) eruntque inter se æquales; quare potest describi circulus per omnia extrema harum perpendicularium transiens, qui consequenter omnia latera polygoni in medio tanget (462). Vide Fig: 28.

536. Theorema III. *Omne polygonum regulare, cuius*

jus numerus laterum est par, est simul polygonum symmetricum.

Demonstratio. Si polygonum regulare ductis e centro ad singulos angulos radiis resolvatur in triangula, facile intelligitur, ob triangulorum æqualitatem, & numerum laterum parem, medietatem horum triangulorum separari a mediate altera per aliquam diametrum, velut AE (Fig: 27), quæ nempe fit e duobus radiis oppositis AC, CE: jam vero quia triangula ABC, ECF æqualia sunt; anguli FEC, CAB æquantur; igitur latera (434) FE, AB sunt parallela & æqualia.

537. Problema I. *Polygono regulari dato circum* *circumscribere.*

Resolutio. Tantum opus est, ut quæeratur polygoni centrum (530), reliqua per se patent.

538. Problema II. *Polygono regulari dato circum* *inscribere.*

Resolutio. E centro per n. 530 invento demittatur ad unum latus perpendicularis: erit ea radius circuli inscribendi (535).

539. Problema III. *Circulo dato polygonum regulare* *quodvis inscribere.*

Resolutio Generalis. Dividantur 360° per numerum laterum polygoni inscribendi: in circumferentia circuli accipiat arcus, cujus numerus graduum æqualis sit quotienti reperto; erit ejus chorda latus polygoni (532); hoc itaque applicetur, quoties fieri potest, circumferentiæ; habebitur polygonum inscriptum, ut petebatur. Exemplum. Sit inscribendum

pentagonum; erit $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Accipiat itaque

ope semicirculi in suos gradus divisi, vel similis instru-

menti probe elaborati, arcus 72° in circulo dato, ejus chorda in reliquam circumferentiam transferatur.

540. *Observa.* Hæc resolutio non semper est Geometrica; attamen in praxi adhiberi plerumque solet.

Per Geometriam elementarem circulo inscribi solummodo possunt triangulum æquilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, & omnia ea, quorum numerus laterum crescit in progressionem Geometricam rationis duplæ, cujus progressionis termini primi sunt numeri laterum polygonorum istorum, quæ nominavimus. Sic ratione trianguli æquilateri inscribi possunt polygoni regularia 6, 12, 24, 48 &c laterum; ratione pentagoni etiam polygoni 10, 20, 40, 80 &c laterum; ratione pentedecagoni illa, quæ habent 30, 60, 120, 240 &c latera. Reliqua, ut heptagonum, enneagonum, hendecagonum &c, inscribi nequeunt Geometricè, nisi per resolutionem æquationum singularis propriarum, verum quæ ad gradus altiores ascendunt.

541. *Problema IV. Circulo dato polygonum quodvis regulare circumscribere.*

Resolutio Generalis. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni circumscribendi; accipiat arcus FG (Fig: 28), qui tot sit graduum, quot in quotiente sunt inventi, ducanturque per ejus extrema F, G radius CF, & recta indefinita CB: ex F, extremo radii, excitetur perpendicularis AFB occurrens rectæ CB in B: transferatur FB in FA, erit AB latus polygoni quæsitum. Reliqua latera vel eadem methodo inveniri possunt; vel vero poterit radio C describi circulus BAHED, & in ejus peripheriam chorda AB transferri: habebitur polygonum BAHED huic circulo inscriptum, simulque circulo dato circumscriptum.

Demonstratio. Facile enim apparet, hac constructione fieri tot tangentes æquales, & in punctis con-

tactus bifariam divisas, quot sunt latera polygoni petiti.

Proprietates Circuli.

542. Theorema I. *Circulus est polygonum infinitorum laterum infinite parvorum.*

Demonstratio. Nam evidens est, polygonum eo propius accedere ad circulum inscriptum, vel circumscriptum, quo major est laterum numerus: itaque si reipsa ejus latera essent infinita, nihil differret à circulo, atque hic pro polygono citra ullum errorem substitui posset. Unde supponi potest, circulum nihil aliud esse, quam polygonum infinitorum laterum. At si polygonum circulo inscriptum, vel circumscriptum sit, quo magis augetur numerus laterum, eo magis latera decrescere est necesse; igitur si latera infinita sint, singula infinite parva esse debent.

543. Sit circulus DEB (Fig: 29), cujus diameter GB producat usque in A; supponatur recta AB ita moveri circa punctum fixum A, ut alterum ejus extremum utrinque describat arcus BNO, BML, dum ipsa interim AB excurrit per totum spatium circulo DBE contentum.

Hoc posito, manifestum est, quod dum recta AB successive tot radiorum vices agit, quot sunt puncta in arcubus BO, BL, omnes hi radii secantur inæqualiter tam a circumferentia cava DYIBKZE, quam a parte ejus convexa DSQE, ut hinc deducatur universim

544. Theorema II. *Si rectæ quotvis ex eodem extra circuli circumferentiam puncto A ductæ terminentur in ejus parte concava, velut AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE.*

imo: maxima est, quæ per centrum transit, ut AB.

2do: reliquarum eæ sunt minores, quæ magis recedunt a transeunte per centrum; & quarum ab hac distantie æquales sunt, eæ itidem sunt æquales.

3tio: minimæ sunt utrinque tangentes AD, AE.

4to: nequeunt esse plures inter se æquales, quam binæ; quæ scilicet utrinque ad æqualem a centro distantiam ducuntur: nam utrinque æqualiter decrescunt.

Ex opposito generale est. . . .

545. Theorema III. Restarum quotlibet AD, AS, AH, AG, AF, AQ, AE ex eodem extra peripheriam puncto ad partem convexam terminatarum

1mo: minima est, quæ producta transit per centrum.

2do: Reliquarum illæ majores sunt, quæ productæ magis recedunt a transeunte per centrum; & quæ ab hac æqualiter distant, æquales sunt.

3tio: maximæ sunt, quæ utrinque circumulum tangunt.

4to: non nisi binæ possunt inter se æquales esse.

Quamvis hæc omnia satis manifesta sint, si centro A, radio AG describatur arcus TGP; nihilominus sequente ratione possunt accurate demonstrari. Ducantur ex centro C ad omnia puncta, in quibus hæc lineæ occurrunt circumferentiæ, rectæ. Ut demonstraretur Theorema II, lineæ AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE considerentur singulæ tanquam latus tertium trianguli, quod manentibus reliquis lateribus constantibus, semper debet decrescere, dum angulus ei oppositus decrescit (496): sic ABC spectari potest tanquam triangulum, cujus latera sint AC, CB, & AB, angulus vero ACB infinite obtusus, & anguli CAB, CBA infinite parvi: hinc AB erit maxima, quæ extrema puncta laterum constantium CA, CB jungere possit. At vero in triangulo ACI, cujus latera constantia AC, CI æqualia sunt lateribus prioris tri-

trianguli AC, CB, angulus ACI, illis lateribus comprehensus, minor est angulo ACB; igitur etiam latus oppositum AI minus esse debet, quam AB; &c. Quod si denique sit $BI = BK$, hoc est, si rectæ AI, AK in æqualibus distantis ab illa, quæ per centrum transit, peripheriæ occurrant, erunt AI, AK inter se æquales, ob triangula ACI, ACK, æqualia. Idem est de reliquis.

Eodem modo, ut demonstretur Theorema III, considerandæ sunt rectæ AH, AG, AS, AD, AF, AQ, AE, quæ singulæ sunt latera opposita angulo constantibus lateribus comprehenso, & quæ consequenter crescente eo angulo etiam ipsæ crescere debent (496). Nam ACG spectari potest ut triangulum, cuius angulus ACG sit infinite parvus, latera AC, CG constantia: hinc AG erit minima, quæ extrema laterum constantium A & G jungere possit. Sed in triangulo ACH, angulus ACH jam est major, qui nempe lateribus æqualibus AC, CH comprehenditur, ideoque latus ei oppositum AH majus esse debet, quam AG. Quod si angulus ACF = ACH, hoc est, si rectæ AH, AF æqualiter utrinque distent ab AG, quæ producta transit per centrum; ut superius, ostenditur, esse AF = AH.

546. Si recta indefinita ACB (Fig: 30) moveatur circa punctum quodpiam intra peripheriam circuli GOBLG, sed extra centrum C, assumptum, velut A, semper secabitur inæqualiter a circumferentia circuli, eritque

Theorema IV. Rectarum quotvis e puncto intra circuli circumferentiam & extra centrum sumpto ductarum usque ad circumferentiam

1mo. Maxima quæ per centrum transit, velut AB.

2do. Reliquarum eæ sunt minores, quæ longius distant a tran-

a transeunte per centrum; & quæ ab ea distant æqualiter, sunt æquales inter se; quarum duæ tantum esse possunt.

3tio. Brevissima est, quæ per centrum transeunti, jacet ad alteram partem in directum, ut AG.

4to. Si duæ inter se æquales producantur etiam ultra punctum usque ad circumferentiam, constituunt chordas æquales; nempe ob æqualem earum a centro distantiam, etiam partes productæ æquantur.

Hæc omnia per se manifesta sunt, si radio A G describatur circulus GPT, licebit tamen eadem demonstrare ratiocinio prorsus simili illi, quo prius usi sumus, ductis nempe radiis CN, CX, CO, CQ &c, & rectis ex A usque ad peripheriam circuli GOBLG pertingentibus consideratis tanquam lateribus oppositis angulo intra latera constantia totidem triangulorum comprehenso, nempe intra AC, & radium. Ut enim propius, vel remotius ab ea, quæ per centrum transit, peripheriæ occurrunt, ita majori vel minori opponuntur angulo, ideoque & ipsæ majores, vel minores sunt; & quæ æqualiter utrinque discedunt, æquales sint oportet, cum angulis æqualibus opponantur.

547. Corollarium. Punctum, ex quo tres rectæ æquales ad circumferentiam circuli duci possunt, centrum est.

548. Theorema V. Duo circuli, sive æquales, sive inæquales, non nisi in duobus punctis se possunt secare.

Demonstratio. Nam si se possent in tribus punctis secare, ductis ex centro unius circuli ad ea tria intersectionum puncta rectis, hæc forent radii illius circuli, adeoque inter se æquales. Unde daretur aliquod punctum extra centrum alterius circuli, ex quo possent tres rectæ æquales ad circumferentiam duci, quod absurdum est (544).

549. Coroll. I. Si duo circuli habeant tria puncta communia, etiam commune centrum habent, & congruunt.

550 Coroll. II. Circulorum, quibus unum, vel duo tantum communia sunt puncta, nequit idem esse centrum, siue circuli sunt eccentrici.

551. Theorema VI. Chordæ se extra centrum secantes, non possunt se mutuo secare bifariam.

Demonstratio. Nam si hoc ponatur, erit recta ex centro ad communem earum intersectionem ducta utrique perpendicularis, cum utramque secet bifariam (449); atqui hoc manifeste absurdum est, cum angulus, quem facit recta ex centro ducta cum dimidia chorda altera, sit pars anguli, quem facit eadem ex centro ducta cum altera dimidia chorda.

552. Coroll. Si igitur duæ chordæ se mutuo secent bifariam, earum intersectio est centrum, & ipsæ sunt circuli diametri.

553. Theorema VII. Si duo circuli se tangent, recta per eorum centra ducta transit per punctum contactus.

Demonstratio. Tangant primo se circuli externe (Fig: 29). Via ex centro A ad centrum C brevissima est per punctum contactus G; nam hæc solummodo æquatur summæ radiorum AG + GC; & cuiusvis alteri addendum præterea est spatium inter utriusque circuli circumferentiam interceptum. Tangant 2do se interne (Fig: 30). Cum punctum G sit utrique circulo commune, via brevissima ex A (centro circuli minoris) ad punctum G est recta minima, quæ ex hoc puncto A ad circuli GOBLG majoris circumferentiam potest duci; est autem (546) minima illa, quæ jacet in directum cum transeunte per centrum C; igitur recta e puncto A (centro circuli minoris) ad punctum G contactus ducta, transit simul per centrum C circuli majoris GOBLG.

554. Problema. Ex dato extra circum puncto A (Fig: 33) ducere tangentem.

Ee

Re

Resolutio. Ducatur ex puncto A ad centrum circuli dati C recta AC, super qua tanquam diametro ex medio ejus puncto G describatur semicirculus AEC, & per punctum E, in quo is secat circulum datum, ducatur recta AEL, erit hæc tangens quæ sita.

Demonstratio. Quod si enim ducatur radius CE, erit angulus AEC rectus (468), & hinc AE ad radii CE extremum E perpendicularis, & consequenter circuli tangens (462).

Observa. Facile apparet, hujus problematis esse duplicem solutionem: poterat enim semicirculus AEC describi ex altera parte versus H, illucque etiam tangens duci.

De Lineis Proportionalibus.

555. *Hypothesis.* Si duæ rectæ AB, AC (Fig: 34) ad quemvis angulum junctæ secantur per quotcunque parallelas inter se, & æquidistantes DH, EI, FK, GL &c.

imo Sunt omnes partes AH, HI, IK, KL &c lineæ AC inter se æquales; uti & omnes partes AD, DE, EF &c lineæ AB inter se æquantur. Nam si ex quovis puncto, in quo parallelæ secant rectas AB, AC, demittantur perpendiculares AV, DM, EN, item AV, HQ, IR &c, facile ostenditur, triangula rectangula ADV, DEM, ENF &c inter sese æqualia esse (507), cum ob æquales parallelarum distantias, perpendiculares illæ omnes æquales sint, & anguli ad intersectionum puncta cum linea AB pariter æquantur, nempe ADV, DEM, ENF &c. Ex eadem causa triangula rectangula AHV, HQI, IRK &c sunt æqualia: igitur etiam eorum hypotenusæ AD, DE, EF &c, nec non AH, HI, IK &c sunt æquales inter se.

2do Quivis numerus partium rectæ AC est ad numerum partium rectæ AB interceptarum inter easdem parallelas, ut est alius quilibet numerus partium rectæ AC ad numerum partium rectæ AB rursus inter easdem parallelas interceptarum. Etenim cum sit $AD = DE = EF$ &c; & $AH = HI = IK$, evidens est, esse $AD:DE::AH:HI$, utpote cum quotiens rationis sit 1. Est igitur (304) $AD:AH::DE::HI$. Similiter est $DE:EF::HI:IK$, seu etiam $DE:HI::EF:IK$; consequenter $AD:AH::DE:HI::EF:IK$; & eodem modo patet esse $FG:KL::GB:LC$. Hinc autem inferitur (310), quod etiam sit AB (summa omnium antecedentium) ad AC (summam omnium consequentium), ut est AD ad AH, sive ut alia pars quævis rectæ AB ad partem correspondentem rectæ AC, seu (297) ut quocunque partes rectæ AB ad totidem partes rectæ AC. Atqui numerus partium idem in rectis AB, AC abscinditur per binas quasvis parallelas; ergo est quivis numerus partium rectæ AB ad numerum partium rectæ AC, quæ inter easdem parallelas intercipiuntur, ut alter quilibet numerus partium rectæ AB ad numerum partium rectæ AC itidem inter easdem parallelas interceptarum.

556. Theorema I. Fundamentale. *In triangulis similibus latera homologa sunt proportionalia.*

Demonstratur. Quoniam triangulo simili imposito alteri, latus tertium sit tertio parallelum (509); si supponamus per totum spatium ABC (Fig. 16) duci rectas ad AC parallelas, & infinite propinquas, erit *se* una ex his parallelis, & lateribus AB, CB idem accidet, quod in Fig: 34 rectis AB, AC. Habebitur itaque $BA:BC::Be:Bf$, seu substitutis pro *Be* & *Bf* æqualibus DE, DF, erit $AB:BC::DE:DF$.

Si angulus E fuisset impositus homologo A, la-

tus FD fuisset parallelum lateri BC; & hinc $AB:ED::AC:EF$.

Et si denique positus fuisset angulus F supra æqualem C, fuisset $AC:EF::BC:FD$.

557. *Scholium.* Illud quoque manifestum est (555), partes A_e, C_f esse proportionales lateribus BA, BC. Unde est etiam $A_e:C_f::BA:CB::DE:DF$.

558. Theorema II. Si in duobus triangulis sint tria latera tribus homologis proportionalia, anguli lateribus proportionalibus oppositi æquales sunt, & triangula similia.

Demonstratio. Si (Fig: 16) sit $AC:BC::FE:FD$; & $AC:AB::FE:ED$, dico triangulorum ABC, DEF angulos singulos singulis æquales esse. Nam constructo super EF triangulo FEG, in quo sit $GEF=BAC$, & $GFE=BCA$, est (556) $AC:BC::FE:FG$; sed ponebatur $AC:BC::FE:FD$; igitur est $FE:FG::FE:FD$, consequenter (306) $FD=FG$. Eodem modo ob triangula ABC, FEG similia, est (556) $AC:AB::FE:EG$; & per hypothesin $AC:AB::FE:ED$; ergo $FE:EG::FE:ED$, hoc est (306) $EG=ED$; & hinc in triangulis FED, FEG anguli sunt æquales, ipsaque triangula tota æqualia (506) ob latus EF commune: quoniam igitur anguli trianguli FEG ex constructione æquales sunt angulis trianguli ABC, etiam æquales erunt anguli trianguli DEF.

559. Theorema III. Si in triangulis duo latera æqualem angulum comprehendentia sint proportionalia, etiam reliqui duo anguli sunt æquales.

Demonstratio. Sit in triangulis ABC, DEF, angulus B=D, & $DE:DF::BA:BC$, dico, reliquos angulos E & F æquari reliquis A & C. In latere AB accipiatur B_e=DE, & ducatur ex e parallela ef ad AC: erunt in triangulis ABC, e B_f omnes anguli æquales, cum ob parallelam ef fit f_eB=A, e_fB=C; & an-

& angulus B communis; est igitur (556) $Be:Bf::BA:BC$; sed est etiam per hypothesein $DE:DF::AB:BC$; consequenter $Be:Bf::DE:DF$; atqui $Be=DE$ ex constructione; ergo (306) $Bf=DF$; habent itaque (508) triangula Bef , DEF æqualia omnes angulos æquales; & quoniam anguli trianguli ABC æquales sunt angulis trianguli Bef , æquabuntur etiam angulis trianguli DEF .

560. Theorema IV. *Recta AD (Fig:37), quæ angulum BAC trianguli secat bifariam, secat etiam basin oppositam in partes BD, DC lateribus adjacentibus BA, AC proportionales, hoc est, erit $BD:DC::AB:AC$.*

Demonstratio. Producaturs latus AC indefinite, & ducatur ex B recta BE parallela ad AD: erunt triangula BCE, DAC similia (510); consequenter (557) $DB:DC::AE:AC$. Sed ob parallelas, angulus AEB = DAC = DAB = ABE; igitur (499) triangulum BAE est isosceles, & $AE=AB$; & hinc substituto AB pro AE, erit $BD:DC::AB:AC$.

561. Theorema V. *Si ex angulo recto E trianguli rectanguli CEL (Fig:35) demittatur in hypotenusam CL perpendicularis EO; imo ea dividet triangulum in duo triangula COE, OEL tum inter se, tum toti CEL similia: 2do perpendicularis EO erit media proportionalis inter segmenta hypotenusæ CO, OL. 3tio quodvis latus trianguli CEL angulum rectum comprehendens erit medium proportionale inter hypotenusam, & ejus segmentum adjacens illi lateri.*

Demonstratio. Illud imprimis evidens est, quod utrumvis triangulum COE, OEL simile sit toti CEL, cum præter rectum detur in utrovis angulus communis triangulo CEL: sunt igitur similia inter se; & hinc *nam angulus E communis utroq. Ang. COE=CEL & de eo et testis*

In triangulo CEO est latus minimum CO ad me-

testis debet esse equalis ad cathetam. Ebn cel.

Atqui in triangulis similibz latera homologa sunt propor-

dium EO, ut in triangulo EOL latus minimum EO ad medium LO, five $\frac{EO}{LO} = \frac{CO}{EO}$.

In triangulo CEO est latus minimum CO ad suam hypotenusam CE, ut in triangulo CEL latus minimum CE ad suam hypotenusam CL, seu $\frac{CO}{CE} = \frac{CE}{CL}$.

In triangulo EOL est latus medium OL ad suam hypotenusam LE, ut in triangulo CEL latus medium EL ad suam hypotenusam CL, vel $\frac{OL}{LE} = \frac{EL}{CL}$.

562. Coroll. I. *Summa quadratorum laterum angulum rectum comprehendentium in triangulo rectangulo est æqualis quadrato hypotenusæ.* Cum enim sit $\frac{CO}{CE} = \frac{CE}{CL}$, habetur (316) $CE^2 = CO \times CL$. Eodem modo quia $\frac{OL}{LE} = \frac{EL}{CL}$, est $LE^2 = OL \times CL$: consequenter $CE^2 + LE^2 = CO \times CL + OL \times CL = (CO + OL) \times CL = CL \times CL = CL^2$.

563. Coroll. II. Quia $CE^2 + LE^2 = CL^2$, est quoque (217) $CE^2 = CL^2 - LE^2$; & $LE^2 = CL^2 - CE^2$: hoc est, *quadratum lateris unius angulum rectum comprehendentis in triangulo rectangulo est æquale excessui quadrati hypotenusæ supra quadratum lateris alterius.*

564 Coroll. III. *Diagonalis quadrati est incommensurabilis cum latere ejusdem.* Cum enim hæc diagonalis sit hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus duo latera inter se æquantur, ejus quadratum æquatur summæ quadratorum laterum, hoc est duplo quadrato lateris unius. Jam vero (183) radix quadrata numeri, qui sit alterius duplum quadratum, in numeris exprimi nequit: igitur si quadratum lateris exprimeretur in numeris, in iis quadratum hypotenusæ exprimi non potest, & vicissim.

565. Theorema VI. *Perpendicularis EO (Fig. 41) ex quovis circumferentiæ puncto ad diametrum circuli CL ducta, est media proportionalis inter segmenta diametri CO, OL; seu (quod idem est) ejus quadratum est æquale facto $CO \times OL$.*

Demonstratio. Ducantur enim ex eodem puncto E ad extrema diametri rectæ EC, EL, fiet (468) triangulum CEL rectangulum ad E; quare (561) $\therefore$ CO. OE.OL, sive (316) $EO^2 = CO \times OL$.

566. Theorema VII. Si duæ chordæ BA, DC (Fig: 38) se in circulo intersecent, earum segmenta sunt reciproce proportionalia.

Demonstratio. Ducantur DA, BC, erunt triacula BEC, DEA similia, ob angulos ad E, ad verticem oppositos, æquales, & præterea angulum C $\equiv$ A, utpote eidem arcui DB insistenti, nec non B $\equiv$ D insistenti eidem arcui AC; est igitur AE:DE::EC:EB.

567. Theorema VIII. Si duæ rectæ EB, EC (Fig: 39) ex eodem puncto extra circumulum ducantur usque ad ejus peripheriam cavam, partes earum extra circumulum a puncto illo, & circuli circumferentiæ interceptæ, sunt reciproce totis proportionales; hoc est, EA:ED::EC:EB.

Demonstratio. Ductis chordis AC, DB facile apparet, triacula EBD, ECA esse similia, cum angulus ad E sit utrique communis, anguli B & C vero eidem arcui AD insistant. Igitur est (556) EA:ED::EC:EB.

568. Theorema IX. Si ex eodem extra circumulum puncto E (Fig: 39) ducantur duæ rectæ, quarum altera EB circumulum secet, altera Ed eundem tangat, erit tangens media proportionalis inter totam secantem, & ejus partem extra circumulum, nempe inter EB, & EA; seu $\therefore$ EB.Ed::EA.

Demonstratio. Ducantur dA, dB, erunt triacula EdB, EdA similia, cum ad E sit utrique communis, & EBd $\equiv$ AdE, quod nempe utrumque metiatur dimidius arcus Ad (466 & 465); igitur etiam dAE = EdB, & consequenter (556) EB:Ed::Ed:EA.

569. Theorema X. Si duæ rectæ sese inter duas parallelas secant, earum segmenta sunt inter se proportionalia.

Demonstratio. Triangula ABE, CED (Fig: 40) similia sunt, cum anguli ad verticem communem E oppositi æquales sint; item $EAB = EDC$, & $EBA = ECD$, utpote alterni interni (433). Quare est (555) $EA:ED::EB:EC$.

570. Problema I. Datis tribus EA, EB, ED (Fig: 40) invenire quartam proportionalem.

Resolutio. Ducantur rectæ indefinitæ AD, BC, quæ se sub quovis angulo secant: e puncto intersectionis E transferantur in easdem datæ EA, EB, & ED; jungantur primarum duarum extrema A & B recta AB, cui per extremum tertiæ D ducatur parallela DH, quæ ita secabit rectam BC in C, ut sit EC quarta proportionalis quæsitæ (569).

571. Problema II. Inter duas rectas datas CO, OL (Fig: 41) invenire mediam proportionalem.

Resolutio. Rectæ datæ CO, OL ponantur in directum, & e puncto medio earum summæ F tanquam centro describatur semicirculus CEL; excitetur e puncto O, in quo junctæ sunt, perpendicularis OE occurrens semicirculo in E, erit EO media proportionalis inter CO, & OL (565).

572. Problema III. Datis duabus rectis invenire tertiam continuam proportionalem; hoc est, ut secunda sit inter primam & quæsitam media proportionalis.

Resolutio. Est eadem, quæ problematis primi, modo supponatur secunda & tertia data esse eadem linea.

573. Problema IV. Dividere rectam datam AC (Fig: 42 N. 1) in eadem ratione, in qua secta est altera recta data AB.

Resolutio. Rectæ datæ jungantur sub quovis angulo.

gulo BAC, & jungantur earum extrema recta BC, cui per singula puncta divisionum rectæ AB agantur parallelæ Gg, Ff &c; erit ob triangula ABC, AGg, AFf &c similia, quævis pars rectæ AC (557) proportionalis parti correspondenti lineæ AB.

574. Problema V. Rectam datam ita secare, ut sit pars major media proportionalis inter totam, & partem minorem.

Resolutio. Sit data AB (Fig: 42. N. 2) erigatur in ejus extremo A perpendicularis AE æqualis dimidiæ AB; radio EA, centro E describatur circulus D A F; ducatur per B & E recta BF, & puncto B tanquam centro describatur radio BD arcus DC, qui datam AB secabit, ut petebatur, nempe ut sit $AB:BC:AC$.

Demonstratio. Quoniam BA circulum tangit, est (568) $BF:BA::BA:BD$; & hinc $BF - BA:BA::BA - BD:BD$; est autem $BF - BA = BD = BC$, cum sit $FD = BA$, utpote dupla radii EA, qui est æqualis dimidiæ AB. Similiter est $BA - BD = AC$; igitur his substitutis erit $BC:BA::AC:BC$, sive $AB:BC:AC$.

Alias hoc problema ita enunciatur: rectam datam secare in ratione media & extrema. Dicebatur etiam resolutio ejus sectio divina, ob admirandas nempe proprietates, quæ ei tribuebantur.

De Comparatione Figurarum sive de proprietatibus figurarum similium.

575. Ut clara notio duarum figurarum similium efformetur, eæ considerandæ sunt, velut quæ tum quoad perimetrum, tum quoad superficiem singulæ compositæ sunt punctis ita dispositis, ut nullum sit in altera, cui non respondeat aliquod in altera eodem modo positum, ut proinde hæ duæ figuræ exurgant e duplici combinatione punctorum eodem numero, eodemque ordine collocatorum. Eniavero inæqua-

litas tam in finitorum, quam in infinitorum ordine locum habet (354). Puncta omnia figuræ unius inter se æqualia esse debent; at dimensiones punctorum unius debent constantem rationem servare ad dimensiones punctorum alterius, quæ quidem ratio alia non est, quam quæ inter latera homologa duarum figurarum intercedit.

Quare tum concipiuntur animo duæ figuræ similes, quando cogitantur numero partium æquali constare, & eodem modo dispositarum, eandemque rationem ad sese conservantium; poterunt proinde hunc in modum definiri: *duæ figuræ similes sunt, si numero laterum æquali consent, & sint latera singula singulis homologis proportionalia, & anguli lateribus homologis comprehensi æquales.* E quo sequitur, omnia polygona regularia ejusdem speciei, consequenter etiam omnes circulos, esse figuras similes; imo etiam arcus quoslibet, quorum numerus graduum idem est.

576. Theorema I. *Utcunque figuræ similes resolvantur in triangula per diagonales ad angulos homologos ductas, erunt triangula homologa similia.*

Demonstratio. Si duo polygona ABCDE, FGHK (Fig: 43 & 44) sint ejusmodi, ut sit $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle G$, $\angle C = \angle H$, $\angle D = \angle I$, $\angle E = \angle K$; & $AB:FG::BC:GH::CD:HI::DE:IK::EA:KF$; dico si ducantur diagonales AC, AD, FH, FI, triangula ABC, FGH; item ACD, FHI; nec non ADE, FIK fore similia.

Quoniam enim $\angle B = \angle G$, & uterque lateribus proportionalibus comprehenditur, patet (558), triangula ABC, FGH esse similia; uti etiam triangula ADE, FIK, ob eandem rationem. Hoc posito est $\angle BAC = \angle CFH$, & $\angle DAE = \angle IFK$; igitur etiam $\angle BAE = \angle BAC + \angle DAE = \angle CFH + \angle IFK = \angle GFH$, seu $\angle CAD = \angle HFI$. Eodem modo ostenditur, esse an-
gu.

gulum $ACD = FHI$, & $ADC = FIH$: itaque etiam triangu-
la ACD, FHI similia sunt.

577. Theorema II. E converso Si duæ figuræ in to-
tidem triangu-
la similia resolvi possint, figuræ similes sunt.

Demonstratio. Nam ob angulos triangulorum si-
milium æquales, etiam anguli figurarum æquales
sunt; & quia latera figurarum simul pertinent ad tri-
angula similia, etiam hæc latera homologa proporti-
onalia sunt (556); quare ipsæ figuræ similes sunt
(572).

578. Theorema III. Si in duobus polygonis similibus
ducantur rectæ eodem modo determinatæ, hoc est, quæ late-
ra homologa, vel angulos homologos secant in eadem ratione;
primo hæ rectæ sunt proportionales inter se, & lateribus
quibusvis homologis polygonorum; secundo eadem dividunt
polygona in partes, quarum homologæ sunt similes.

Demonstratio. Sit ex.gr. BC in L (Fig. 43 & 44)
& latus homologum GH in M in ratione eadem divi-
sum, nempe ut sit $BC:GH::LC:MH$, aut (quod
eodem redit) sint puncta L, M in rectis BC , & GM
correspondentia, sive similiter posita. Ducantur dein
quævis duæ rectæ LN, MO , quæ faciant angulos
quoslibet æquales CLN, HMO versus eandem par-
tem; vel quæ dividant latera homologa ED, KI in
eadem ratione, ut sit $ED:KI::DN:IO$; dico, fore
 $LN:MO::CD:HI::BC:GH$, &c.

Etenim ductis NC, OH , manifestum est, trian-
gula NCD, OHI esse similia (559) ob angulos ad D
& I lateribus proportionalibus $ND, DC; OI, IH$ com-
prensos æquales; est ergo (555) $CD:HI::CN:HO$,
& angulus $DCN = IHO$; quod si igitur hi anguli æ-
qua-

quales demantur ab æqualibus DCL, IHM, remanet
 $NCL = OHM$: consequenter (558) etiam triangula
 NCL ; OHM sunt similia, & $LN:MO::LC:MH::$
 $BC:GH::CD:HI$, &c.

2do. Si simili ratione ducantur in hisce figuris
 duæ quævis aliæ rectæ, demonstrabitur eodem modo,
 eas esse inter se, ut latera quævis homologa,
 consequenter etiam eas esse proportionales rectis LN ,
 MO .

3tio. Denique evidens est, per rectas LN , MO
 secari figuras duas propositas in quatuor, quarum binæ
 homologæ $ABLNE$, $FGMOK$, sunt figuræ
 similes, & partes similes fuorum polygonorum, ut-
 pote cum earum anguli, singuli singulis, sint æquales,
 & latera homologa proportionalia, ideoque nullum
 aliud inter eas sit discrimen, quam quod altera sit al-
 terâ major eadem ratione, qua polygonum alterum
 majus est altero. Idem est de partibus $LNDC$,
 $MOIH$.

§79. *Dimensiones homologas* vocabo deinceps duas
 lineas, velut LN , MO , quæ eodem modo in duabus
 figuris similibus describuntur, aut quarum extrema
 desinunt in puncta in utraque figura similiter posita.
 Sic duo latera homologa duarum figurarum similium,
 duo radii, vel diametri, vel etiam chordæ circulorum
 arcus totidem graduum subtendentes &c, sunt di-
 mensiones homologæ: estque omnium figurarum similium
 proprietas, quod omnes earum dimensiones homologæ sint pro-
 portionales.

SECTIO SECUNDA.

*De Superficiebus.**De Superficierum perimetris, earumque Comparatione.*

580 *A*xioma vel Theorema I. *Ambitus, vel perimenter figuræ cujuscunque, est æqualis summæ laterum.*

581. Theorema II. *Perimetri duarum figurarum similium sunt inter se, ut latera, vel dimensiones quævis homologæ utriusque figuræ.*

Demonstratio. Perimeter figuræ primæ est ad perimetrum figuræ secundæ, ut est summa laterum primæ ad summam laterum secundæ; & quia figuræ per hypothesein sunt similes, habent omnia latera proportionalia (577) ita, ut latera primæ sint antecedentia, & latera secundæ consequentia rationum æqualium; est autem (310) summa antecedentium ad summam consequentium, ut quodvis antecedens separatim ad suum consequens: igitur est perimenter figuræ primæ ad perimetrum figuræ secundæ, ut quodvis latus primæ ad latus homologum secundæ, seu (578) ut dimensio quævis primæ ad dimensionem homologam secundæ.

582. Coroll. *Circumferentiæ, vel arcus circulorum ejusdem numeri graduum, sunt inter se ut radii, vel ut diametri, vel etiam ut chordæ eundem numerum graduum in circulis, vel eorum arcubus subtendentes. Nam (578) circuli, vel arcus ejusdem numeri graduum, sunt figuræ simili-*

miles; radii vero, vel diametri &c sunt eorum dimensiones homologæ (579).

De mensuris aptis determinandæ magnitudini Superficierum.

583. *Superficies*, vel *area* figuræ dicitur quantitas, quæ magnitudinem spatii lateribus figuræ comprehensi exprimit.

584. *Superficies* est extensio, in qua duæ dimensiones simul considerantur (387). Utriuslibet harum dimensionum mensura accurata est linea recta; verum ea nequit esse mensura superficiei. Sic areae aliqujus ideam nemo habet, si sciat solum, longitudinem esse 100 pedum; at si addatur, quod latitudo sit ubivis pedum 20, illico tota ejus extensio concipitur; si nempe longitudo absoluta unius pedis sit cognita; quod si hæc nesciretur, solummodo idea figuræ illius areae nasceretur, quæ scilicet conciperetur ut parallelogrammum, cujus longitudo sit latitudinis quintupla.

585. *Mensuræ* itaque *superficierum* debent esse *superficies*; quemadmodum *mensuræ linearum* sunt *lineæ*. Si quis metiri velit *superficiem* in pedibus, vel *orgyis*, adhibendæ sunt *superficies unius pedis*, vel *unius orgyæ*. Jam vero nequit cogitari *superficies unius pedis*, nisi si concipiatur spatium (consequenter figura lateribus terminata) quod ubivis in longum, & latum habeat unum pedem: & longitudo quidem illius (438) mensurari debet per lineam perpendicularem jungentem latera longitudinem figuræ terminantia; & latitudo pariter mensurari debet per perpendicularem jungentem latera, quæ latitudinem figuræ terminant: igitur *superficies unius pedis* debet esse figura, cujus singula latera, & perpendiculara quæ-

quævis inter latera opposita intercepta, sint unius pedis, ac proinde ut quadrata sit, oportet. Idem est de aliis mensurarum speciebus.

586. Universim autem hinc inferri potest, *quadratum esse mensuram communem superficierum*. Ut itaque indicetur magnitudo superficiei cujuscunque figuræ, dicitur ea esse tot digitorum, pedum, orgyrum &c. quadratarum, quo significatur, totum ejus figuræ spatium tot quadratis, quorum quodlibet sit unius digiti, unius pedis, unius orgyæ &c. tegi accurate posse.

587. Porro facile intelligitur, *numerus partium, quas continet mensura spatii in superficie, esse quadratum numeri partium, quas continet eadem mensura in longitudine*. Exempli causa, pes quadratus continet 144 quadrata, quorum singula sunt unius digiti; hexapeda quadrata continet 36 quadrata, singula unius pedis. Nam pes quadratus continet 12 series 12 digitorum quadratorum, cum cuiusvis digito latitudinis in directum jaceant 12 digiti longitudinis: eodem modo orgyæ quadrata continet sex ordines 6 pedum quadratorum.

Methodus Generalis Metiendi Superficies.

588. Si concipiatur linea AB (Fig: 19 vel 21) ita moveri usque in DC, ut sibi ipsi semper maneat parallela, facile apparet, ab ea totam parallelogrammi ABCD superficiem successive obtegi: ut enim per quodvis punctum progreditur, ita semper partem superficiei suæ æqualem tegit: est igitur hæc superficies æqualis longitudini AB toties acceptæ, per quot puncta progressa est recta AB, ut veniret in CD. Jam vero numerus hic punctorum æqualis est rectæ metienti distantiam parallelarum AB, CD, quæ sit perpen-

pendicularis (438) ex quovis puncto rectæ DC in rectam AB, etiam productam, si necesse sit, demissa velut EF, vel DG: ergo superficies parallelogrammi ABCD æqualis est numero punctorum rectæ AB toties accepto, quot sunt puncta in recta EF; sive quod idem est, est æqualis facto ex linea AB in lineam EF.

589. Perpendicularis EF, vel DG, quæ distantiam laterum parallelorum metitur, dicitur *altitudo* parallelogrammi, & latus ejusmodi parallelum vocatur *basis*. Unde

590. Theorema I. *Superficies parallelogrammi cujusvis æquatur facto ex basi in altitudinem.*

591. *Observa.* Quodvis vestigium rectæ AB, quorum summa æquatur superfici ei parallelogrammi ABCD, in se est parvum quoddam parallelogrammum, cujus latitudo est spatium motu momentaneo a recta AB occupatum; sed cum spatium hoc sit infinite parvum, nil differet ab ipso rectæ AB vestigio, cui latitudo infinite parva tribui potest; & universim dici, *superficiem figuræ alicujus æquari summæ omnium parallelarum, quæ intra talem figuram duci possunt.*

592. Theorema II. *Superficies trianguli æqualis est facto dimidio ex latere quovis ducto in perpendicularum ex angulo opposito in hoc latus (etiam productum, si opus sit) demissum.* Parallelogrammum enim per diagonalem in duo triangula æqualia dividitur: unde quodvis triangulum considerari potest, ut dimidium alicujus parallelogrammi, cujus altitudo est perpendicularis ex angulo trianguli in latus oppositum demissa.

Præsens Theorema independentem à parallelogrammis hunc in modum demonstrari potest.

Superficies trianguli cujuslibet ABC (Fig. 34) æqualis est summæ omnium parallelarum BC, GL, FK, &c.

&c, quæ a basi usque ad verticem duci possunt; jam vero omnes hæ parallelæ decrescunt in ratione Arithmetica, hoc est, earum differentia semper est eadem; nam GL differt a BC quantitate BP + TC; & FK differt a GL quantitate GO + SL &c, suntque hæ differentiæ inter se æquales, cum omnia parva triangula GBP, FGO &c æqualia sint, uti etiam ex altera parte LTC, KSL &c, consequenter BP + TC = GO + SL. Quare omnes ex parallelæ, quæ superficiem trianguli occupant, considerari possunt ut series quantitatum progressionem Arithmeticam constituentium, quarum numerum exprimat perpendicularis AX, & terminus ultimus sit BC, primus vero ipse vertex A, tanquam parallela infinite parva. Est autem summa hujus progressionis (280)

$$= BC + A \times \frac{1}{2} AX,$$
sive (cum A sit infinite parva)

$$= BC \times \frac{1}{2} AX.$$

593. Coroll: Omnia triangula, consequenter etiam parallelogramma, quæ sunt inter easdem parallelas, & basin vel eandem, vel æqualem habent, habent eandem aream: quippe cum tunc habeant eandem etiam altitudinem, quæ est distantia earum parallelarum.

594. Theorema III. Triangulorum quorumvis areæ sunt inter se in ratione composita basium & altitudinum.

Demonstratio. Superficies triangulorum sunt dimidia productorum ex eorum basibus in altitudines; sunt autem dimidia inter se, ut tota (297); igitur superficies triangulorum sunt ut producta ex eorum basibus in altitudines. Atqui (290) ratio productorum est ratio composita e rationibus factorum, seu radicum; ergo superficies triangulorum sunt in ratione composita eorum basium & altitudinum.

595. Coroll: Areæ duorum triangulorum inæquales,
Gg
quo-

quorum bases æquales sunt, sunt inter se ut eorundem altitudines; & areæ inæquales triangulorum æqualem altitudinem habentium, sunt ut eorum bases.

Demonstratio. Sunt enim in utraque hypothesi ut producta duarum quantitatum inæqualium in eandem tertiam; igitur (296) ut quantitates illæ inæquales.

596. Theorema IV. Si duorum triangulorum altitudines sint in ratione reciproca basium, eorum areæ sunt æquales.

Demonstratio. Nam cum tunc sit basis unius ad basin alterius, ut alterius altitudo ad altitudinem illius, est factum ex basi primi in suam altitudinem æquale facto e basi secundi in suam altitudinem (300).

597. Theorema V. E converso si duo triangula dissimilia habeant areas æquales, earum dimensiones sunt in ratione reciproca.

Demonstratio. Etenim in hac hypothesi dimensiones unius trianguli efficiunt productum æquale producto ex dimensionibus alterius: igitur (302) dimensiones unius sunt termini extremi proportionis, & dimensiones alterius sunt medii: v. g. altitudo primi est ad altitudinem secundi, ut basis secundi ad basin primi trianguli. Quare dimensiones istæ constituunt rationem reciprocam.

598. Theorema VI. Areæ triangulorum similium sunt in ratione duplicata, sive ut quadrata dimensionum homologarum.

Demonstratio. Quoniam (579) in figuris similibus dimensiones homologæ proportionales sunt, areæ duorum triangulorum sunt inter se ut producta terminorum proportionalium; atqui (291) ratio productorum terminorum proportionalium est ratio duplicata; fit igitur areæ triangulorum similium in ratione duplicata. Sed ratio duplicata est (298) ratio quadrati unius antecedentis, quod rationem duplicatam componit, ad qua-

quadratum sui consequentis; igitur superficies duorum triangulorum similium sunt inter se, ut quadratum dimensionis cujusvis acceptæ in uno triangulo, ad quadratum dimensionis homologæ in altero, id, quod generatim enunciatum dicendo, quod sint in ratione duplicata dimensionum homologarum quarumvis.

599. Theorema VII. *Superficies figuræ cujuscunque æqualis est summæ superficierum omnium triangulorum, in quæ resolvitur.*

600. Theorema VIII. *Ut igitur habeatur superficies polygoni irregularis, resolvendum est in triangula, omniumque horum areæ colligendæ in unam summam (592).*

601. Theorema IX. *Superficies polygoni regularis æqualis est factæ ex perpendiculari in unum latus e centro demissa, & in dimidiam perimetrum ducta.*

Demonstratio. Cum omnia triangula, in quæ ductis radiis polygonum regulare resolvitur, sint inter se æqualia (531), atque eandem habeant propterea altitudinem $= CI$ (Fig: 26), superficies totius polygoni regularis æqualis $CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE + CI \times \frac{1}{2} EF + CI \times \frac{1}{2} FG + CI \times \frac{1}{2} GH + CI \times \frac{1}{2} HA$. Atqui hæc omnia facta (222) æqualia sunt producto ex CI in $\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} EF + \frac{1}{2} FG + \frac{1}{2} GH + \frac{1}{2} HA$, hoc est in dimidiam perimetrum polygoni.

602. Coroll: I. *Superficies circuli æqualis est factæ ex ejus radio in semicircumferentiam.*

603. Coroll: II. *Superficies circuli æqualis est quadrato, cujus latus sit medium geometricè proportionale inter radium, & rectam æqualem semicircumferentiæ (316).*

604. Coroll: III. *Area sectoris circuli æqualis est factæ ex radio in rectam æqualem semiarcui sectoris. Etenim area sectoris circuli est ejusmodi portio polygoni re-*

gularis, qualis per HCDBAH (fig: 26) repræsentatur. Atqui evidens est, aream hujus portionis æquari factò ex CI in dimidium perimetri HABD.

605. Theorema X. *Polygonum quodvis ABCDE* (Fig: 36) *reduci potest ad triangulum AEG ejusdem areæ.*

Demonstratio. Per diagonalem quamvis BD abscindatur triangulum DBC, ex cujus vertice C agatur CF diagonali BD parallela occurrens lateri AB, producto, si necesse sit, in F; jungantur D & F; habebitur polygonum AFDE ejusdem areæ cum dato, & cujus angulorum numerus unitate minor est. Nam si ex triangulis DBC, DBF æqualibus (593) auferatur triangulum commune DHB, manebit DHC æquale triangulo BHF. Quod si igitur ducta DF abscindatur a polygono dato triangulum DHC, & ejus loco accedat triangulum BHF æquale, erit polygoni novi AFDE area æqualis areæ dati. Hac operandi methodo novum polygonum AFDE mutari potest in aliud æqualis areæ, & angulos uno pauciores habens, donec successive reducatur ad unicum triangulum.

606. Coroll: Ex hoc, & præcedentibus Theorematis inferitur, *superficiem figuræ cujuslibet esse vel unicum productum duarum dimensionum, vel ad unicum reduci posse.*

607. Theorema XI. *Areæ duarum quarumcunque figurarum similium sunt inter se in ratione duplicata, sive ut quadrata dimensionum homologarum quarumvis.*

Demonstratio. Quoniam figuræ duæ similes ad totidem triangula similia reducuntur (578), quorum areæ sunt ut quadrata dimensionum homologarum (598); & (579) omnes dimensiones homologæ sunt in figuris similibus tum inter se, tum cum aliis proportionales, consequens est, ut areæ omnium triangulorum homologorum duarum figurarum similium, sint
in

in ratione quadratorum dimensionum homologarum quarumvis earundem figurarum, adeoque ut sint inter se proportionales. Hoc posito, manifestum est, superficiem primæ figuræ esse ad superficiem secundæ, ut est summa arearum triangulorum, ad quæ figura prima reducitur, ad summam arearum triangulorum, ad quæ reducitur secunda figura: ac propterea (310) ut est area unius cujuscunque trianguli figuræ primæ ad aream trianguli homologi secundæ; aut denique ut est quadratum dimensionis cujusvis figuræ primæ ad quadratum dimensionis homologæ in figura altera.

608. Coroll. I. *Areae circulorum sunt inter se ut quadrata radiorum, vel diametrorum.*

609. Coroll. II. *Dum itaque servata figuræ similitudine area polygoni augenda vel minuenda est, sequens ineunda est proportio: ut area polygoni dati est ad aream polygoni quæsitæ; ita est quadratum lateris cujusvis polygoni dati ad quadratum lateris homologi polygoni quæsitæ.* Hac ratione reperientur singula latera. Aut verò si jam per expositam analogiam latus unum repertum est, quodvis alterum ex sequente invenietur: *ut latus polygoni dati est ad homologum per primam analogiam inventum, ita est quodvis aliud latus polygoni dati ad homologum polygoni quæsitæ.* V. g. oporteat construere parallelogrammum A simile dato B, ut area A sit ad aream B ut 3 ad 1, sive tripla. Sit parallelogrammi dati B latus majus 6 pedum, minus 4 pedum. Fiat: ut 1 est ad 3, ita sunt 36 (quadratum lateris 6 pedum) ad 108, quadratum lateris majoris parallelogrammi A, cujus radix proxime est 10, 392 pedum. Dein fiat, ut 6 ad 10, 392; ita sunt 4 ad 6, 928 pedes, quod erit latus minus parallelogrammi A. Unde lateri majori 10 pedes, 4 digiti, 8 lineæ tribuendæ sunt, & minori 6 pedes, 11 digiti, 1 ½ lineæ, ut parallelogrammi A area sit tripla areæ parallelogrammi dati B.

610 Theorema XII. Si trium polygonorum similium dimensiones quavis homologæ ejusmodi sint, ut sumptæ pro lateribus constituent triangulum rectangulum; area illius polygoni, cujus dimensio est hypotenusa trianguli, æqualis est summæ ararum reliquorum duorum; & area utriusvis polygoni, cujus dimensio est latus circa angulum rectum, æquatur differentiæ ararum polygoni, cujus dimensio est hypotenusa, & alterius, cujus dimensio est alterum latus circa angulum rectum.

Demonstratio. Nam areæ trium ejusmodi polygonorum sunt inter se ut quadrata trium laterum trianguli rectanguli; est autem quadratum hypotenuse (562) æquale summæ quadratorum laterum circa angulum rectum: & quadratum lateris unius circa angulum rectum est æquale differentiæ quadrati hypotenuse, & quadrati alterius lateris; igitur idem est de areis horum polygonorum dicendum.

611. *Scholium.* Eruitur hinc expedita methodus Geometrica construendi polygoni, quæ sint datorum duorum similium summa, vel differentia. Si petatur polygonum æquale summæ, latera homologa datorum quælibet constituentur ad angulum rectum; hypotenusa extrema eorum jungens erit latus homologum polygoni quæsiti. Si desideretur polygonum æquale differentiæ datorum, super latere quovis majoris tanquam diametro describatur semicirculus, & ex altero diametri hujus extremo transferatur in peripheriam latus homologum alterius polygoni minoris; tum punctum peripheriæ, in quod cadit, jungatur cum extremo altero diametri; erit recta hæc latus homologum polygoni petiti.

Nonnullæ Observationes in quadraturam Circuli.

612. Quamvis per superiores propositiones nota sit ratio circumferentiæ, & areæ unius circuli ad circumferentiam vel aream alterius in eorum radiis vel diametris, non tamen adhuc ratio diametri circuli ad suam circumferentiam exacta determinari potuit, ita, ut data in numeris diametro, exhiberi etiam circumferentia in numeris accuratis queat: unde neque ve-
ra

ra magnitudo areæ habetur, quæ nempe est (602) factum ex semidiametro in semicircumferentiam. Atque hoc intelligi debet, dum dicitur, *quadraturam circuli nondum esse inventam*. (Usurpatur autem vox *quadratura*, quod quadratum (586) sit communis mensura superficierum).

613. Summorum Mathematicorum conatus eo tandem recidit, ut demonstraretur, fieri non posse, ut certis quibusdam methodis quadratura hæc reperiri, attamen facile esse propius semper, propiusque in infinitum accedere; & sanè accuratio, quam obtinuimus jam, plusquam sufficiens est applicationi Geometriæ, etiam dum exactitudine summa opus est; ut Geometriæ peritiōres quadraturam absolutam circuli inter ea referant, quorum pretium sit sola pulchritudo & raritas, ideoque operam suam rerum magis utilium inventioni impendant: atque id eo magis, quod admodum certum habeant, quod si ratio vera diametri circuli ad suam circumferentiam numeris exprimi posset, ii numeri adeo forent magni, ut in calculis eorum usus esse non posset, ac propterea in præxi semper recurrendum esset ad eos, quos nunc ignorata illa quadratura adhibemus. Verum qui rerum Mathematicarum non nisi superficiariam cognitionem habent, plerumque magna cum confidentia celebratissimi hujus Problematis solutionem aggrediuntur, licet sæpe ne quidem quæstionis naturam satis perspectam habeant; nec desunt etiam, qui sibi persvadeant, se eam invenisse.

614. Plures repertæ sunt methodi absolute quadrandi spatia nonnulla arcibus circulorum, vel arcibus & lineis rectis comprehensa. Exempli causa è veteribus Geometris Græcis Hippocrates Chius ostendit, quod si super lateribus & hypotenusa trianguli rectanguli describantur semicirculi (velut in Fig:

45 N. 3) bina spatia curvilinea AECGA, CFBHC simul sumpta æquantur areæ trianguli rectanguli ACB.

Hæc spatia curvilinea dicuntur *lunulæ* Hippocratis.

Demonstratio. Cum areæ circulorum sint inter se, ut quadrata eorum diametrorum (608), summæ arearum sunt inter se ut summæ quadratorum diametrorum; est autem (562) quadratum diametri AB æquale summæ quadratorum diametrorum AC, BC; igitur area semicirculi ACHB æquatur summæ arearum semicirculorum AEC, CFB: quare si a semicirculo ACHB auferantur partes ACG, & CBH communes semicirculis AEC, CFB; manebunt lunulæ AECGA + CFBHC æquales areæ trianguli ACB.

Si triangulum rectangulum foret isosceles, demissa in hypotenusam perpendicularis divideret illud in triacula æqualia, quorum utrumvis esset æquale suæ lunulæ. Variæ aliæ partes circuli quadrabiles inveniri possunt in Monumentis Academiæ Regiæ Scientiarum ad An. 1701 pag. 17, & An. 1703 pag. 21. Videatur etiam in Fig: 45 N. 2 spatium CDHAIKBC, quatuor circuli quadrantibus terminatum, & quadrato CDAB æquale.

615. Ratio diametri ad peripheriam circuli proxime determinari potest vel mechanice, conferendo v. g. cum diametro longitudinem fili circumferentiæ exacte undique circumplicati; vel Geometrice, calculando perimetrum & dimensiones polygoni regularis magno laterum numero constantis. Atque hunc in modum Archimedes rationem propinquam diametri ad circumferentiam reperit 7 ad 22; alii statuerunt eam 1 ad 3, 14159265, & si porro 127 notæ decimales jungantur, approximatio, est prope incredibilis. Metius eandem determinat 113 ad 355, quæ in numeris parvis omnium est accuratissima.

616. Data itaque diametro circuli, ejus circumferentia e sequente proportionem quærenda est: ut 113 ad 355, ita est diameter circuli data ad ejus circumferentiam. Si præterea desideretur circuli area, ejus semidiameter

ter (602) data ducatur in semicircumferentiam methodo exposita inventam.

*Proprietates Planorum, sive superficierum
Planarum.*

Supposuimus hucusque, omnes lineas, & figuras, esse in plano sitas, & spatia ab iis comprehensa describi motu punctorum vel linearum in plano, cujusmodi dari (395) posse, postulavimus; nunc jam generis & modum, quo Geometrice planum producitur, ostendemus.

617. *Hypothesis.* Concipiatur recta AB libere in aere posita, cui altera indefinita ED sit perpendicularis (Fig: 46); cogitetur recta AB circa se ipsam alieuus axis instar moveri, quin situm suum mutet: patet manifeste, a recta altera ED debere describi superficiem planam CCCDDD; atque hanc superficiem fore ad rectam AB perpendicularem.

Est igitur planum ejusmodi superficies, ut ab omnibus punctis lineæ rectæ super ea positæ, & utcumque conversæ, semper tangatur.

618. Si dictæ lineæ non insisterent altera alteri perpendiculariter, figura descripta plana non esset. Exempli gratia si recta MN (Fig: 54) circa seipsam volvatur, eique juncta sit altera MB sub angulo ad M acuto NMB, facile intelligitur, a recta MB describi debere superficiem rotundam, in apicem ex una parte coeuntem, extrorsum convexam, & intus cavam; cui sane recta non ita imponi potest, ut in quovis situ omnia ejus puncta hanc superficiem contingant.

619. Theorema I. Rectæ plano impositæ nequit pars esse in plano, pars supra, vel infra illud.

Hh

620.

620. Coroll. I. Si duo puncta rectæ sint in plano, tota recta in eo est.

621. Coroll. II. Nequit pars una plani A congruere cum plano B, pars altera esse supra vel infra illud. Alias etiam recta posita in plano A posset habere partem in plano B, partem supra vel infra planum B, quod est absurdum.

622. Theorema II. Tria puncta non in eadem recta posita, situm, seu positionem plani determinant.

Demonstratio. Concipiatur planum aliquod poni supra quotcunque puncta in directum jacentia; facile concipitur, hæc puncta, si immobilia sint, fore fulcrum aliquod, circa quod, tanquam axem, planum libere converti possit. At si cogitetur planum imponi tribus punctis non in eadem linea recta sitis, ea erunt fulcrum, circa quod planum nequit rotari, sed quo in situ constante retinetur. Igitur tria puncta non in directum posita, situm, seu positionem plani determinant.

623. Coroll. Per quodvis triangulum determinatur planum, ejusque positio.

624. Theorema III. Recta ad planum perpendicularis, est etiam perpendicularis ad omnes rectas in eodem plano sitas, & per punctum, in quo insistit plano, transcurrentes. Sic AE est perpendicularis omnibus rectis CED, CED &c (Fig: 46).

625. Theorema IV. Duæ rectæ eidem plano perpendiculariter, vel sub æqualibus angulis versus eandem partem insistentes, sunt inter se parallelæ, & vicissim.

626. Theorema V. Duæ rectæ se interfecantes sunt in eodem plano; seu potest semper concipi planum, in quo utraque sita sit.

Demonstratio. Nam præter punctum intersectionis

nis potest in utraque assumi unum punctum ad arbitrium, quæ consequenter erunt tria puncta non in directum jacentia, per quæ consequenter (622) positio plani determinetur, in quo utriusque lineæ bina puncta existunt: sunt igitur (620) totæ in eodem plano.

627. Theorema VI. *Si duæ rectæ in eodem plano existentes secantur a tertia, extra commune earum punctum intersectionis, si quod habent, etiam tertia erit in eodem plano: quippe cum duo ejus puncta, in quibus duas illas secat, in eodem plano sint.*

628. Theorema VII. *Tria puncta non in eadem recta sita non possunt esse duobus diversis planis communia.*

Demonstratio. Tria puncta non in eadem recta posita situm plani determinant. Quod si jam tria ejusmodi puncta diversis duobus planis possent esse communia, spatium a rectis hæc puncta jungentibus comprehensum esset commune duobus planis: unde alterum haberet partem congruentem cum altero, partem vel supra, vel infra alterum, quod est absurdum (621).

629. Coroll: *Intersectio duorum planorum debet esse linea recta.* Nam intersectio debet esse linea, cujus omnia puncta sint utrique plano communia.

630. *Hypothesis.* Concipiatur planum quoddam immobile A, cui alterum planum B rectis terminatum, (nempe polygonum quodvis) superponatur. Quoniam plana omni profunditate carent, unicum planum constituent. Cogitetur jam planum B circa aliquod latus suum, tanquam circa axem semper cum plano A congruentem, converti, manifestum est primo, quam primum hic motus incipit, præter latus, circa quod planum B convertitur, nihil manere hisce planis commune. 2do, planum B successive transi-

re per omnes gradus inclinationis cum plano A, si tandiu rotetur, donec ex altera parte rursus contingat planum A. 3tio, planum B fore tunc perpendicularare ad planum A, quando neutram in partem magis inclinatur. 4to, diversas inclinationes metiendas esse per numerum progressionum momentaneorum cujusvis puncti plani B a puncto correspondente plani A. Hæc itaque mensura erit arcus circuli, cujus centrum est in recta, circa quam planum B movetur: & quoniam centrum debet esse in eodem plano cum circulo, centrum hujus arcus debet esse in recta suo motu plani ab arcu terminatū generante. Atqui recta (618) nisi sit perpendicularis ad illam, circa quam velut axem convertitur, nequit generare planum: ergo *centrum arcus inclinationem planorum metientis est in perpendiculari ex quovis arcus puncto ad planorum intersectionem ducta*. Si itaque describatur semicirculus, cujus centrum sit in linea utrique plano communi, & cujus planum sit ad eorum communem intersectionem perpendicularare, ejus gradus metientur inclinationes quaslibet plani mobilis cum immobili.

Illud etiam facile intelligitur, quod si a plano mobili B secaretur planum immobile A, & circa communem intersectionem planum mobile converteretur, pars plani mobilis ultra immobile existens eodem tempore conficeret suum semicirculum, easdemque successive acquireret inclinationes ex parte opposita, quas pars cis planum immobile haberet.

Sequitur hinc, eadem convenire duobus planis ad sese inclinatis, quæ competunt lineis rectis sub quovis angulo concurrentibus. Unde . . .

631. Theorema VIII. *Si planum insistat alteri plano, facit duos angulos deinceps positos rectos, vel quorum summa æquetur duobus rectis.*

632. Theorema IX. Si duo plana se secent, anguli ad verticem oppositi sint æquales.

633. Theorema X. Summa quocunque angulorum a planis se in eadem recta intersectantibus comprehensorum est 360 graduum.

634. Theorema XI. Ex eodem plani puncto unica perpendicularis ad planum potest erigi; & ex eodem extra planum puncto unica perpendicularis ad planum potest demitti.

635. Theorema XII. Distantia puncti a plano est perpendicularis ab eo puncto in planum ducta.

636. Theorema XIII. Si planum secet duo vel plura plana parallela inter se, sunt anguli alterni externi; item alterni interni inter se æquales; & anguli interni ad eandem partem sunt alter alterius complementum ad duos rectos; uti etiam externi ad eandem partem. Et e converso.

637. Theorema XIV. Si planum secet duo vel plura plana inter se parallela, etiam lineæ intersectionum sunt inter se parallelae. Nisi enim lineæ intersectionum essent parallelae, productæ alicubi possent sibi occurrere; igitur etiam ipsa plana, in quibus existunt, alicubi possent concurrere, consequenter contra hypothesin non essent parallela.

SECTIO TERTIA.

De Solidis.

638. Corpus, five Solidum dicitur quælibet quantitas continua, vel extensio trium dimensionum, nempe in longum, latum, & profundum.

Plerumque solida duobus modis considerantur:

I^o

1^o Ut genita motu planorum, quemadmodum planum ut genitum motu lineæ rectæ; & ipsa linea ut producta motu puncti.

Hunc in modum si concipiamus solidum, illud nil aliud est, quam spatium occupatum a vestigiis plani, seu potius, nil aliud, quam collectio planorum profunditatis infinite parvæ, quorum numerus infinitus æqualis est numero punctorum lineæ, quæ viam a plano solidum generante descriptam metitur. Singula ejusmodi plana dicuntur *elementa* solidi.

639. Generantur solida, sive per motum rectilineum plani sibi ipsi semper paralleli; sive per motum circularem, dum figura rectilinea circa lineam immobilem rotatur, quæ *axis* solidi vocatur.

640. II^o. Possunt etiam solida concipi tanquam composita ex aliis solidis sive similibus, sive dissimilibus, invicem conjunctis, quorum binæ dimensiones ut infinite parvæ considerantur. Atque hujusmodi solida minima dicuntur itidem *elementa* illius, quod componunt.

641. Solida superficiebus planis terminata, vocabulo generali *polyedra* appellantur, atque nomina peculiariora *tetraedri*, *pentaedri*, *hexaedri* &c, a numero planorum 4, 5, 6 &c, quibus clauduntur, sortiuntur. *Polyedra regularia* sunt, quorum anguli omnes æquantur, & plana sunt polygonia regularia & æqualia ejusdem speciei.

642. Si cogitetur planum per solidum transiens, illudque in duas partes secans, figura, quam in superficie solidi planum occurso suo efformat, dicitur *sectio* solidi: nec dubium est, hanc sectionem esse polygonum tot laterum, quot planis superficiei solidi planum secans occurrit.

GENESIS, ET PROPRIETATES SOLI-
DORUM, QUÆ FIUNT MOTU RE-
CTILINEO.

643. I. *Hypothesis.* Sit figura quævis plana $ABCDE$ (Fig: 47 vel 48) primo super alio plano posita; dein secundum longitudinem rectæ MN ita moveatur usque in $FGHIK$, ut sibi ipsi semper maneat parallela: hæc figura motu suo generat solidum, quod *prisma* dicitur.

Hic motus si perpendatur, evidens est I^o, a lateribus AB , BC , CD describi parallelogramma $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$ &c. II^o omnia vestigia plani generantis, sive prismatis elementa, & utramque basin, esse polygona æqualia, & similiter posita. Unde universim

Prisma est corpus basibus æqualibus & parallelis; ac lateribus parallelogrammis terminatum.

644. Prisma vel est *rectum*, vel *obliquum*, prout recta MN , juxta quam polygonum generans movetur, vel perpendicularis, vel obliqua fuerit ad basin prismatis.

645. Recta PQ (Fig: 48.), vel Pq (Fig: 47), quæ per medium omnium solidi elementorum transit, dicitur *axis* prismatis, estque parallela & æqualis singulis lateribus AF , BG , CH &c., cum sit via centri polygoni prisma generantis.

646. Perpendicularis PQ (Fig: 47) ex quovis basi unius puncto in planum basis alterius, etiam productæ, si necesse sit, demissa, est *altitudo* prismatis.

647. Coroll. I. *Altitudo prismatis recti est æqualis ejus*

ejus axi; altitudo vero prismatis obliqui eo minor est axe, quo major est solidi ad planum baseos inclinatio.

648. Coroll. II. *Altitudo solidi cujusvis elementis parallelis constantis exprimit numerum elementorum. Exprimit enim distantiam planorum extremorum solidi: jam vero inter hæc plana extrema nequeunt plura esse elementa, quam sint puncta in linea distantiam eorum metiente: igitur si elementa sint plana parallela, eorum numerum exprimit altitudo solidi.*

649. *Prismatum diversæ sunt denominationes, ut diversæ sunt species polygonorum generantium. Si hoc polygonum sit triangulum, prisma appellatur triangulare; si polygonum sit quadrilaterum, prisma sit quadrangulare; si pentagonum sit polygonum generans, etiam prisma est pentagonum, &c; si polygonum sit circulus, atque linea, cujus directionem in motu sequitur, ad ejus planum perpendicularis, prisma genitum cylinder rectus vocatur (vide Fig: 49).*

650. *Si polygonum prisma generans sit parallelogrammum, prisma genitum dicitur parallelepipedum; si parallelogrammum simul sit rectangulum, atque prisma rectum, vocatur parallelepipedum rectangulum (vide Fig: 50). Si polygonum generans sit quadratum, prisma, si rectum sit, habeatque axem lateri quadrati illius æqualem, cubus, vel hexaedrum regulare est (vide Fig: 51).*

651. II. *Hypothesis. Sit figura quævis plana AB CDE (Fig: 52 & 53), quæ super alio plano sita, moveatur juxta rectam quamvis MN (ad planum figuræ perpendicularem, vel inclinatam), ita, ut post singulos progressus in ea recta momentaneos omnia figuræ latera decrescant in progressionem Arithmetica; v. g. ut primo motu momentaneo peracto quodvis latus minuatur $\frac{1}{2}$ suæ longitudinis, post alterum progressum infinite parvum rursus singula latera amitt-*

tant $\frac{1}{2}$ primæ longitudinis &c, itaque deinceps, ut cum figura ad M pervenerit, ejus latera evaserint infinite parva, neque amplius a puncto differat: solidum per figuram hunc in modum decrescentem genitum, *Pyramis* dicitur. Punctum M ejus *vertex*, & polygonum ABCDE *basis*.

Liquet autem in hac genesi pyramidis, a singulis lateribus figuræ generantis AB, BC, CD describi triangula ABM, BCM, CDM &c, spatio nempe trianguli ab infinitis parallelis occupato, quæ in progressionem Arithmetica a Zero (qui verticem repræsentat) usque ad basin crescunt.

652. Unde 1^o universim *pyramis est solidum, cujus basis est polygonum, & plana lateralìa triangula.*

653. 2^o. Recta MN a vertice M ad punctum baseos medium N ducta; dicitur *axis* Pyramidis; ejus altitudo est perpendicularis MN (fig: 52), vel Mn (figura 53), æqualis, vel minor *axe*, ut *pyramis* vel *recta*, vel *inclinata* est.

654. Pyramidis nomina sunt varia, ut *polygona* eam generantia varia sunt. Si polygonum est triangulum, etiam *pyramis* est *triangularis*; si triangulum hoc est æquilaterum, & præter axem perpendiculari, etiam plana lateralìa sunt triangula æquilatera, *pyramis* est *regularis*, sive *tetraedrum regulare*. Si polygonum est quadrilaterum, fit *pyramis quadrangularis*, sive quatuor planis lateralibus terminata: si illud est pentagonum, *pyramis* quoque *pentagona* est &c. Si denique planum generans est circulus; axisque ad ejus planum perpendicularis, *conus rectus* nascitur. Si axis esset inclinatus ad hoc planum, *conoides* diceretur.

655. Si in genesi exposita pyramidis concipiatur motus polygoni generantis fisti, antequam ejus late-

ra evanescent, pyramis, vel conus genitus, dicitur *pyramis*, vel *conus truncatus* (vide Fig: 55): hæc enim solida spectari possunt instar pyramidum, vel conorum, quorum pars plano parallelo ad basin abscissa sit.

De genesi & proprietatibus Solidorum, quæ sunt motu Circulari.

656. I^o Duplici modo genesis cylindri recti per motum circulare concipi potest, nempe si imprimis cogitetur rectangulum MABN (Fig: 49.) circa latus suum MN immotum (quod dein axis cylindri erit) rotari; deinde si bini circuli CA, DB, quorum centra M & N sint in eadem recta ad plana eorum normali, supponantur immobiles, atque recta AB per eorum circumferentiam moveri.

657. Potest denique cylinder considerari velut compositus e fasce prismatum rectorum, æque altorum, infinite parvarum, & æqualium basium, quæ exacte occupent areas circulorum æqualium, quorum prismatum numerus consequenter æquet numerum punctorum, superficiem circulorum constituentium.

658. II^o Conus rectus motu circulari generari potest, si imo, triangulum rectangulum MNB (Fig: 54) rotetur circa unum latus MN angulum rectum comprehendens, quod axis Coni erit; hypotenusa describet ejus superficiem, & latus alterum circa angulum rectum NB erit radius baseos. 2do. Si recta MN circulo BD in centro perpendiculariter insistenti jungatur ad extremum punctum M recta MB, ejusque extremum B perpetuo in peripheria circuli incedat, dum ipsa circa rectam MN rotatur. E quo intelligitur, puncta omnia perimetrum baseos coni recti constituentia a vertice M æqualiter distare.

659. Conus truncatus generatur, si trapezium ABND (Fig: 55), cujus duo latera AB, ND sint inæqualia, & ad latus AN perpendicularia, circa idem latus AN rotari cogitetur.

660. III^o. Si semicirculus circa suam diametrum revolvatur, solidum inde genitum globus, vel sphaera appellatur.

Est itaque sphaera solidum, cujus superficiei omnia puncta ab aliquo intra illud sito æqualiter distant, diciturque punctum illud centrum.

661. Si concipiantur ad singula puncta P, P &c (Fig: 69) diametri circuli genitoris erectæ perpendiculares, atque in circumferentia terminatæ, MP, MP &c, evidens est, semicirculo S M s circa suam diametrum S s revolutò, eas rectas fore radios tot circulorum, quot inter puncta S & s existere possunt, qui adeo pro Cylindris infinite parvæ & æqualis altitudinis haberi possint, sphaeræque elementis, diametris basium eorum in ratione chordarum Mm, Mm, quæ parallelæ intra circulum duci possunt, crescentibus, & decrescentibus.

At si semicirculus genitor spectetur ut dimidium polygoni regularis (Fig: 58) infinitorum laterum, ex cujus singulis angulis ad diametrum d L demissæ sint perpendiculares DT, EX, GC, &c, patet, binas quasque ejusmodi perpendiculares vicinas constituere trapezia d FDT, TDEX, XEGC &c, atque revolutione semicirculi circa diametrum d L ab his trapeziis totidem conos truncatos efformari OFDB, BDEA, AE GP &c. Hinc potest etiam, hac facta hypothese, sphaera concipi tanquam composita ex conis truncatis infinitis, diversæ, attamen infinite parvæ, altitudinis.

Quod si denique cogitentur intra semicirculum genitorem tot descripti semicirculi concentrici, quot

puncta sunt in radio; manifestum est, semicirculo genitore circa diametrum revoluta, debere ab omnibus semicirculis concentricis describi totidem superficies sphaericas concentricas, posseque ideo sphaeram spectari ut compositam ex infinitis superficiebus, sive sphaeris cavis, crassitiei infinite parvae & aequalis, quarum alia semper aliam intra se concludat.

662. *Axis sphaerae potest dici quavis recta per ejus centrum transiens, & utrinque in superficie terminata.*

663. *Omnes igitur sphaerae axes inter se aequales sunt, cum singuli aequentur summæ duorum radiorum.*

664. Cum sphaera ea, qua diximus, ratione generetur, clarum est, quemvis ejus axem posse haberi pro axe semicirculi genitoris: quod nempe summa sit ejus figurae regularitas & uniformitas.

665. Sequitur hinc I^o; *quomodocunque sphaera per planum secetur, ejus sectionem semper fore circulum.* Quod si enim per centrum sphaerae concipiatur transire axis ad sectionis planum perpendicularis, idem considerari potest ut diameter circuli genitoris (664), ideoque planum secans; cum occurrat diametro perpendiculariter, non aliter transibit per sphaeram, quam ut congruat cum aliquo ejus elemento, quæ omnia sunt circuli (661).

666. II^o. *Sectiones sphaerae per planum quodlibet fore circulos eo majores, quo planum propius ad centrum transit, & vicissim; atque adeo sectionem maximam eam esse, quæ per ipsum sphaerae centrum transit.* Etenim sectionum harum diametri sunt chordæ, quæ eo majores sunt, quo sunt propiores centro (453); maxima autem omnium est ipsa diameter.

667. III^o. Ob hanc causam *circulum maximum sphaerae dici illum, qui cum ipsa sphaera commune habet*

cen-

centrum; alium vero vocari *circulum minorem sphaeræ*,
cujus planum per centrum sphaeræ non transit.

668. IV^o. Denique considerari posse sphaeram
tanquam constantem infinitis pyramidibus infinite
parvis, quarum bases sint ipsa superficiei sphaeræ pun-
cta, apices vero omnium in centro concurrant. Quin-
ob regularem sphaeræ figuram supponi potest, omnia
superficiei puncta, quæ pyramidum bases sunt, esse
polygona regularia infinite parva, & æqualia inter se;
ideoque concipi possunt vel ut triacula æquilatera, vel
ut quadrata, vel ut hexagona, cum tres istæ species
polygonorum regularium solæ sint ejusmodi, ut quot-
cunque eorum possint habere latera communia, si-
mulque totum spatium explere.

De Polyedris, eorumque Comparatione.

669. *Angulus solidus* dicitur angulus, qui oritur jun-
ctis verticibus plurium angulorum planorum, ad sese
in vicem inclinatorum, ac propterea junctis binorum
quorumvis lateribus in unum apicem excurrentium.
Hujusmodi sunt apices pyramidum, anguli prisma-
tum &c. *Anguli solidi* æquales sunt, qui a totidem
planis, quorum homologi æquales sunt, & eodem
modo positi, comprehenduntur.

Pro mensura anguli solidi adhibenda est sphaera,
uti circulus adhibetur ad metiendos angulos planos.
Unde vertex anguli solidi concipiendus est tanquam
in centro sphaeræ arbitrarii radii constitutus: erit qui-
vis angulus planus solidum componens in plano alicu-
jus circuli maximi sphaeræ (667), atque mensuram
habebit ejus circuli maximi arcum inter plani anguli
crura interceptum, cujus arcus chorda est basis an-
guli plani; ut proinde mensura anguli solidi sit summa
gra-

graduum contentorum in arcubus ab ejusmodi chordis subtenfis.

Quoniam cuivis angulo plano solidum componentilatus unum commune esse debet cum angulo plano contiguo, clarum est, arcus circulatorum maximorum angulos planos metientes æque debere inter se conjungi, ac eorundem chordas, quæ proinde polygonum quoddam sua perimetro comprehensum efficiant, quod sit instar basis anguli solidi.

670. Theorema I. *Saltem tribus opus est angulis planis, ut efformetur solidus.* Etenim simplicissimum polygonorum, quod basis esse possit anguli solidi, est triangulum.

671. Theorema II. *Maximus angulorum planorum solidum componentium debet esse minor summa reliquorum.* Nam si æqualis foret summæ reliquorum, arcus sphaeræ, qui eum metitur, æquaretur summæ arcuum, qui omnes reliquos metiuntur, ac propterea fieri non posset, ut arcus cæteri extremis suis juncti pertingerent ad extrema puncta arcus angulum maximum metientis, nisi si cum eodem congruerent, ideoque hi arcus omnes, eorumque chordæ, in eodem existerent plano, id, quod mensuræ anguli solidi repugnat. Magis adhuc absurdum foret, si poneretur angulus planorum maximus excedere summam reliquorum, quippe cum in hac hypothese arcus sese suis extremis complecti haud possent.

672. Theorema III. *Summa omnium angulorum planorum solidum componentium minor est 360 gradibus, saltem si angulus solidus non fiat ex angulis partim procurrentibus, partim regredientibus.* Etenim si summa esset 360 graduum, concipi non posset, qui arcuum sphaeræ angulos planos metientium extrema inter se jungantur, nisi constituerent exacte circumferentiam circuli maximi;

ximi; & tum juncti omnium vertices forent sane in eodem plano, & nequaquam angulum solidum efficerent: aut vero si ita iidem anguli plani alter ad alterum inclinarentur, ut tum ipsi, tum eorum chordæ angulos partim procurrentes, partim regredientes constituerent. Quod si summa angulorum planorum excederet 360 gradus, evidens est, futurum, ut anguli partim procurrentes, partim regredientes ori-
rentur.

673. Theorema IV. Si duo anguli solidi A, a , constantes singuli tribus planis, habeant duos planos B, D æquales duobus b, d (singulos singulis), ac æqualiter inter se inclinatos, etiam anguli solidi æquales erunt.

Demonstratio. Sumptis enim lateribus omnibus angulorum planorum æqualibus (uti dum, angulo solido in centro sphaeræ posito, ad superficiem usque pertingunt), manifestum est, ob æqualitatem inclinationis, & ipsorum duorum angulorum planorum cum aliis duobus, quod anguli plani B, D (secluso interim tertio) efficiant angulum quendam cavum, qui accurate intra se recipiat similem ex planis b & d factum, cum omnia æqualia ponantur. Itaque cavos hosce angulos claudere nequeunt, nisi æquales duo anguli plani: e quo liquet (669), ipsos angulos solidos A, a æquari.

674. Scholium. Eadem methodo demonstrari potest, quod si duo anguli solidi constant 4 planis, quorum 3 utrinque, singuli singulis, æquales sint, æqualiterque inclinati; etiam quartus quarto, & solidus solido sit æqualis. Idem est, si solidi efficiantur 5, 6 & 6 planis.

675. Theorema V. Ad constituendum polyedrum saltem quatuor plana necessaria sunt. Nam ut angulus unus solidus polyedri habeatur, jam tria plana requiruntur

tur (670); tria autem plana ita conjuncta cavitatem anguli non possunt obtegere; igitur saltem unum præterea addi debet, ut spatium undique claudatur, atque polyedrum tres dimensiones habeat.

676. Theorema VI. *Polyedrum nequit pauciores, quam quatuor, angulos habere.* Etenim spatium vacuum a tribus planis angulum unum solidum comprehendentibus relictum figuram saltem trium angulorum habet: jam vero hi anguli claudi non possunt, nisi fiant tres anguli solidi (482): quare polyedrum minimum quatuor habere debet angulos solidos.

677. Theorema VII. *Quinque tantum esse possunt polyedra regularia, nempe tria, quorum plana sunt triangula æquilatera; unum, cujus plana sunt quadrata; & unum, cujus plana sunt pentagona regularia.*

Quoniam (670) saltem tribus planis opus est ad angulum solidum constituendum; & (672) angulus solidus fieri nequit ex planis, qui simul 360 graduum sint; manifestum est, quinque tantum modis fieri posse, ut anguli plani polygonorum regularium angulum solidum constituent: *imo* enim cum angulus trianguli æquilateri sit 60 graduum, tres eorum juncti faciunt unum solidum 180 graduum; consequenter e quatuor triangulis æquilateris fieri potest *tetraedrum*. *2do*. Quatuor anguli trianguli æquilateri conficiunt 240 gradus; hinc constituere possunt unum solidum totidem graduum, & octo triangula ejusmodi conjuncta comprehendent corpus regulare, *octaedrum*. *3tio*. Quinque anguli trianguli æquilateri possunt efficere solidum 300°, & consequenter si 20 ejusmodi triangula jungantur, fiet solidum viginti planorum, sive *icosaedrum*. At si sex anguli plani trianguli æquilateri jungantur, jam habentur 360°, unde ex iis solidus fieri non potest. *4to*. Angulus quadrati est 90°, & tres si nuli constituunt solidum 270°: quare e sex quadratis potest fieri polyedrum sex planorum, hoc est, *hexaedrum*; verum cum quatuor anguli quadrati jam 360° efficiunt, nullus solidus inde alius componi potest. *5to*. Angulus pentagoni regularis est 108°; tres juncti proinde efficiunt solidum 324°: & hinc e duodecim pentagonis fit solidum duodecim planorum vel
do-

dodecaedrum; si quatuor pentagoni anguli conjungantur, jam 432° habentur, plures, quam ut solidus ex iis fieri queat. Denique cum angulus hexagoni regularis sit 120° , tres simul 360° constituunt, ut adeo angulus solidus ex iis haberi non possit, neque ex pluribus hexagonis polyedrum regulare; multo minus anguli aliorum polygonorum regularium, velut *heptagoni*, *octogoni* &c in angulum solidum conjungi possunt. Quare non nisi quinque expositæ corporum regularium species dantur.

Tironi hæc legenti ad manum sint polygonia regularia æqualia, e charta firmiore, aliisve planis excisa, ut ipsam polyedrorum constructionem simul tentare possit.

De comparatione Solidorum.

678. *Solida similia sunt, quorum anguli homologi æquantur, & plana sunt figuræ similes, quæ proinde resolvi possunt (575) in triangula similia, omnesque dimensiones homologas proportionales habent.*

679. *Coroll: Polyedra regularia ejusdem speciei, consequenter & sphaeræ, sunt solida similia.*

680. Ut solidorum similitudo rite intelligatur, concipienda sunt tanquam composita ex totidem planis similibus, similiterque positis, ita ut totum discrimen in eo tantummodo sit, quod singula plana elementaria solidi majoris habeant majorem superficiem & profunditatem, quam plana homologa solidi minoris, interim eadem sit ratio inter plana quævis homologa. V. g. duæ sphaeræ sunt solida similia, primo, quia utraque componitur e planis circularibus, quæ sunt figuræ similes; cum sint polygonia symmetrica, & regularia (542), & ejusdem numeri infiniti laterum. Secundo, quia hæc plana in utraque sphaera sunt similiter posita, nempe omnia perpendiculariter ad axem per eorum centra transeuntem, servantque inter se eum ordinem, ut diametri sint in ratione om-

nium chordarum, quæ parallelæ in circulo duci possunt. *Tertio*, totidem sunt hujusmodi plana in una, quot in altera sphaera, quia in omnibus circulis est idem numerus laterum infinite parvorum ideoque etiam idem numerus chordarum, quæ nempe omnes angulos, & latera similiter, & ad eandem ab axe utrinque distantiam posita, jungere possunt.

681. Discrimen inter majorem & minorem sphaerâ consistit primo in eo, quod diameter cujusvis plani elementaris sphaeræ majoris major sit (& quidem in ratione constante) diametro plani elementaris homologi sphaeræ minoris. *Secundo* quod cum latera planorum elementarium sphaeræ majoris, licet infinite parva, sint tamen majora lateribus planorum elementarium sphaeræ minoris; chordæ, quæ hæc latera æqualiter ab axe utrinque distantia jungunt, in planis sphaeræ majoris minus sint vicinæ altera alteri, quam in planis sphaeræ minoris; consequenter profunditas planorum, quam chordarum distantia metitur, major sit in sphaerâ majore, quam in minore.

682. E notione, quam de duobus solidis similibus attulimus, evidenter consequitur, nullum esse punctum in superficie unius solidi, quod in superficie homologa alterius non habeat sibi correspondens, & similiter positum; Quin imo nequidem intra solidum alterum dari punctum, cui similiter positum, & correspondens non sit intra alterum. Constant enim hæc solida eodem elementorum numero, quorum bina quævis correspondentia in utroque solido sunt figuræ similes, & similiter positæ, quæ & ipsæ constant punctis similiter positis.

683. Theorema I. Si recta trans solidum quodvis ducta PQ (fig. 57) in duobus quibuslibet punctis P, Q planorum KC, EG terminetur, & ducatur in solido simili altera recta p q (fig. 56) punctis similiter positis p, q terminata; erunt hæc duæ rectæ dimensiones homologæ solidorum; aut, quod

idem: erunt eæ inter se, ut latus quodvis in solido imo acceptum ad latus homologum sumptum in altero. Ex. caus. habebitur $PQ: pq:: GA: ga$.

Demonstratio. Si per duos quosvis angulos homologos D, d & puncta $P, Q; p, q$ concipiatur planum secans utrumvis solidum, triangula DQP, dqp sectione efformata erunt similia. Nam imo, puncta similiter posita $Q, q; P, p$ suppeditant hanc analogiam (578) $DP: dp:: DQ: dq$, ac præterea fiunt anguli PDF, FDQ æquales angulis correspondentibus pdf, fdq . 2do. Cum solida sint similia, plana FA, FC inter se sub eodem angulo inclinantur, sub quo plana correspondentia fa, fc . Igitur (673) angulus solidus D , efformatus a planis PDF, FDQ , est æqualis angulo solido d comprehenso planis correspondentibus, ac proinde angulus planus $QDF = qdf$, habentque triangula QDF, qdf angulum lateribus proportionalibus comprehensum æqualem, consequenter (559) similia sunt, & est $QP: qp:: DQ: dq:: AG: ag$ &c.

684. Coroll. Omnia puncta superficiem trianguli QDF constituentia, totidem numero sunt, similiterque posita respectu eorum, quæ superficiem trianguli qdf component. E quo sequitur, plana secantia, in quibus sunt triangula PDQ, pdq transire per puncta in utrovis solido similiter posita, atque adeo portiones inde resectas esse etiam ipsas solida similia, uti & eas, quæ remanent, ut propterea dici debeat, quod si per tria puncta homologa non in directum jacentia, atque in planis duorum solidorum similium posita, agatur planum trans utrumvis solidum, utrumque secetur in binas portiones, quarum homologæ sint solida similia.

685. Theorema II. Si ex angulis homologis quibusvis C, c demittantur in plana vicina, vel opposita, producta, vel non producta, perpendiculares CR, cr , quæ metiantur

eorum angulorum altitudines supra illa plana; erunt eæ proportionales lateribus, vel lineis quibuscunque homologis, ex. gr. $CR:cr::CE:ce::PQ:pq$ &c.

Demonstratio. E punctis E, e (in quibus nempe latera CE, ce occurrunt planis, sive basibus FH, fh) ducantur ad puncta R, r (quo nempe cadunt perpendiculara in eadem plana producta demissa) rectæ ER, er, quæ erunt in iisdem planis productis, atque ad rectas CR, cr normales. Quare triangula CER, cer erunt ad R, r rectangula, ac inter se similia, cum ob similitudinem solidorum latera homologa CE, ce æqualiter inclinentur ad plana homologa GHEF, ghef, & consequenter anguli CER, cer æquales sint inter se. Unde erit $CR:cr::CE:ce::PQ:pq$ &c.

686. Scholium. Est igitur proprietas generalis solidorum similium, quod omnes dimensiones homologas proportionales inter se habeant.

De mensura Superficierum Solidorum cujusvis speciei.

687. Nomine Superficie solidi inposterum tantummodo intelligemus superficiem demptis basibus, si quas habet solidum; cum vero dicemus superficiem totam solidi. bases simul comprehensas volumus.

688. Axioma, seu Theorema I. Superficies tota solidi, vel polyedri cujusvis, æquatur summæ omnium planorum ejus latera & bases constituentium.

689. Theorema II. Superficies prismatis cujuslibet æquatur factio ex uno ejus latere quocunque in perimetrum sectionis ad latus illud perpendicularis.

Demonstratio. Omnia prismatis latera æqualia sunt, & parallela. Quod si itaque per punctum quodlibet lateris prismatis concipiatur transire planum ad
la-

latus illud normale, erit idem etiam ad reliqua omnia latera normale, & sectio erit polygonum, cujus singula latera sunt perpendicularia ad bina latera parallela, quæ plana lateralialia prismatis terminant. Unde (589) superficies cujusvis plani lateralis erit æqualis factæ ex latere sectionis in latus prismatis: & superficies prismatis æquabitur factæ ex omnibus lateribus sectionis (hoc est, ex perimetro sectionis) in latus unum prismatis.

690. Coroll: Superficies prismatis, & cylindri recti æquatur factæ ex axe in perimetrum baseos.

691. Theorema III. Superficies pyramidis rectæ, cujus basis est polygonum regulare, est æqualis factæ ex dimidia perimetro baseos in rectam ex apice pyramidis ad quodvis latus baseos perpendicularem.

Superficies enim æqualis est summæ superficierum (688) omnium triangulorum lateralium; singula autem triangula cum æqualia sint, eorum summa æquatur factæ ex altitudine eorum communi (hoc est ex perpendicularo ex apice in latus baseos demisso) in dimidiam summam laterum, seu in dimidiam perimetrum baseos.

692. Observa. Si pyramis recta non sit, aut basis non sit polygonum regulare, superficies pyramidis aliter acquiri nequit, nisi si singulorum triangulorum areæ separatim mensurentur, & in unam summam colligantur.

693. Coroll: Superficies conii recti æqualis est factæ ex semicircumferentia baseos in latus conii.

694. Theorema IV. Superficies plani lateralis, pyramidis truncatæ basium parallelarum est æqualis summæ dimidiæ lateris utriusque baseos, ductæ in perpendicularum ex quovis puncto lateris baseos superioris in latus baseos inferioris demissum; seu, quod idem est (281), æquatur factæ ex parte perpen-

diculi ex apice pyramidis integræ in latus baseos demissi, quæ inter basin & sectionem basi parallelam intercipitur, ducta in dimidiam summam laterum sectionis & baseos.

Demonstratio. Planum quodvis laterale pyramidis est triangulum (651), cujus area componitur ex serie infinita rectarum basi parallelarum, & progressionem Arithmeticam constituentium, cujus primus terminus est trianguli vertex, ultimus vero basis (592), & numerus terminorum exprimitur per rectam ex vertice ad basin perpendicularem. Jam vero trapezium laterale pyramidis truncatæ constituitur per eandem seriem, resectis prioribus versus verticem trianguli terminis, in quâ terminus primus est latus baseos superioris, ultimus latus baseos inferioris, numerus terminorum pars perpendiculi inter utramque basin intercepta: igitur (280) area ejusmodi trapezii æqualis est dimidio factæ ex perpendiculo a latere sectionis ad latus baseos pyramidis demisso in summam lateris sectionis, & lateris baseos pyramidis.

695. Coroll: I. Si pyramis truncata sit recta, & basis regularis, omnia trapezia lateralia inter se æquantur, & sectio inter basin superiorem & inferiorem media habet perimetrum mediam Arithmetice proportionalem inter perimetros utriusque baseos. Quare superficies pyramidis truncatæ & rectæ, cujus basis est regularis, æquatur factæ ex perpendiculo a latere quovis basis superioris in latus basis inferioris demisso, ducto in perimetrum sectionis inter utramque basin mediæ.

696. Coroll: II. Superficies coni truncati & recti, ac basium parallelarum, æqualis est factæ ex latere inter bases intercepto, ducto in circumferentiam circuli inter bases medii.

697. Theorema V. Superficies sphaeræ æqualis est factæ ex circumferentia circuli maximi in axem ducta.

De-

Demonstratio. Si demonstretur, quod superficies ejuslibet coni truncati (qui sphaeræ elementa constituunt) sit æqualis facto, ex axe, seu altitudine ejus coni in peripheriam circuli maximi sphaeræ, simul demonstrabitur (608); quod summa superficierum omnium horum conorum, consequenter superficies sphaeræ, æqualis sit facto ex summa omnium axium conorum (hoc est, ex axe toto sphaeræ) ducta in peripheriam circuli maximi (222).

Sit itaque Y (Fig. 58) punctum medium lateris AB coni truncati $ABDE$. ducatur inde YR basibus BD, AE parallela, & YS ad AB perpendicularis, quæ (456) cum per centrum transeat, erit axis sphaeræ. Demittatur ex B ad $A E$ perpendicularis BZ , quæ æquabitur axi coni TX ; jungantur item puncta R & S . His factis, patet triangula ABZ, YRS esse similia, cum præter rectos ad Z & R etiam sit $BAZ = RSY$: nam ob parallelas AE, YR est $BAZ = BYR$; angulus autem $BYR = YSR$, utpote quorum mensura est dimidijs arcus YdR ; igitur etiam $RSY = BAZ$, & consequenter $ABZ = RYS$. Quare est (556) BZ (seu TX): $AB::YR:YS$. Porro (581) circumferentiæ circulorum sunt inter se ut eorum diametri; igitur est TX ad AB , ut circumferentia circuli, cujus diameter YR , ad circumferentiam circuli, cujus diameter YS , hoc est, circuli maximi sphaeræ: unde (300) factum ex TX in circumferentiam circuli maximi sphaeræ, est æquale facto ex AB in circumferentiam circuli, cujus Diameter est YR , id est (696) superfici ei coni truncati $BAED$. Ergo superficies coni truncati cujusvis æquatur facto ex axe suo in circumferentiam circuli maximi sphaeræ.

698. Coroll. I. *Superficies sphaeræ est quadrupla circuli maximi.* Nam area circuli maximi æquatur facto
ex

ex semidiametro $\frac{1}{2}d$ in semicircumferentiam $\frac{1}{2}p$ (605), hoc est $= \frac{1}{4}pd$; & superficies sphaerae aequalis est facto pd , ex axe suo d in peripheriam circuli maximi p .

699. Coroll. II. Superficies sphaerae aequalis est superficiei cylindri, cujus axis aequalis est axi sphaerae, & basis aequalis circulo maximo sphaerae; & si sumatur tota superficies cylindri, comprehensio etiam basibus, ea est ad superficiem sphaerae ut 3 ad 2. In hac enim hypothese superficies sphaerae aequalis est basi cylindri quater sumptae; superficies autem cylindri tota adaequat suam basin sexies acceptam.

700. Coroll. III. Zona superficiei sphaericae inter duas sectiones parallelas comprehensa, aequalis est superficiei convexae cylindri, cujus basis est circulus maximus sphaerae, & altitudo eadem cum altitudine Zona. Seu aequatur facto ex altitudine sua in circumferentiam circuli maximi sphaerae.

De Comparatione Superficierum Solidorum.

Vidimus hucusque, superficies solidorum demptis basibus esse semper aequales factis ex duabus eorum dimensionibus; unde sequitur universum

701. Theorema I. Superficies duorum solidorum quorumcunque ejusdem speciei, sunt in ratione composita duarum dimensionum ejusdem nominis.

702. Coroll. I. Si duo solida ejusdem speciei habeant unam dimensionem aequalem, eorum superficies sunt ut altera dimensio; hoc est, si duo prismata recta, duo cylindri recti, habeant eandem altitudinem; aut si duae pyramides rectae basium regularium, duo conii recti &c, habeant eandem perpendicularem ex apice in latus baseos demissam, vel aequale latus &c, eorum superficies sunt ut perimetri basium. Et si duo prismata, cylindri, pyramides rectae basium regularium, conii

recti &c habeant æquales perimetros basium, eorum superficies sunt ut perpendiculara ad latera basium demissa. Nam in hac hypothese sunt superficies ut facta ex duabus quantitatibus inæqualibus ductis in eandem tertiam (216).

703. Coroll: II. *Si binæ dimensiones ejusdem nominis solidorum ejusdem speciei sint in ratione reciproca, superficies solidorum sunt æquales*, V. g. superficies cylindri recti æqualis est superficiei cylindri recti alterius, vel etiam prismatis recti, si altitudo primi est ad perimetrum suæ baseos, ut est perimeter baseos secundi ad suam altitudinem; & vicissim (596 & 596).

704. Theorema II. *Superficies duorum solidorum similium totæ, etiam comprehensis basibus, sunt inter se ut quadrata dimensionum quarumlibet homologarum; sive in ratione duplicata dimensionum homologarum.*

Demonstratio. In duobus solidis similibus omnes dimensiones homologæ proportionales sunt (686); sunt igitur superficies eorum ut facta quantitatum proportionalium; ideoque (291) in ratione duplicata dimensionum homologarum.

705. Coroll: *Superficies sphaerarum sunt inter se ut quadrata diametrorum, vel radiorum; nam (677) sphaeræ sunt solida similia, & earum diametri, ac radii sunt dimensiones homologæ.*

De mensura Soliditatis Solidorum cujusvis speciei.

706. *Soliditas seu volumen* dicitur spatium aliquod determinatum, seu materia corporea vacuum sit, seu re ipsa corpore occupatum: idea enim spatii omnes tres dimensiones in se involvit. Hinc dum de corpore physico agitur, notari debet discrimen inter ejus

soliditatem, inter massam, & inter densitatem. Soliditas est spatium univ^{er}si, quod corporis superficies complectitur; *massa* est quantitas absoluta materiæ, qua constat; *densitas* est ratio voluminis ad massam, ut corpus eo censeatur densius, quo plus materiæ sub minore volumine, sive spatio, continet.

707. Volum^{en} spatii, seu soliditas corporis, æqualis est summæ elementorum, e quibus componitur. Elementa autem corporis sunt ipsa solida, sed profunditatis infinite parvæ, quæ adeo superficierum instar considerari possunt. Si corpus huic in modum spectetur, erit ejus soliditas summa superficierum, quemadmodum superficies est summa linearum, & linea summa punctorum.

708. Si de solidis eodem modo ratiocinemur, quo de superficiibus (587 & seq:) apparebit 1^{mo}, cubos esse mensuras communes soliditatum, sive voluminum. Exempli causa solidum 100 pedum debet occupare spatium, quod exacte repleri possit per centum cubos, quorum singuli sint unius pedis. 2^{do}. Numerum partium mensuræ solidæ, sive trium dimensionum, esse tertiam potentiam numeri partium mensuræ ejusdem nominis simplicis, sive unius dimensionis in longum. Itaque pes solidus continet 1728 cubos, singulos unius digiti; constat enim duodecim seriebus, seu stratis, quorum singulorum altitudo est unius digiti, & basis unius pedis, sive 144 digitorum. Eodem modo hexapeda solida continet 216 pedes cubicos.

709. Theorema I. Soliditas prismatis & cylindri æqualis est fact^o ex altitudine in superficiem baseos.

Demonstratio. Quoniam prisma (& hinc etiam cylind^{er}) tot constat polygonis basi æqualibus, quot sunt puncta in perpendiculari distantiam basis superioris ab inferiori metiente; sequitur, ut habeatur so-

litas, debere toties sibi ipsi addi superficiem polygoni generantis, quot sunt puncta in illa perpendiculari, hoc est, debere superficiem basis duci in prismaticis, vel cylindri altitudinem. Idem est, seu prismata & cylindri sint obliqui, seu recti.

710. Theorema II. *Soliditas pyramidis, vel conijuscunque, æqualis est tertiæ parti producti ex superficie baseos in altitudinem.*

Demonstratio. Pyramis composita est ex infinitis polygonis, seu superficiebus similibus, quarum latera crescunt uniformiter quantitate $\frac{1}{2}$ a vertice usque ad basin, sive in ratione numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 &c. Sunt autem (608) superficies similes ut quadrata laterum homologorum: unde si superficies primi elementi in vertice ipso statuatur $= 1$, erit superficies secundi $= 4$, tertii $= 9$, &c, ultimi denique, sive ipsius baseos pyramidis $= \infty^2$. Et quoniam soliditas pyramidis æquatur summæ omnium elementorum, evidens est, eam æquari summæ quadratorum numerorum naturalium seriei infinitæ 1. 4. 9. 16. &c. $\dots \infty^2$. Porro (383) summa quadratorum numerorum naturalium est pars tertia facti ex quadrato ultimo in numerum quadratorum; ergo soliditas pyramidis est æqualis tertiæ parti facti ex superficie baseos in elementorum numerum, hoc est, in altitudinem (648). Idem est de cono.

711. Coroll: *Pyramis est tertia pars prismatis ejusdem basis & altitudinis.* Quare e massa prismatis efformari possunt tres pyramides ejusdem baseos, & altitudinis cum primate.

712. Theorema III. *Soliditas sphaeræ æqualis est duabus partibus tertiis facti ex axe in aream circuli maximi.*

Demonstratio. Cum sphaera componatur (661) ex tot sphaeris cavis, sive superficiebus sphaericis, qua-

rum altera alteram includit, quot sunt puncta in radio; ejus soliditas æqualis est summæ omnium harum superficierum; jam vero radii earumdem superficierum constituunt seriem infinitam numerorum 1. 2. 3. 4. 5. . . . &c; & superficies ipsæ (609) progrediuntur in serie 1, 4, 9, 16, 25, &c. . . . igitur soliditas sphaeræ habetur per summam infinitorum quadratorum numerorum naturalium, quæ (383) æquatur parti tertiæ facti ex quadrato ultimi ducto in numerum quadratorum: estque adeo *soliditas sphaeræ pars tertia facti e superficie extrema sphaeræ s in ejus semidiametrum $\frac{1}{2}d$, seu $= \frac{1}{3} \times s \times \frac{1}{2}d$.* Jam vero (698) superficies extrema sphaeræ æquatur quadruplo superficiei p circuli maximi, seu $s = 4p$. Unde soliditas sphaeræ est $\frac{1}{3} \times 4p \times \frac{1}{2}d = \frac{2}{3}pd$.

713. Coroll: Si igitur in cylindro (cujus diameter basis sit æqualis axi) cogitentur inscripta sphaera, & conus re-
ctus, horum corporum soliditates inter se comparatæ erunt ut 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, sive ut 3, 2, 1.

714. Scholium. Ut soliditas aliorum corporum, velut polyedrorum irregularium, obtineatur, ea reducenda sunt ad prismata, vel pyramides; quemadmodum ad obtinendam superficiem figurarum irregularium, eæ (603) resolvi debent in triangula. Investiganda dein soliditas singulorum prismatum vel pyramidum; summa omnium erit soliditas polyedri.

At vero si polyedrum sit exiguum, & admodum irregulare, ut si quæratur soliditas lapidis adhuc im-
politi, vel operis ænei anaglyphi &c, res melius mechanice sequentem in modum præstatur. Ponatur corpus, cujus volumen petitur, intra vas cavum, cujus figura facile mensurari potest, uti sunt cylindrica, vel prismatica rectangularia: impleatur vas aqua, aliove fluido, quod nec damnum asferre possit corpo-
ri,

ri, nec ab eo facile imbibitur extracto dein corpore evase, mensuretur exacte volumen partis aqua vacuæ, quod quam proxime æquale erit volumini corporis.

De comparatione Soliditatum in solidis.

715. Præcedente articulo patuit, soliditatem corporum esse factum ex superficie quapiam in axem aliquem, vel altitudinem ducta: & quoniam omnis superficies (607) est æqualis facto ex duabus dimensionibus, consequens est, omnem soliditatem esse factum ex tribus dimensionibus. Unde....

716. Theorema I. *Soliditates duorum solidorum quorumvis sunt inter se in ratione composita trium dimensionum ejusdem nominis.*

717. Theorema II. *Soliditates duorum solidorum similium sunt inter se in ratione triplicata, seu ut cubi, dimensionum quarumvis homologarum.*

Demonstratio. Solida similia habent omnes suas dimensiones homologas proportionales (636); igitur eorum soliditates sunt facta trium quantitatum proportionalium, ac propterea (291 & 298) sunt in ratione triplicata binarum quarumlibet homologarum.

718. Coroll. I. *Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum, vel radiorum.* Quare si sphæræ A diameter sit dupla, tripla, quadrupla &c diametri alterius sphæræ B; erit ejus superficies quadrupla, novencupla, sedecupla &c superficiei sphæræ B; & soliditas sphæræ A erit ad soliditatem sphæræ B ut 8, 27, 64 &c ad 1. Et vas, cujus dimensiones sunt duplæ, triplæ, quadruplæ

duplæ &c dimensionum alterius, erit octies, vices septies, sexagesies quater &c capacius altero.

719. *Coroll: II.* Ut construatur solidum alteri simile, sed quod habeat volumen duplum, triplum &c alterius: necesse est, ut singulæ ejus dimensiones sint ad singulas alterius, ut $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ &c ad 1,



TRIGONOMETRIA.

720. Trigonometria est ars calculum Arithmeticum ad Geometriam applicandi. Eadem est scientia summe necessaria, ut a Theoria ad praxin transeat. Nomen inde sortita est, quod doceat singulas trianguli partes calculare, cum reipsa omnes figuras metiamur per triangula, in quæ resolvuntur.

721. Trianguli sex sunt partes, tres nempe anguli, totidemque latera. Illud igitur Trigonometria agit, ut suppeditet regulas solvendi in omni casu hoc problema: *dati magnitudine tribus partibus ex sex, quibus triangulum constat, invenire quamvis ex reliquis tribus.*

722. Regulæ porro in eo consistunt, ut tres partes datæ ordinentur in primos tres terminos proportionis, sive *analogiæ*, cujus quartus sit pars quæsitæ. Verum quia latera trianguli non sunt simpliciter proportionalia cum angulis, quorum mensuræ sunt arcus circuli; necesse fuit, ut angulis, sive arcibus eos metientibus, substituerentur aliæ lineæ rectæ, quæ arcus eos repræsentarent, & simul lateribus trianguli essent proportionales. Rectæ hæc nomine sinuum, Tangentium &c censentur, totiusque Trigonometriæ artificium eo reducitur, ut proprietates earum perspiciantur, pervideanturque casus, quibus seu has, seu illas angulorum loco adhibere oporteat; ut analogia termino ignoto reperiendo opportuna habeatur.

723. Sit angulus quivis ACB (Fig. 59): ex vertice C, radio arbitrariæ longitudinis describatur cir-

culus $AHaG$: producat AC in a , atque ex C erigatur perpendicularis CH . Evidens est, angulum BCH , sive arcum BH , esse complementum ad rectum anguli ACB , seu arcus AB , imo esse etiam complementum anguli $B C a$, vel arcus $BH a$; angulum vero $B C a$, seu ejus arcum $B a$ esse complementum ad duos rectos anguli ACB , vel ejus arcus AB . Et vicissim BA esse complementum ad rectum arcus $H B$, & complementum ad duos rectos arcus $a B$.

724. Perpendicularis BD ex extremo puncto radii B ad alterum AC demissa, dicitur *sinus* arcus AB , vel anguli $A C B$. Perpendicularis AE erecta in extremo puncto radii CA usque ad occursum radii alterius CB producti, est *tangens* ejusdem arcus AB ; recta vero CE ejus *secans* appellatur. Pars radii AD inter arcum & ejus finem intercepta, vocatur *sinus versus* arcus AB . Perpendicularis BI est *sinus complementi* arcus AB ; & perpendicularis HK est *tangens complementi* ejusdem; CK *secans complementi*; HI *sinus versus complementi* arcus AB .

Compendii causa loco sinus complementi, tangens complementi &c dicitur *cosinus*, *cotangens*, *cosecans*, *ecosinus versus*.

Ex eadem causa deinceps ad indicandum radium, scribemus R ; *sin* loco sinus; *tang* pro tangens; *cos* vel *cosin*, pro cosinus, *cot*, vel *cotang*, pro cotangens; *sin v.* pro sinus versus. Secantibus autem, & sinu verso in calculo Trigonometrico non utemur.

725. Ex datis definitionibus sequitur 1^o , sinus & cosinus, tangentes & cotangentes &c angulorum obtusorum, ut aCB , esse eosdem ac angulorum acutorum deinceps positiorum, vel complementorum ad duos rectos. Nam perpendicularis ex extremo a vel B radiorum angulum obtusum comprehendentium demissa necessario cadit in

radius alterum versus illud extremum productum, uti patet in perpendicularibus BD , *ad*. Eodem modo tangens ejusmodi anguli alia esse nequit, quam ae ; jam vero ob triacula æqualia $a C d$, BCD ; item Cae , CAE , est $ad = BD$, $ae = AE$; & cum arcus BH sit complementum tam arcus $a B$, quam arcus AB , manifestum est, BI esse cosinum arcus $a B$, & HK esse cotangentem.

726. II°. Sequitur, finum alicujus arcus AB , esse dimidiam chordam arcus $B A G$, dupli arcus AB (448).

727. III°. Maximum omnium sinuum esse sinum anguli recti HCA , quippe qui ipse est radius. Unde etiam finus totus dicitur.

728. IV°. Sinus crescere, ut crescunt anguli a 0° usque ad 90° ; inde vero a 90° usque ad 180° rursus eodem ordine decrescere.

729. V°. Sinum arcus 30° æquari dimidio radio. Nam radius est chorda arcus 60° (533); & finus est dimidia chorda arcus dupli (726). Itaque latus oppositum angulo 30° in triangulo rectangulo, est dimidium hypotenuse. Nam si angulus ACB sit 30° , erit $GB = BC$, & $BD = \frac{1}{2} BG$.

730. VI°. Crescentibus angulis a 0° usque ad 90° crescere etiam tangentes, & secantes ita, ut tangens, ac secans anguli 90° sit infinita; nequit enim radius CH , si HCA sit rectus, concurrere cum tangente AE , nisi si utraque linea producat in infinitum.

731. VII°. *Tangentem anguli* 45° *esse æqualem radio.*
 Nam si angulus ACB ponatur 45° , triangulum rectan-
 gulum CAE est isosceles, & $AE = AC$.

732. VIII°. *Sinum versum* AD *arcus* AB *minoris* 90° ,
esse æqualem differentiae cosinus $CD = BI$, *a radio* CA; e-
jusdem arcus cosinum versum HI *esse æqualem differentiae si-*
nus $CI = BD$ *a radio* CH, & *sinum versum complementi*
ad duos rectos Da, *esse æqualem summæ ex radio & cosinu.*

733. IX°. Ob similitudinem triangulorum CDB,
 CAE, CIB, CHK, esse $CA:CD$ (vel BI) :: $AE:BD$;
 hoc est $R:\cosin::tang:\sin$. Deinde $CH:CI$ (vel BD) ::
 $HK:IB$; five $R:\sin::cotang:\cosin$. Denique $AE:CA::$
 CH (vel CA): HK , feu $\frac{\sin}{\cosin} = \frac{R}{tang}$.

Ex his analogiis sequentes derivantur formulæ,
 ut sinus tangentibus &c, & vicissim, substitui possint.
 Ponatur $R = 1$, erit

$$734. \sin = \cos \times \tan = \frac{\cos}{\cot}$$

$$735. \cos = \sin \times \cot = \frac{\sin}{\tan}$$

$$736. \tan = \frac{\sin}{\cosin} = \frac{1}{cotang}$$

$$737. \cot = \frac{\cos}{\sin} = \frac{1}{\tan}$$

$$738. \cot A \times \tan A = 1 = \cot B \times \tan B.$$

739. Ut sinus, tangentes &c arcubus, seu angulis triangulorum substitui possent, necesse fuit, ut conderentur tabulæ, quæ valorem sinuum, tangentium, cotangentium omnium angulorum acutorum (qui enim ad obtusos pertinent, ex complementis ad duos rectos habentur) omnium graduum & minutorum jam calculo accurato determinatum exhiberent. Id genus tabulæ plerumque nomine *tabularum sinuum* habentur, supponiturque in iis radius circuli quemvis angulum metientis esse $= 1$; & valor sinuum, tangentium, cosinuum & cotangentium singulis gradibus & minutis e regione in fractionibus decimalibus apponitur.

En autem compendiarium expositionem principiorum, ex quibus hæ tabulæ seu constructæ sunt, seu construi potuerunt.

Principia constructionis Tabularum Sinuum.

740. Theorema I. *Dato pro quovis arcu AB (Fig: 59) uno ex his quatuor: sinu, cosinu, sinu verso, cosinu verso, ex reliquis tribus quodvis datur. Etenim apparet esse (563) $CD = \sqrt{(CB^2 - BD^2)}$, seu $\cosin = \sqrt{(R^2 - \sin^2)}$. Item $DA = CA - CD$, hoc est $\sin vers = R - \cosin$. Item $HI = CH - CI$, seu $\cosin vers = R - \sin$, &c.*

741. Theorema II. *Calculatis iis, quæ pertinent ad arcum quemvis, reperiri ex iisdem possunt omnia, quæ spectant ad ejusdem arcus dimidium vel duplum. Nam imo, ducta chorda BA (Fig: 60), & ex C demissa in eam perpendiculari CE, ob datas BD, DA, habetur (563) BA*

$= \sqrt{BD^2 + DA^2}$, & hinc FA ; seu $\sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $\sqrt{\sin^2 + \sin^2}$. Dein $CF = \sqrt{CA^2 - AF^2}$; con-
 sequenter $\cos \frac{1}{2} = \sqrt{RR - \sin^2 \frac{1}{2}}$. 2do, si detur arcus
 AE, triangula FCA, DBA similia dant hanc ana-
 logiam $CA:CF::AB:BD$, seu $R:\cos Arcus::2\sin Arcus:$
 $\sin Arcus$ dupli.

742. Theorema III. *Datis sinibus BD, KL arcuum AB, KB, datur etiam sinus KM summe arcuum (Fig: 61) vel differentie (Fig: 62). Cum dentur sinus, dantur etiam cosinus CD, CL (740). Est autem CB:CL::BD:LP (seu OM), igitur OM =* $\frac{\sin AB \times \cos KB}{R}$; &

ob triangula similia KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig: 61); item KOL, KMQ, CQL, CBD (Fig: 62), est in triangulis KOL, CBD (Fig: 61 & 62) $CB:CD::KL:KO$; hinc $KO = \sin KB \times \cos AB$; quare posito $R = 1$, est

KM , seu $\sin (BK \pm AB) = \sin BK \times \cos AB \pm \sin AB \times \cos KB$.

743. Theorema IV. *Summa ex sinu KM (Fig: 63) arcus KA minoris 30 gradibus, & facto ex $\sqrt{3}$ in KI sinum differentie arcus KA a 30 gradibus, est æqualis sinui FN arcus FA, qui tantumdem excedit 30 gradus, quantum arcus KA ab iis deficit.*

Sit arcus $AB = 30$ gradibus, & $BF = BK$; ob triangula rectangula SIF, SGQ similia, est angulus $IFS = GQS = BCA = 30^\circ$; unde cū $KFS = 30^\circ$, est (729) $GK = \frac{1}{2}FK = IK = FI$. Est autem $FK,$

— $GK^2 = FG^2$, seu $4 IK^2 - IK^2 = FG^2$: ergo $3 IK^2$ seu $IK^2 \times 3 = FG^2$; & extracta radice, $IK \times \sqrt{3} = FG$, adeoque $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$.

744. Theorema V. Summa ex sinu FT, arcus HF minoris 60 gradibus, & sinu FI, differentie arcus HF a 60°, æqualis est sinui KO, arcus HK, qui tantum excedit 60°, quantum arcus HF ab iis deficit.

Quoniam $FI = GK$ (743), est $FT + GK = KO$. Sic exempli gratia est $\sin 55^\circ + \sin 5^\circ = \sin 65^\circ$.

745. Ope horum Theorematum omnes sinus reperiri possunt. Cognito enim sinu arcus 30° (729), per Theorema I & II. habentur sinus 15°, 7°¹, 3°¹, & sic deinceps accipiendo medietatem præcedentium usque ad duodecimam divisionem, ex qua obtinetur sinus 52", 44"', 34"', qui circa errorem sensibilem pro ipso arcu haberi potest; & quia sinus, qui ab arcubus non differunt, sunt iisdem proportionales, fieri potest hæc analogia: ut hic arcus est ad suum sinum, ita arcus 1' est ad sinum suum. Hoc habito datur (741) sinus arcus 2', tum (742) 3', 4' &c. usque ad 30°. Inde porro (743) a 30° usque ad 60° omnes reperiuntur; & tandem (744) a 60° usque ad 90°. Habitis sinibus, tangentes ope alicujus formulæ articuli superioris pariter inveniuntur.

Principia Theoriæ Calculi Trigonometrici.

746. Theorema I. In omni triangulo sinus angulorum sunt ut latera opposita.

Demonstratio. Si triangulum circulo inscribatur,
sin-

singula latera sunt chordæ arcuum duplorum eorum, qui angulos oppositos metiuntur (466): est igitur cuiusvis lateris dimidium (726) sinus anguli oppositi; & cum dimidia sint ut tota (297); quodvis latus est ut sinus anguli oppositi.

747. Coroll. I. Cum sinus anguli recti sit ipse radius (727), & latus recto oppositum sit hypotenusa (485), est in omni triangulo rectangulo radius ad hypotenusam, ut sinus unius ex angulis acutis ad latus eidem angulo oppositum.

748. Coroll. II. In triangulo rectangulo sinus unius anguli ex acutis est cosinus alterius: igitur est semper (746) sinus unius ex angulis acutis ad suum cosinum, ut latus oppositum illi angulo ad latus alterum. Est autem (733) sinus ad cosinum ut tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo est tangens unius ex acutis ad radium, ut est latus ei angulo oppositum ad latus alterum.

749. Coroll. III. Datis tribus angulis trianguli, solum datur ratio laterum, non autem magnitudo eorum absoluta. Etenim nihil aliud ex angulorum magnitudine inferri potest, nisi quod latera iis opposita sint in ratione eorundem sinuum: neque magnitudo laterum determinari potest, cum possint insipita triangula inæqualia construi, quæ omnia sint inter se similia, atque adeo angulos homologos æquales habeant.

750. Theorema II. In quovis triangulo ABC (Fig. 64) est: ut latus maximum AC ad summam laterum reliquorum $AB + BC$, ita est eorundem differentia $AB - BC$, ad differentiam segmentorum lateris maximi AE, CE, quæ sunt a perpendiculari ex angulo maximo B in latus maximum AC demissa.

Demonstratio. Etenim si ex angulo B tanquam centro intervallo lateris minimi BC describatur circulus

GC

752. Scholium. *Hæc analogia ad alias duas sequentes reduci potest: Ut est latus minus BC, ad latus majus AB, ita est radius ad tangentem anguli, a quo 45° subtrahantur. Dein: ut est radius ad tangentem anguli residui; ita est tangens semisummæ angulorum A & C, ad tangentem eorundem semidifferentiæ.*

Demonstratio. Producta AB, fiat $PT = BP = BC$, & $PM = BA$; erit $TM = BA - BC$. Fiat quoque angulus $NBT = 45^\circ$, & e punctis T, M demittantur in BN perpendiculares TK, MN; jungatur denique KP. Patet, triangula BKP, BKT, BNM esse rectangula, isoscelia, & similia; ideoque $BK = KT$, $BP = KP = PT = BC$, & $BN = NM$. Est igitur in triangulo PKM (748) PK (vel BC): PM (vel AB): R : $\text{tang } PKM$. Ab hoc angulo subtractis 45° , manet $TKM = KMN$. Porro (748) est R : $\text{tang } KMN$:: MN (vel BN): KN :: BM (vel $AB + BC$): TM (vel $AB - BC$): $\text{tang } \frac{A+C}{2} : \frac{A-C}{2}$ (751).

Ufus Theoriæ præcedentis in calculis Trigonometricis.

753. In calculis Trigonometricis non nisi Logarithmi finuum, cosinuum, tangentium, cotangentium, ac numerorum naturalium, magnitudinem absolutam laterum exhibentium, usurpantur. Unde tabulæ adhiberi solitæ exhibent imprimis logarithmos finuum, cosinuum &c, dein separatim tabulam logarithmorum numerorum naturalium ab 1 usque ad 10000, vel 20000, qui, quod ad usum, plerumque sufficiunt.

754. In tabulis sinuum supponitur radius, seu sinus totus = 10000000000, ita, ut characteristica logarithmi radii sit 10. Ex quo sequitur 1° , quod, dum logarithmus radii addi debet, alteri logarithmo, sufficiat, alterius logarithmi characteristica præfigere 1, si ea minor sit decade, ut plerumque minor est; aut vero, si decadem excedat, vel æquet, ejus decadibus addere 1. Ex opposito si a logarithmo quopiam subtrahendus sit logarithmus radii, satis esse, si 1 ex ejus characteristica decadibus auferatur.

755. II° infertur, calculum triangulorum rectangulorum, in quibus adhibetur radius, (ut fere semper contingit, quemadmodum paulo post videbimus) reduci vel ad unicam additionem duorum logarithmorum, si radius sit terminus primus analogiæ; vel ad unicam subtractionem duorum logarithmorum, dum radius est secundus, vel tertius analogiæ terminus: quo fit, ut triangulorum rectangulorum calculus multo sit expeditior, quam aliorum; neque enim unitatis additio, vel subtractio inter operationes computanda est.

Calculus Triangulorum Rectangulorum.

756. Ut calculus Triangulorum Rectangulorum eo sit facilior, supponemus angulum rectum (qui semper est inter data) esse A; alterum ex acutis vocari B, alterum C; tum sequens tabula pro singulis casibus exhibebit regulam, sive analogiam, quam sequi oporteat.

		<i>Quæſi- ta</i>	<i>Analogiæ, ſive Regulæ Calculi.</i>
1		BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$. vel
2	AB, AC	B	$AB : AC :: R : \text{tang } B$; dein $\sin B : R :: AC : BC$
3		C	$AB : AC :: R : \text{tang } B$.
4		AC	$AC : AB :: R : \text{tang } C$.
5	AB, BC	B	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$. vel
6		C	$\log AC = \frac{1}{2} \log (BC + AB) + \frac{1}{2} \log (BC - AB)$.
7		AB	$BC : AB :: R : \cos B$.
8	AC, BC	B	$BC : AB :: R : \cos C$.
9		C	$BC : AC :: R : \sin C$.
10	AB, B	AC	$R : \text{tang } B :: AB : AC$.
11		BC	$\cos B : R :: AB : BC$.
12	AB, C	AC	$R : \cotang C :: AB : AC$.
13		BC	$\sin C : R :: AB : BC$.
14	AC, B	AB	$R : \cotang B :: AC : AB$.
15		BC	$\sin B : R :: AC : BC$.
16	AC, C	AB	$R : \text{tang } C :: AC : AB$.
17		BC	$\cos C : R :: AC : BC$.
18	BC, B	AB	$R : \cos B :: BC : AB$.
19		AC	$R : \sin B :: BC : AC$.
20	BC, C	AB	$R : \sin C :: BC : AB$.
21		AC	$R : \cos C :: BC : AC$.

757. Omnes analogiæ allatæ nil aliud ſunt, quam applicatio Corollariorum I & II (747 & 748) ad caſus, qui

qui in triangulis rectangulis occurrere possunt. 1^{ma}, 4^{ta}, & 7^{ma} regula inde ductæ sunt, quod (562) quadratum hypotenusæ æquale sit summæ quadratorum reliquorum laterum; sed quia calculus quadratorum non nihil molestior est, primæ regulæ binæ analogiæ substitutæ sunt, quarum priore reperitur unus ex angulis acutis, altera hypotenusa, ope illius anguli nempe, & lateris ei oppositi, ac jam noti. Quartæ & septimæ regulæ suffecta est altera per logarithmos, quæ hunc in modum potest enunciari: *semisumma logarithmorum summæ & differentiæ ex hypotenusa & uno latere, est logarithmus lateris alterius.* Fundamentum ejus est in eo, quod $BC^2 - AB^2 = (BC + AB) \times (BC - AB)$, consequenter $(340) \log (BC + AB) + \log (AB - AB) = \log AC^2 = 2 \log AC$ (342). Idem est de regula septima.

Calculus Triangulorum Obliquangulorum.

758. I. Datis duobus angulis cum uno latere, invenire latera reliqua.

Ut sinus anguli oppositi lateri dato

Ad latus datum;

Ita est sinus anguli oppositi lateri quæsito

Ad latus quæsitum. (746).

759. II. Datis duobus lateribus cum angulo uniorum opposito, invenire angulum oppositum alteri; modo prius constet, an acutus, an vero obtusus sit.

Ut latus oppositum angulo dato

Ad sinum ejusdem anguli;

Na 2

Ita

Ita est latus alterum

Ad finem anguli sibi oppositi.

Hæc analogia est inverfa prioris, per quam etiam inveniri potest latus tertium.

760. III. Datis duobus lateribus & angulo comprehenso, invenire reliquos angulos.

Ut summa laterum datorum

Ad eorundem differentiam;

Ita est tangens semisummæ angulorum quæditorum

Ad tangentem eorum semidifferentiæ (751).

Exemplum. Sit AB (Fig: 64.) 865 pedum; CB 517 pedum; angulus ABC $96^{\circ}.36'$. Adhibitis logarithmis erit

AB.....865 ABC $96^{\circ}.36'$

BC.....517 Summa reliquorū $83.24...$ suplem:

Summa 1382. (491). Semif:reli: 41.42

Differentia 348...log...2,54158

tang. $41^{\circ}.42'$.. 9,94986

12,49144

log. 1382 3,14051

9,35093 log.tang. $12^{\circ}.39'$ semid:

Semisumma 41.42

Angulus quæsitus major . 54.21

Angulus quæsitus minor . . 29.3

Angulus ACB oppositus lateri majori AB, est major, consequenter $54^{\circ}.21'$; & angulus alter BAC $29^{\circ}.3'$

761. IV. *Datis duobus lateribus cum angulo comprehenso, invenire latus tertium.*

Quærantur per regulam præcedentem reliqui anguli; & tum per regulam primam latus tertium (758.)

762. V. *Datis tribus lateribus invenire angulos.*

Si dentur (Fig: 64) tria latera AC, AB, BC, ut reperiatur angulus quivis A, fiat imprimis hæc analogia:

Ut latus omnium trium maximum AC

Ad summam reliquorum duorum AB + BC,

Ita est differentia reliquorum duorum AB — BC

Ad differentiam segmentorum lateris maximi CE, EA, quæ sunt perpendiculari ex angulo ei opposito B demissa.

Cum itaque CA sit summa segmentorum CE, EA; & AD eorum differentia; erit CE (232)

$$= \frac{AC - AD}{2}, \text{ \& EA} = \frac{AC + AD}{2}.$$
 Unde in tri-

angulis rectangulis CEB, BEA, dantur jam bina latera BC, CE; & AB, AE: quare anguli inveniri possunt (756).



TRACTATUS ANALYTICUS

D E

SECTIONIBUS CONICIS.

Notiones præviæ de Curvis in genere; Et de Methodo exprimendi analytice præcipuas proprietates.

763. **F**unctio alicujus quantitatis dicitur, quidquid eam reddit compositam, vel impedit, ne possit ut simplex spectari. Exempli causa, functio in genere quantitatis a est quævis ejus potentia, quævis radix, summa, differentia, factum, quotiens &c.

764. Methodus determinandi positionem alicujus puncti in plano, commodissima, & apud Geometras maxime usitata est, si referatur ad duas rectas diversum inter se situm in eo plano habentes, id, quod facile est, si puncti ab utraque recta distantia sciatur, & ad quam earum partem sit collocandum; ut si punctum M (Fig: 65) ponendum sit infra rectam AS positione datam in distantia æquali rectæ DE , & ad partem sinistram rectæ SF in distantia æquali datæ BC ; tum vero ducta infra AS parallela GH , ita, ut omnes perpendiculares inter eas ductæ æquantur datæ DE , evidens est, punctum debere cadere in hanc parallelam: quod si porro fiat ex parte sinistra KI parallela ad SF , ut perpendiculara inter eas intercepta sint æqualia rectæ BC , pariter liquet, etiam in hac KI debere esse punctum M : quare dubium esse nequit, punctum M cadere in intersectionem rectarum KI , GH .

765. Si datis puncti M a rectis AS , SF distantis, non simul determinaretur, versus quam earum partem situm esse debeat, ejus positio foret indeterminata, quippe quæ in quatuor locis m , μ , η , ν æque haberi posset. Ut igitur hæc ambiguitas tol-

leretur, id convenit inter Geometras, ut situs oppositi per signa contraria $+$ & $-$ denotarentur; exempli gratia, assumpta recta AS pro termino, ad quem referantur rectæ, quæ supra, vel infra eam ducuntur, aliæ dicentur positivæ, aliæ negati-

tivæ; & si SF constitutur terminus, quo lineæ versus dextram partem ductæ distinguantur ab iis, quæ cadunt versus sinistram, rursus aliæ positivæ erunt, aliæ negativæ. Utras autem quis positivas, vel negativas haberi velit, ab initio cuius integrum est; at ubi semel id determinatum fuit, nihil amplius in calculis ad eandem figuram pertinentibus immutari potest.

766. Si ex puncto M methodo superius exposita determinato demittantur perpendiculara MT, MR, triangula rectangula MTV, MPR similia sunt, cum ablato ex rectis TMP, VMR angulo communi TMR, maneat $TMV = PMR$. Est igitur $MV:MP::MT(vel DE):MR(vel BC)$. Quare perpendicularibus MT, MR, distantias datas metientibus, substitui poterant parallelæ MV, MP, & situs puncti M ex his conditionibus determinari, ut sit infra AS, ad sinistram rectæ SF, atque parallelæ ex eo ad AS & SF ductæ sint altera $= MP$, altera $= MV$. Quod si enim accipiat in SP infra AS pars $SP = MV$, & per P agatur parallela ad AS, nempe GH, solum opus est, ut in eam transferatur ex P recta $= PM$, eritque punctum M exacte determinatum, uti prius.

767. Plerumque curva in plano descripta consideratur ut series vestigiorum progressuum momentaneorum, quæ reliquit punctum mobile in plano fluens; atque ut natura & proprietates curvæ constitui possint, necesse est, ut ea series sit series punctorum M. M (Fig. 68) eodem semper modo determinantum respectu rectarum AS, SP in eodem plano diversum situm habentium, sitque functio quævis determinata rectæ MP ad similem functionem rectæ correspondentis SP in ratione constante: atque hinc punctum M curvam describens secundum certam legem moveri perpetuo debet, quam observet in angulis infinitè parvis suorum flexuum.

Æquatio Algebraica, quæ exprimit hanc legem, seu rationem constantem functionis rectæ cujusvis MP ad functionem correspondentis rectæ SP, dicitur æquatio ad curvam; recta, ad quam terminantur omnes parallelæ, dicitur linea abscissarum, utpote cum abscissæ vocentur partes SP, SP &c hujus lineæ, quæ inter punctum determinatum S (quod origo abscissarum appellatur), per quod transit recta AS, & parallelas ad AS, nempe MP (quæ dicuntur ordinatæ, vel ordinatim applicatæ) intercipiuntur. Ex quo deducitur, quod si semel sciatur abscissarum origo, & positio unius ex ordinatis, rectæ AS nullus amplius sit usus.

768. Ut hæc exemplo illustrentur, supponamus esse s MS (Fig 69) semicirculum, cujus diameter sS . Notum est (565), quod si e puncto quovis M ad diametrum demittatur perpendicularis MP , semper sit $MP^2 = SP \times Ps$. Igitur sumpta Ss pro linea abscissarum, & puncto S pro earundem origine, æquatio ad eirculum debet exprimere, quadratum cujusvis ordinatæ MP esse æquale factò ex abscissa SP in partem residuam diametri Ps . Unde posito $Ss = a$, $MP = y$, $SP = x$ (nam illud observandum, ordinatas curvarum plerumque vocari y ; & abscissas x ; ita, ut in familiari sermone x & y , adhibeatur, cum abscissas, & ordinatas curvæ alienius significare volumus), erit $Ps = a - x$; hinc $yy = ax - xx$ æquatio ad circulum, quoniam in ea exprimitur constans æqualitas ejusdem functionis ordinatæ (nempe quadrati) ad eandem functionem abscissæ (scilicet producti ex ea in residuam partem diametri).

769. Ex his manifestum est, ordinatas curvæ, & correspondentes abscissas debere esse quantitates indeterminatas, seu variables, sed quarum una ex altera deduci possit, facta semel suppositione certæ magnitudinis alterutrius, atque ex quantitatibus determinatis, sive *constantibus*, quæ in æquatione continentur; unde nec difficile erit ipsam curvam describere. Exempli causa, in æquatione ad circulum est a quantitas constans, seu invariabilis; unde si sumatur $a = 10$, & in Ss fiant quotcunque abscissæ SP (quæ majoris commoditatis causa plerumque accipiuntur in progressionem Arithmetica, ut intervalla PP sint æqualia) ut si SP , sive x ponatur successive $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; ex æquatione $yy = ax - xx$, reperientur ordinatæ correspondentes $0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}, 5, \sqrt{24}, \sqrt{21}, 4, 3, 0$; si itaque e punctis P erigantur totidem perpendiculares ad Ss & fiant æquales $3, 4, \sqrt{21}$ &c., habebuntur tot puncta M , per quæ descripta curva erit circulus eo accuratior, quo ordinatæ MP fuerint aliis aliæ propiores. Et quoniam æquatio $yy = ax - xx$ habet etiam radices negativas $-3, -4, -\sqrt{21}, -\sqrt{24}$, &c., totidem, ac positivas $3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}$ &c.; patet, quod si productis rectis MP ad partem alteram rectæ Ss (765) accipiantur totidem, & æquales Pm , habeatur circulus integer SMm .

Illud quoque intelligitur, quod si SP accepta fuisset major, quam Ss , sive $x > a$, correspondens ordinata facta fuisset quantitas imaginaria, seu impossibilis: etenim hoc posito fuisset $ax - xx$ quantitas negativa, adeoque ejus radix quadrata impos-

possibilis (242). Quare necesse est, ut semicirculus absolute terminetur in s , nec potest ejus ramus SMM ulterius descendere.

770. Vicissim, cum omnes solutiones possibiles problematis indeterminati (235) contineantur in æquatione, in qua duæ quantitates sunt incognitæ, poni potest, omnes valores possibiles unius ex incognitis exhiberi per seriem abscissarum alicujus curvæ, & valores alterius incognitæ correspondentes per ordinatas ad eandem curvam, ita, ut quodvis curvæ punctum habeat suam ordinatam, & abscissam, quæ accuratam solutionem problematis indeterminati præbeat, quod ea æquatione exprimitur.

771. Varii gradus æquationum opportuni sunt ad varia genera, & ordines linearum constituendos; uti & diversæ combinationes functionum quantitatum incognitarum, quæ in æquatione certi gradus occurrunt, serviunt ad secernendas lineas in diversas species, comprehensas sub eo genere, quod gradus æquationis indicat. Numerus harum combinationum possibilium, atque inter se reapse diversarum, determinat numerum specierum. Sic *lineæ primi generis* vel *primi ordinis* dicuntur, quarum æquationes sunt primi gradus; *lineæ secundi generis*, vel *secundi ordinis*, quarum æquatio est secundi gradus, & sic deinceps. Linea primi generis est sola recta; secundi generis lineæ sunt tantum quatuor sectiones conicæ; tertii generis sunt 72, & adhuc plures quarti &c. Verum hæc intelligenda sunt de curvis, quæ vocantur *Geometricæ*, cujusmodi sunt, quarum abscissæ & ordinatæ sunt rectæ rationis geometricæ determinabiles, hoc est, quæ non exprimuntur per quantitates, quarum magnitudo Geometricæ determinari nequit, uti forent rectæ æquales arcibus circuli; secus, hoc est, si ordinatæ, vel abscissæ, vel non essent rectæ, aut rectæ ejusmodi, quarum expressionem ingrederentur v. g. arcus circuli, curva foret *mechanica*, vel *transcendens*. Quod si porro curva plana non sit, hoc est, si punctum eam describens non moveatur semper in eodem plano, appellatur *curva duplicis curvaturæ*.

772. Si curva plana MS m (Fig. 66) seu Geometrica, seu Mechanica, sit ejusmodi, ut productis ordinatis ultra lineam abscissarum SF, usque dum rursus occurrant curvæ in m , semper habeatur $Pm = PM$, recta SF dicitur curvæ *diameter*, & punctum curvæ S, per quod ea recta transit, *origo diametri*, quod plerumque simul est origo abscissarum. Si præterea ordi-

natae sint ad hanc diametrum perpendiculares, ea appellatur *axis curvæ*.

773. Omnium curvarum diametrum habentium, cujus respectu consequenter duo earum rami utrinque SMM, S m m in eandem partem se se extendunt, ea est communis proprietas, quod recta SA ad ordinatas parallela per punctum S (originem diametri) ducta, curvam in eodem puncto S tangat. Nam cum diametrum semper transeat per medium duplicis ordinatae utrinque in curva terminatae, si concipiatur recta M m ita moveri, ut sibi ipsi maneat parallela, usque dum perveniat ad S, erit punctum S in medio inter partes infinite parvas rectae M m, quæ itidem, ut prius, utrinque terminabitur in curva: & quoniam tunc M m non nisi infinite parum intra curvam existit, ejus partes terminatae in curva, sunt dimidia lateris infinite parvi curvæ, quod latus congruit cum S, ideoque etiam M m cum eodem latere congruit. Jam vero tangens nihil aliud est, quam productio finita lateris infinite parvi; igitur parallela ad ordinatas transiens per S, est productio finita lateris infinite parvi congruentis cum S; adeoque est tangens curvæ in eodem puncto.

774. Si diametro vel axi (producto) SP (Fig. 93 & 94) occurrat tangens TM, pars hujus diametri TP, inter punctum concursus T cum tangente, & inter ordinatam ex puncto contactus M ad eandem diametrum ductam, intercepta, vocatur *subtangens*. Et si in puncto contactus M erigatur *perpendicularis*, seu *normalis*, ad tangentem MT, nempe MN, pars diametri PN inter puncta concursus normalis, & ordinatae ex puncto contactus ductæ, cum diametro, intercepta, dicitur *subperpendicularis*, seu *subnormalis*.

775. Quando curva non redit ad suam diametrum, hoc est, quando ejus rami semper longius a diametro recedunt, ex omnibus ejus punctis M, M, &c (Fig. 66) duci possunt ad diametrum SP parallelae MQ, NQ, usque ad rectam SQ, quæ ad ordinatas curvæ parallela, & per originem abscissarum S transit; ita, ut omnes eæ rectæ MQ sint extra curvam. Tum vero manifestum est, fieri parallelogramma similia PQ, PQ &c, & posse rectas MQ, MQ accipi pro abscissis SP, SP; & rectas SQ, SQ pro ordinatis. Id genus ordinatae dicuntur *coordinatae*, & parallelogrammum PQ vocatur *parallelogrammum coordinatarum*, angulusque QSP, *angulus coordinatarum*.

776. Quoniam per hypothesin curva nihil aliud est, quam vesti-

vestigia æqualia puncti progressibus momentaneis moti, atque post singulos progressus deflectentis, ita, ut in variatione angulorum infinite parvorum suorum flexuum observet legem quandam constantem, sequitur *imo*, *lineas mixtas considerationis Geometricæ non esse*, hoc est, eas, quæ partim rectæ, partim curvæ sint: talis enim lineæ descriptio fieri nequit a puncto eadem semper lege moto.

777. 2do infertur, *contactum curvæ cum recta non posse fieri, nisi in unico puncto*. seu a recta non posse tangi curvam in duobus, tribusve punctis diversis ejusdem arcus continui; id enim si fieret, punctum curvam describens sine flexu describeret illa contactus loca, ex quo lex constans post singulos progressus momentaneos deflectendi interrupta fuisset.

778. 3tio deducitur, *curvaturam alicujus curvæ eo esse majorem, quo anguli flexuum majores sunt, ratione habita magnitudinis progressuum momentaneorum puncti curvam describentis*.

Exempli causa, circulus est curva ita descripta a puncto mobili, ut post singulos progressus æquales singulis momentis peractos æqualiter deflecteret: & quia duo circuli, major, minorque, sunt duo polygoni regularia ejusdem numeri laterum & angulorum, ita, ut latera majoris circuli majora sint lateribus minoris in ratione radiorum, anguli flexuum, seu angulorum internorum a duobus lateribus contiguis comprehensorum complementa ad duos rectos in circulo majore, sunt æquales angulis flexuum in circulo minori: evidens est igitur, singula latera majoris circuli tanto minus deflectere a recta, quo majora sunt, seu quo radius circuli majoris major est radio minoris, puncto circum majorem describente scilicet, tanto magis singulis momentis in recta progrediente. Quare *circuli curvatura eo minor est, quo major est radius; sive curvatura est in ratione inversa diametri*. Unde consequitur *magnitudinem radii circuli esse quantitatem aptam ad ejus curvaturam exhibendam*.

779. Præcipua problemata in examine alicujus curvæ occurrentia sunt *imo*, ut investigetur, qua ratione curva describi debeat, si detur ad eam æquatio; & vicissim quæ ad eam æquatio ex constructione data deduci debeat. 2do. Quomodo ad datum quodvis illius punctum duci possit tangens; hoc est, inquirere, quæ sit positio, lateris infinite parvi eo in loco, ad quem tangens ducenda est; seu etiam determinare directionem puncti

fluentis, dum latus illud infinite parvum descripsit. Hinc porro connaturale est, ut etiam quærantur subtangens, normalis, & subnormalis. 3tio. Quæ sit curvatura in arcu exiguo dato. Hunc in finem supponitur, per tria puncta proxima arcus curvæ minimi transire circumferentia circuli, quæ adeo in illo arcu cum curva congruit, atque radius hujus circuli ex æquatione ad curvam, ejusque proprietatibus determinatus exhibet curvaturam arcus dati. Vocatur vero ejusmodi radius circuli *radius curvaturæ, radius circuli osculatoris, radius osculi, radius evolutæ*. 4to. Indagatur, quæ sit curvæ quadratura, hoc est, quam aream, vel superficiem, curva integra intra se concludat, aut aliqua pars data, ut est spatium arcu LM (Fig. 67) curvæ, parte diametri CP, & duabus ordinatis MP, CL comprehensum, quarum altera, velut CL, per originem abscissarum x transit. Hoc ut obtineatur, supponuntur tot parallelogramma $p q m n$, una ex parte ad curvam, ex altera ad lineam abscissarum terminata, lateribus reliquis ad ordinatas CL vel MP' parallelis, quot inter C & P sunt puncta; hæc igitur parallelogramma & numero infinita sunt, & tam exigua, ut, lateribus $p m, q n$ infinite propinquis, haberi possint pro ipsis ordinatis ad diametrum CP. Quoniam porro CP est ultima x , omnes x inter originem earum C interceptæ, singulisque ordinatis inter CL & PM respondentes crescunt in

hac progressionem Arithmetica $1 \frac{x}{\infty}, 2 \frac{x}{\infty}, 3 \frac{x}{\infty}, 4 \frac{x}{\infty}, \dots$

$\infty \frac{x}{\infty} = x$. Etenim ordinatæ primæ CL infinite propinqua habet abscissam partem infinite parvam rectæ CP, hoc est $1 \frac{x}{\infty}$; sequentis abscissæ est prioris dupla, utpote respondens puncto alteri ab origine C; est itaque $2 \frac{x}{\infty}$; tertiæ y abscissæ est tripla primæ, sive $3 \frac{x}{\infty}$, & sic deinceps; unde manifestum est, omnes

abscissas exhiberi posse hac serie infinita $1. 2. 3. 4. \dots x$. Et quia æquatio ad curvam nullam aliam indeterminatam involvit, quam y & x , totidem valores de y accipi possunt, quot sunt x , seu quot sunt termini dictæ progressionis; habebitur ergo series infinita ordinarum inter CL & PM; & siquidem

ea series summari possit, areæ CLMP quadratura exacta habebitur, secus vero; si satis cito dicta series convergat, quadratura datur prope vera, eoque accuratio, quo plures termini seriei ordinatarum summantur.

His problematis ut satisfiat, duplicis generis calculus plerumque adhibetur, nempe Analysis vulgaris, & calculus infinitesimalis, cujus principia in sequentibus dabimus.

De natura, & proprietatibus præcipuis Sectionum Conicarum in plano descriptarum, atque ad earum axes relatarum.

780. Sectionem Conicam dico eam lineam, cujus singulorum punctorum distantia, altera MG a recta AG (Fig 70, 71, 72) (quam *directricem sectionis* appellabo); altera MF ab eodem puncto F (quod *focum sectionis* vocabo) extra rectam AG sito, semper sunt in eadem ratione.

781. Sectio porro est *Ellipsis*, si sit $MG > MF$; *hyperbola*, si $MG < MF$; *parabola*, si $MG = MF$; *circulus*,

$\frac{MG}{MF} = \frac{r}{\infty}$; recta, si $\frac{MG}{MF} = \frac{r}{\infty}$. In præsens priores tres rationes tantum considerabimus; ex quibus habentur curvæ, propriæ sectiones conicæ dictæ.

782. Recta AF per focum F ad directricem AG perpendicularis ducta, est sectionis *axis principalis*. Punctum hujus S inter F & A situm; ita, ut sit SA ad SF in ratione constante sectionis, est *vertex sectionis*, *origo*, vel *extremum axis principalis*.

783. Igitur *sectio conica est Ellipsis, hyperbola, vel parabola*, ut ejus vertex propior, remotior, vel in eadem distantia a foco fuerit, ac a directrice.

784. Si datis directrice positione, foco, ac vertice S, oporteat quotcunque sectionis puncta invenire, ac ipsam curvam describere, erigatur ex vertice S, ad axem perpendicularis SB $= SF$; ducatur indefinita ABD; & erectis quotlibet ad axem perpendicularibus PD, PD, PD, atque etiam, si lubet ex altera verticis parte, accipiantur in iisdem puncta M, M ea lege, ut semper sit FM $= PD$; transferantur quoque PM in productas ad alteram partem axis, ut sit quævis PM $= Pm$; denique curva per puncta M, M, m, m, transiens erit sectio conica quæ sita.

fit. Etenim si ex quovis ejus puncto ducatur ad directricem perpendicularis MG, erit, ob triangula similia ASB, APD, DP (seu FM) : PA (seu MG) :: SB (vel SF) : SA.

Et quia puncta m , m sunt in iisdem rectis, atque ad eandem ab axe distantias cum punctis M, M; quod dicitur de ramo curvæ SMM, idem dicendum est de altero Smm , priori æquali & simili, qui propterea easdem habet proprietates. Ex allata constructione facile sequentes proprietates deducuntur.

785. I. In parabola *angulus* SAB est 45° ; in ellipsi *minor*; major in hyperbola.

786. II. Quamdiu rectæ FP minores sunt, quam rectæ PD, semper puncta M determinari possunt: etenim rectæ PD debent esse æquales rectis FM (784); & rectæ FM sunt hypotenusæ triangulorum rectangulorum FMP, consequenter majores rectis FP. Unde si aliqua FP fiat æqualis correspondenti suæ PD, punctum M necessario cadet in punctum P axeos; at si FP evadat major correspondente PD, punctum M determinari nequit. Hoc posito

In ellipsi (Fig. 70.) rectæ AP crescunt magis, quam correspondentes PD; quia $AS > SB$ (784): igitur rectæ FP, quæ sunt ultra focum F respectu verticis S, debent primo quidem æquare: dein vero etiam excedere sibi correspondentes PD. Sit $FP''' = P'''D'''$; jam Punctum M''' cadet in axem, ibique curvam terminabit. Quod si enim acciperetur aliqua PD ultra $P'''D'''$, seu etiam inter A & SB, ea nimis brevis foret, quam ut posset determinari punctum M ejusmodi, ut sit $FM = PD$. Est ergo *ellipsi curva*, *cujus rami SMM, Smm ab initio ab axe ex utraque parte discedunt, dein ad eundem revertuntur, ac se in s conjungunt ita, ut axis ejus principalis terminetur in hoc puncto s, quod est alter ellipseos vertex.*

787. In hyperbola (Fig. 71) cum sit $AS < SB$, rectæ AP minus crescunt, quam correspondentes iis PD; unde nulla FP ultra F respectu directricis potest æquare suam PD, ut adeo *rami SMM, Smm hyperbolæ utrinque in infinitum ab axe SP, discedant.* At si, producta BA ultra directricem versus H, accipiantur rectæ FP trans directricem, erunt eæ quidem ab initio majores, quam correspondentes PD; sed quia rectæ PD magis crescunt, quam earum FP, paulo post devenietur ad unam, velut FP''' , quæ sit $= P'''D'''$; dein erunt FP minores, quam correspondentes PD. Jam vero ob $FP''' = P'''D'''$, punctum

P''' pertinet ad hyperbolam, cum ex triangulis similibus $D''' P''' A$, ASB sit $P''' A : P''' F$ (vel $P''' D'''$) :: $AS : SB$. Et quia rectæ PD ultra $P''' D'''$ semper crescere pergunt, atque magis semper, magisque excedunt correspondentes sibi FP , etiam ultra directricem determinari poterunt puncta μ ejus conditionis,

ut rectæ $F \mu$ sint æquales PD rectis, sientq; utrinq; ad axem novi rami hyperbolici in infinitum excurrentes, qui ad focum F , & directricem AG pertinent: unde recta SP''' , vel Ss sit axis communis, & determinatæ magnitudinis inter vertices S , & duarum hyperbolarum oppositarum.

788. Quoniam in parabola (Fig. 72) ob $AS = SB$, etiam $AP = PD$, omnes rectæ PF cis S respectu directricis sunt necessario majores, quam correspondentes PD ; & omnes PF trans S acceptæ sunt necessario minores suis PD : unde ultra verticem S possunt infinita puncta M in rectis PD determinari, eritque parabola curva, cujus duo tantum sunt rami æquales, & in infinitum ab axe recedentes.

789. III. Si datis (Fig. 70, 71, 72) directrice AG , foco F , & vertice S , quærat, utrum sectio habeat axem finitum, adeoque alterum verticem s ; ducatur per focum F sub angulo 45° ad axem indefinita FH , & ex puncto H , in quo occurrit rectæ AB (productæ, si opus sit), demittatur perpendicularum ad axem Hs , quod abscindet axem in s , alterumque verticem sectionis determinabit. Nam triangulum rectangulum FsH est isosceles, adeoque $Fs = sH$, habeturque $A : sH$ (sF) :: $SA : SB$ (vel SF); est igitur punctum s curvæ, atque in ipso ejus axe situm, ideoque sectionis vertex.

790. Colligitur hinc, ellipsin, & hyperbolam semper habere axem Ss determinatæ magnitudinis. Ac in ellipsi axis semper terminatur ultra focum F respectu verticis S , cum angulus SAB minor sit 45 gradibus (785); in hyperbola terminatur ad partem oppositam, quia angulus SAB est 45 gradibus major. In parabola vero axis est infinitus, quoniam FH parallela est ad AB , neque nisi utrinque ad distantiam infinitam versus A vel D , cum ea concurrere potest.

791. IV. Si in axe Ss producto accipiatur $sa = SA$ (Fig. 70, & 71) & in producta $P''' D'''$ fiat $sb = SB$, erit recta indefinita abd ad ABD parallela, cum anguli alterni SAB , sab æquales sint; & parallelæ Dd & c , erunt singulæ axi principali Ss æquales. Nam in ellipsi (Fig. 70) axis $Ss = sF + F$
 S

$S = sH + sb = bH$; & in hyperbola (Fig. 71) est $Ss = sF - FS = sH - sb = bH$; sunt autem omnes dD ad bH parallelæ & æquales.

792. Illud etiam verum est, quod si accipiantur binæ PD a verticibus S, s æquidistantes, sit $Ss = PD \pm Pd$; hoc est, in ellipsi summa duarum PD a verticibus æquidistantium sit æqualis axi principali Ss ; (nam omnes PD inter SB , & sH , æquidistantes, sunt in proportionem Arithmetica); in hyperbola autem axis principalis Ss sit æqualis differentię duarum PD a verticibus S, s æquidistantium.

793. V. Ex hoc autem sequitur, *ordinatas a verticibus sectionis Ss utrinque æqualiter distantes, esse inter se æquales*, quod nempe tunc triangula rectangula $a P m$, $a P M$ æqualia sunt, ob angulos ad A, a , & latera $AP, a P$ æqualia.

794. VI. Item deducitur, quod si ducatur $a \gamma$ ad AG parallela, accipiatque in Ss punctum f ita, ut sit $sf = SF$, ellipsis & hyperbola æque describi possunt e puncto f tanquam foco, & directrice $a \gamma$, quemadmodum descriptæ sunt ope foci F , & directricis $A G$.

795. VII. Pariter infertur, esse $Ss = FM \pm fM$ (signo $+$ obtinente in ellipsi, & signo $-$ in hyperbola). Nam quævis FM est æqualis suæ PD , & quævis fM suæ PD tantum distanti a vertice S , quantum PD , in qua est punctum M , distat ab altero vertice s ; atqui tunc est (792) $PD \pm PD = Ss$; igitur etiam $MF \pm Mf = Ss$.

796. VIII. Quare in ellipsi est *cujusvis puncti perimetri distantiarum summa a duobus punctis fixis constans, seu axi principali æqualis*; & in hyperbola *cujusvis puncti distantiarum a duobus fixis differentia constans est, & æqualis axi principali*.

797. Ex hac proprietate fluit methodus facilis ellipsin aliquam majorem etiam super pavimento, vel in campo describendi. Figantur in F , & f (Fig. 70) duo paxilli, & extremis funiculi Ff MF inter se colligatis, tendatur is ope alterius styli ad M , itaque circa paxillos fixos circumducatur, ut styli vestigia in terra notentur: erit ea via ellipsis. Sit enim stylus in S , evidens est funiculum æquari $2 Ff + 2 SF$, seu $2 Ff + SF + sf$, hoc est. $Ss + Ff$; jam vero dum circumducitur stylus, pars funiculi Ff non nisi distantiam focorum metitur; igitur ejus residua pars est æqualis Ss , & metitur distantias cujusvis puncti curvæ a focus; est igitur quodvis punctum curvæ ita descriptæ in ellipsi.

798. IX. Ex iis, quæ superius (793) ostendimus, sequitur etiam: esse $Ss: Ff:: SA: SB$. Etenim est $sA: sF:: SA: SB$; igitur $sA \mp SA$ (seu Ss): $sF \mp SB$ (vel Ff): $SA: SB$; signo nempe — pro ellipsi, & + pro hyperbola adhibito.

799. X. Ulterius infertur, duplas ordinatas mM in ellipsi (Fig. 70) ab utrovis vertice S, s semper crescere, usque ad eam, quæ est inter vertices media, quæ proinde omnium maxima est, ac ellipseos maximam latitudinem metitur (quemadmodum Ss ejus longitudinis mensura est); atque hinc etiam axis secundus ellipseos dicitur, qui in Figura citata est $m''CM$. Punctum C , in quo occurrit axi majori Ss , est centrum ellipseos. Ex quo facile apparet, 1mo, per axem minorem totum spatium ab ellipsi comprehensum secari bifariam, uti etiam per axem majorem: atque adeo per utrumque axem ellipsin secari in quatuor partes æquales. 2do, dato axe majore Ss & focus F, f , determinari axem minorem, si secto axe majore bifariam, & e puncto bisectionis erecta perpendiculari $d''D$ in hac determinantur puncta m'' & M'' , semiaxe majore ex alterutro foco in eam translato. Erit namque $M''F = M''f$, ob triangula rectangula FCM'' , fCM'' æqualia, & $M''F + M''f = Ss$. 3tio. Vicissim dato utroque axe inveniri focos, si semiaxis major ex puncto extremo axis minoris utrinque in axem majorem transferatur.

800. In hyperbola (Fig. 71) duplæ ordinatæ a vertice utrovis Ss , in infinitum crescunt; atque ut analogia ejus cum ellipsi observetur, centrum hyperbolæ dicitur punctum C inter vertices medium; Ss vocatur *axis primus*, *axis principalis*, *axis transversus*. At vero *axis secundus*, *axis rectus* appellatur recta lCL , ad axem primum normalis, & determinata in l & L , translata nempe in hæc puncta ex alterutro vertice S vel s dimidia distantia focorum CF , vel Cf . Atque hinc intelligitur, qua ratione inveniantur foci datis axibus hyperbolæ.

801. Dupla ordinata per focum sectionis conicæ transiens dicitur *parameter* axis principalis sectionis.

802. XI. Ex constructione generali sectionum conicarum, quam attulimus, præterea illud consequitur, quod omnes sectiones ad eandem speciem pertinentes v.g. omnes ellipses, sint figuræ similes, si distantie AS earum verticis a directrice cum distantis earundem verticis a foco proximo, nempe SF , sint proportionales. Hac enim in hypothesi omnes AP , omnes PD ,

Pp

vel

vel FM unius sectionis sunt proportionales cum AP, PD, vel FM homologis alterius sectionis; consequenter omnes dimensiones homologæ harum sectionum sunt proportionales, ideoque figuræ similes.

803. COROLL. I. *Duæ ellipses, vel duæ hyperbolæ sunt similes, si axes unius sint proportionales axibus alterius; aut si distantia verticum sint proportionales intervallis focorum.*

804. COROLL. II. *Omnes parabolæ sunt figuræ similes. Est enim in omnibus AS = SF (Fig. 72).*

805. PROBLEMA I. *Ad punctum datum M sectionis conicæ ducere tangentem.*

RESOLUTIO. Ducantur e focus F, f sectionis (Fig. 76 & 77) per datum punctum M indefinitæ fMm, dividatur angulus F M m, per quem curva transit, bifariam recta TM, erit hæc tangens quæsitæ.

DEMONSTRATIO. Describatur puncto M tanquam centro, & radio MF, arcus Fm; metiens angulum F M m; patet, esse $fm = Ss$, ob $fm = Mf + MF$. Quod si jam e quovis puncto alio A rectæ TM ducantur Af, AF, Am, erit (441) $AF = Am$, consequenter $Af + Af = AF + Am$. In ellipsi autem (Fig. 76) est $Af + Am > fm$ (494), e quo manifestum est, esse punctum A extra curvam (795); & in hyperbola (Fig. 77), si foret $Af - Am = fm$, (795) ut ejus natura poscit, siquidem punctum A ad eam pertineat; esset simul $Af = Am + fm$ (545), quod est absurdum. Igitur præter M nullum est punctum in recta TM, quod sit in curva.

806. SCHOLIUM. Præcedens solutio applicari quoque potest parabolæ, si per datum punctum M (Fig. 78) ducatur recta MF, & altera Mm axi parallela, quæ proinde censetur ex altero foco infinite distante venire, & dividatur angulus F M m bifariam *

* Si datur punctum extra sectionem conicam, ac petatur, ut inde ducatur tangens; sequens resolutio adhiberi poterit: si sectio sit parabola, sumpto centro in puncto dato, & radio æquali ejusdem puncti distantia a foco, describatur arcus, qui directricem interfecit: si ex hoc puncto intersectionis ducatur parallela ad axem, ea in parabola determinabit punctum, in quo recta e puncto dato ducta parabolam tangit. Demonstratio parabit

807. COROLL. I. *Angulus* $b M f$ *at punctum contactus* (Fig. 76, 78), *inter tangentem* Mb , *& rectam* $M f$ *tendentem ad alterutrum focum, semper est æqualis angulo* FMT *inter eandem tangentem, & rectam* MF *ad alterum focum ductam. In hyperbola* (Fig. 77) *est* $b M f = b M F$, *quod eodem redit.*

808. COROLL. II. *Chorda* Fm *per tangentem semper bifariam in partes* KF *&* Km , *& ad angulos rectos secatur.*

tebit figuram construenti, si ex dato puncto ducantur ad focum, & ad punctum intersectionis arcus cum directrice radii, atque hoc idem intersectionis punctum cum foco jungatur, focusque cum puncto contactus.

2do. *Si sectio sit ellipsis, describatur arcus e puncto dato, tanquam centro, radio æquali distantie ejusdem a foco viciniore; tum alter arcus e foco remotiore, & radio æquali axi majori, qui priorem arcum interfecet. Quod si focus remotior jungatur recta cum puncto intersectionis arcuum, ea secabit ellipsin in puncto, ad quod ex dato ducenda est tangens. Demonstratio ex ipsa constructione facile intelligitur.*

3tio. *Si denique sectio sit hyperbola, eadem fere manet constructio; nempe e puncto dato tanquam centro describitur arcus, cujus radius sit æqualis distantie puncti dati a foco viciniore hyperbolarum oppositarum; tum assumpto pro centro foco altero, & radio æquali axi transverso prior arcus intersectatur; per punctum intersectionis agitur recta e foco posteriore, producenda, donec occurrat hyperbolæ, ac determinet ejus punctum, ad quod a puncto dato ducenda est tangens.*

Illud tamen isthic observandum, cum arcus tam sese, quam directricem parabolæ bis intersectare possint, tangentes posse duas duci, nisi si punctum datum sit in centro hyperbolarum: tunc enim utraque tangens fiet asymptotus: si detur in asymptoto, altera tangens duci poterit, altera cum asymptoto congruet. Ceterum methodus, quam pro ellipsi præscripsimus, etiam sufficit pro circulo, dum nempe distantia focorum in ellipsi evanescit.

809. Observa. Deinceps semper appellabimus *abscissam* ordinatæ ad axem, vel generaliter ad diametrum, distantiam punctorum extremorum diametri ab eo puncto, in quo ei ordinata, etiam si opus est, productæ, occurrit, itaque ellipsis, circulus, hyperbola semper habent duas abscissas singulis ordinatis respondentes. Sed quoniam eadem litera x diversæ abscissæ exprimi nequeunt, semper vocabimus x , & abscissam, illam partem diametri, quæ inter ordinatam, & punctum diametri determinatum, nempe originem abscissarum, comprehenditur.

810. PROBLEMA II. *Invenire æquationem, quæ exprimat rationem functionum ordinarum ad functiones suarum abscissarum, earum origine in vertice diametri sumpta.*

RESOLUTIO. Sit in ellipsi (Fig. 76) $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF , seu $sf = c$; $SP = x$, $PM = y$: erit $Ps = 2a - x$, $PC = a - x$, $PF = x - c$, $CF = a - c$, $Ff = 2a - 2c$, & $Pf = 2a - c - x$. Jam in triangulo FIC est (562) $FI^2 = FC^2 + IC^2$, seu $aa = aa - 2ac + cc + bb$; atque hinc $cc = 2ac - bb$. His positis in triangulo FMf habetur (750) $fM + MF (2a) : Ff (2a - 2c) :: fP - PF$
 $(2a - 2x) : fM - MF = 2a - 2x - 2c + \frac{2cx}{a}$.
 Igitur (232) $MF = a - a + x + c - \frac{cx}{a} = x + c - \frac{cx}{a}$. Est autem in triangulo rectangulo PMF , $PM^2 = FM^2 - PF^2$, seu $yy = xx + 2cx + cc - \frac{2cxc}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$
 $= xx + 2cx - cc$, & facta reductione, $yy = 4cx - \frac{2cxc}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$;
 & substituto $2ac - bb$ pro cc , ac reductione adhibita, tandem habetur $y y = \frac{aa}{a} - \frac{bbxx}{aa}$.

Pro hyperbola (Fig. 77) positis eodem modo $Ss = 2a$, $Ll = 2b$; SF , vel $sf = c$, $SP = x$, & $PM = y$, est $Ps = 2a + x$, $PC = a + x$, $PF = x - c$, $Pf = x + 2a + c$, CF vel $Sl = a + c$ (800). Est igitur in triangulo rectangulo SCI , $SI^2 = CI^2 + SC^2$, sive $aa + 2ac + cc = bb + aa$, adeoque $cc = bb - 2ac$. Sumatur dein $M \phi$
 MF ,

MF, & transferatur ex M in partem alteram ordinatæ MP, fiet $P\phi = PF$, & in triangulo ϕMf habebitur $Mf = M\phi$, seu $fM = FM(2a) : f\phi(2a+2x) :: Pf - P\phi(2a+2c) : FM$

$$+ fM = 2a + 2c + 2x + \frac{2cx}{a}; \text{ \& hinc } FM = c + x + \frac{cx}{a}.$$

Quoniam igitur $PM^2 = FM^2 - PF^2$, facta substitutione, ac reductione, ut superius, obtinetur $yy = \frac{bbxx}{a} + \frac{aa}{a}$, æquatio hyperbolæ ad suos axes relatæ.

811. Calculi ad ellipsin, & hyperbolam eodem prorsus modo instituuntur, neque in conspectariis inde formulis aliud plerumque adest discrimen, nisi signorum. Unde ubi deinceps in calculis utrique huic curvæ communibus occurrunt ante terminos nonnullos signa $+$ vel $-$, superius signum ad ellipsin, inferius ad hyperbolam pertinere notetur. Exempli causa superiores duæ æquationes ad hanc reducuntur $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{aa}{a}$

812. In parabola, in qua $a = \infty$, æquatio $yy = 4cx + \frac{2cx}{a} + \frac{2c^2x}{a} + \frac{ccxx}{aa}$ reducitur ad $yy = 4cx$. Itaque hæc erit æquatio ad parabolam.

813. COROLL. Quoniam $cc = +2ac + bb$, habetur $bb = 2ac + cc = c \times (2a + c) = SF \times Fs$; hoc est, semiaxis minor est media proportionalis inter distantias unius e focus ab utroque vertice.

814. PROBLEMA III. Invenire expressionem analyticam parametri axis principalis sectionis conicæ.

RESOLUTIO. In æquatione superiore nondum reducta $yy = 4cx + \frac{2c^2x}{a} + \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$, ponatur $x = c$, & fiet $yy = 4cc + \frac{4c^3}{a} + \frac{c^4}{aa}$; extractis hinc radicibus habetur $y =$

$\frac{2cc}{a} + \frac{cc}{a}$, qui est valor ordinatæ per focum F transeuntis,
cujus duplum (801) est ipsa parameter p ; quare $p = 4c + \frac{2cc}{a}$.

815. COROLL. I. In parabola ob $a = \infty$; est, $p = 4c$.

816. COROLL. II. Parameter axis principalis est in parabola æqualis quadruplo distantie verticis a foco; in hyperbola est major quadruplo illius distantie; in ellipsi minor.

817. COROLL. III. Si in æquatione parametri $p = 4c + \frac{2cc}{a}$, substituatur pro cc ejus valor $\frac{1}{2} 2ac + bb$, fit $p =$

$\frac{2bb}{a}$, vel $p = \frac{4bb}{2a}$; ex qua æquatione habetur analogia

$2a : 2b :: 2b : p$; hoc est, parameter axis principalis est tertia continua proportionalis ad axem majorem & minorem.

818. PROBLEMA IV. Invenire æquationem, quæ exprimat rationem parametri axis principalis ad functiones abscissarum & ordinatarum sectionis conicæ.

RESOLUTIO. Quia $p = \frac{2bb}{a}$, est $\frac{1}{2} ap = bb$; quare substituto hoc valore in æquatione generali $yy = \frac{bbxx}{a} + \frac{pxx}{2a}$, obtinetur $yy = px + \frac{p^2 x^2}{2a}$.

819. COROLL. I. Quoniam in parabola est $a = \infty$, habetur $yy = px$, eadem nempe æquatio cum superiore (812).

820. COROLL. II. Æquatio generalis $yy = px + \frac{p^2 x^2}{2a}$, vel $2a yy = 2apx + p^2 x^2$, resolvitur in hanc analogiam $yy : 2ax + xx :: p : 2a$. Est autem $2ax + xx = (2a + x) \times x = P \times PS$; igitur universim quadrata ordinatarum ad axem principalem ellipseos, vel hyperbolæ, sunt ad facta ex abscissis correspondentibus, ut parameter ad axem principalem. Et quia in eadem sectione conica ratio parametri ad suum axem est constans, generaliter sunt quadrata ordinatarum inter se, ut facta earundem abscissarum.

Si etiam æquatio ad axes $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$ solvatur in analogiam, habetur $yy : 2ax + xx :: bb : aa$, hoc est, in ellipsi & hyperbola sunt quadrata ordinarum ad axem principalem, ad facta ex abscissis correspondentibus, ut quadratum semiaxis minoris ad quadratum semiaxis majoris.

821. COROLL. III. Quia in parabola parameter p est quantitas constans, ratio yy ad x constans quoque est; igitur in parabola quadrata ordinarum sunt inter se, ut earum abscissæ.

822. PROBLEMA V. Invenire analyticam expressionem subperpendicularis, seu subnormalis PN (Fig. 76 & 77).

RESOLUTIO. Quia Fm (808) est ad MT perpendicularis, est quoque normali MN parallela, & trianguia fMN , fMf similia sunt. Unde est $fM(2a) : fF(2a + 2c) :: Mm$ (vel FM)

$$(x + c + \frac{cx}{a}) : FN = x + c + \frac{cx}{a} + \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$$

$$\text{tem } PN = FN - FP, \text{ \& } FP = x - c. \text{ Igitur } PN = 2c + \frac{cc}{a} + \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}; \text{ \& substitutis } \frac{1}{2} 2ac + \frac{1}{2} ap \text{ pro } cc \text{ (814),}$$

$$\text{factaque reductione, obtinetur } PN = \frac{1}{2} p + \frac{px}{2a} + \frac{bbx}{bb}; \text{ \& si denique } \frac{bbx}{bb} \text{ adhibeatur loco } p \text{ (817); habetur } PN = \frac{1}{2} p + \frac{px}{2a} + \frac{bbx}{bb}.$$

823. COROLL. I. In parabola subnormalis æquatur semiparametro, ideoque est constans; nam ob $a = \infty$, fit $PN = \frac{1}{2} p = FA$ (Fig. 78).

824. COROLL. II. In sectionibus conicis est subnormalis parabola æqualis semiparametro; in ellipsi minor; in hyperbola major.

825. PROBLEMA VI. Invenire æquationem ad subtangentem PT .

RESOLUTIO. In triangulo rectangulo MNT habetur (561)

$$\therefore PN : PM : PT; \text{ consequenter } PT = \frac{PM^2}{PN}. \text{ Quod si i-}$$

taque

taque $px + \frac{p \cdot x \cdot x}{2a}$ dividatur per $\frac{1}{2}p + \frac{p \cdot x}{2a}$, fiatque debita re-

ductio, obtinetur $PT = \frac{2ax + xx}{a + x}$.

826. COROLL. I. In parabola est $PT = 2x$, ob $a = \infty$;

$$\text{fit enim } PT = \frac{2\infty x + xx}{\infty + x} = \frac{2\infty x}{\infty} = 2x.$$

827. COROLL. II. Subtangens sectionis conicæ est in parabola duplæ abscissæ æqualis; in ellipsi major; in hyperbola minor. Nam si solvatur æquatio in analogiam, pro ellipsi est $PT: 2a - x :: x: a - x$, & ratione secunda multiplicata per 2, fit $PT: 2a - x :: 2x: 2a - 2x$; est autem $2a - x > 2a - 2x$; igitur etiam (306) est PT major quam $2x$. In hyperbola est $PA: 2a + x :: x: a + x$, seu $PT: 2a + x :: 2x: 2a + 2x$; atqui $2a + x < 2a + 2x$; ergo etiam PT minor est, quam $2x$.

828. COROLL. III. Apparet itaque, esse in parabola ST æqualem abscissæ; in ellipsi abscissæ majorem; minorem in hyperbola.

829. OBSERVA. Cum rami parabolæ & hyperbolæ in infinitum excurrant, potest in iis fieri $x = \infty$; quoniam itaque in parabola $x = ST$; etiam ST fit infinita. Verum posita in

hyperbola $x = \infty$, æquatio $ST = \frac{ax}{a + x}$, reducitur ad ST

$= a$. Ex quo colligitur imo: puncta concursus T omnium tangentium hyperbolæ cum axe principali, semper cadere intra verticem & centrum. 2do: per centrum hyperbolæ duci posse ex utraque axis parte rectam, quæ ramum utrumque hyperbolæ in distantia infinita tangat.

830. COROLL. IV. Quia $CP + PT = CT$; est $CT = \frac{aa}{a + x}$; hæc æquatio suppeditat analogiam $a + x: a :: a: CT$.

Ergo CP, CS, CT sunt in proportionem continua, ex qua facile est reperire in axe principali punctum T , per quod transire debet tangens sectionis in puncto dato M .

831. PROBLEMA VII. *Invenire æquationem ad perpendicularem SB ex vertice S usque ad tangentem TM.*

RESOLUTIO. Ob triangula TPM, TSB similia, est TP

$$\left(\frac{2ax + xx}{a + x} \right) : TS \left(\frac{ax}{a + x} \right) :: PM : SB; \text{ five, quia de-}$$

nominator in prima ratione $a + x$ est idem, $2ax + xx : ax :: PM : SB$; seu denique (296) $2a + x : a :: PM : SB$; & singulis terminis ad quadratum elevatis, substitutoque pro PM^2

$$\text{ejus valore (812), } 4aa + 4ax + xx : aa :: \frac{2abbx + bbxx}{4aa + 4ax + xx}, \text{ vel sumpto } \frac{1}{2} ap \text{ pro}$$

$$bb \text{ (820), } SB^2 = \frac{aapx + \frac{1}{2}apxx}{4aa + 4ax + xx}.$$

832. COROLL. I. In parabola est $SB = \frac{1}{2} PM = \frac{1}{2} y$; nam

$$\text{quia } a = \infty, \text{ habetur } SB^2 = \frac{\infty^2 px}{4\infty^2} = \frac{1}{4} px = \frac{1}{4} yy; \text{ \& } SB = \frac{1}{2} y.$$

833. COROLL. II. Posita in hyperbola $x = \infty$, formula prior pro SB^2 reducitur ad hanc $SB^2 = \frac{bb\infty^2}{\infty^2} = :$ confe-

quenter $SB = b$. Unde si fiant SB, & Sβ (Fig. 74) æquales axi dimidio conjugato, ducanturque per centrum C rectæ Cβ, bB, erunt hæ hyperbolarum MSm, Oso asymptoti.

834. PROBLEMA VIII. *Invenire æquationem Normalis NM.*

RESOLUTIO. In triangulo NPM habetur $NM^2 = PM^2 +$

$$PN^2. \text{ Igitur } NM^2 = \frac{2a^3bbx + aabbxx + aab^4 + 2ab^4x + b^4xx}{a^4}; \text{ si in hac æquatione adhibeatur valor parametri, est}$$

$$NM^2 = \frac{4aapx + 2apxx + aapp + 2appx + ppxx}{4aa}.$$

835. COROLL. I. In parabola, in qua $a = \infty$, habetur $NM^2 = px + \frac{1}{4}pp.$

836. COROLL. II. Posita $x = 0$ in formula secunda, ea redu-

reducitur ad $NM^2 = \frac{1}{4}pp$, ideoque $NM = \frac{1}{2}p$. Quod si ponatur $x = a$ in formula prima, habetur pro ellipsi $MN = b$. Quod ostendit, imo, in omni sectione conica normalem saltem æquari semiparametro, sive ordinatæ per focus transeunti. Etenim sumpto M adeo vicino vertici S, ut abscissa correspondens ordinatæ MP fiat infinite parva, seu evanescat, erit normalis $= \frac{1}{2}p$. 2do, in ellipsi normalem non posse esse majorem semiaxe minore.

837. PROBLEMA IX. Invenire æquationem rectæ SN, seu distantie verticis S a puncto N, in quo normalis occurrit axi.

$$\text{RESOLUTIO. } SN = SP + PN = \frac{ap + px + 2ax}{aa} \\ = \frac{2a}{aa} + \frac{px + 2ax}{aa}, \text{ \& in parabola } SN = \frac{1}{2}p + x.$$

838. COROLL. Posita $x = 0$, fit $SN = \frac{1}{2}p$; & quia a & p sunt positivæ & constantes in formulis pro parabola, & hyperbola, patet, crescentibus x , crescere etiam in his duabus sectionibus SN. Hinc porro evidens fit, normalem semper cadere ultra focus respectu verticis, & nunquam intra verticem & focus viciniorem.

839. PROBLEMA X. Invenire expressionem analyticam tangentis TM.

$$\text{RESOLUTIO. } PM^2 + PT^2 = TM^2; \text{ igitur } TM^2 = \\ \frac{2abbx + b^2xx}{aa} + \frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{aa + 2ax + xx}; \text{ sive } TM^2 = \\ \frac{p^2x + \frac{2a}{aa} + \frac{2ax + xx}{aa + 2ax + xx}}{aa + 2ax + xx}. \text{ Et in parabola } \\ TM^2 = px + 4xx = 4AS \times SP + 4SP^2.$$

840. PROBLEMA XI. Invenire æquationem ellipseos & hyperbolæ ad axes relatarum, abscissis a centro computatis. (Fig. 76. & 77).

RESOLUTIO. Servatis omnibus denominationibus, ut in prioribus problematis, præterquam quod CP ponenda sit $= x$, atque hinc SP abscissa prior $\pm a + x$, & sP $= a + x$, fit (820) $yy : \pm aa + xx :: bb : aa :: p : 2a$. Erit itaque æquatio sectionum ambarum, si referantur ad axes, $yy = \pm \frac{bb}{aa} + \frac{p}{2a}x$; & si eædem referantur ad parametrum, $yy = \pm \frac{1}{2}ap + \frac{p^2}{2a}x$.

841. COROLL. I. Ad ellipsin. Quia ordinata MH ad axem minorem ellipseos (Fig. 76) $\equiv CP \equiv x$, & $CH \equiv PM \equiv y$, habentur abscissæ $LH \equiv b - y$, & $HL \equiv b + y$: ideoque $bbxx$

$LH \times HL \equiv bb - yy$. Jam vero æquatio $yy \equiv bb - \frac{aa}{bb}$

resolvitur in analogiam sequentem $xx : bb - yy :: aa : bb$. Sunt igitur quadrata ordinatarum ad axem minorem, ad facta ex abscissis correspondentibus; ut est quadratum axis majoris ad quadratum axis minoris. Hinc autem si fiat $\frac{aa}{bb} = 2ba$, q.

sive $q \equiv \frac{aa}{b}$, accipiatque q pro parametro axis minoris,

substituta ea in præcedente analogia, erit $xx : bb - yy :: q : 2b$: hoc est, quadrata ordinatarum ad axem minorem, sunt ad facta ex suis abscissis, ut parameter axis minoris ad eundem axem minorem. Et universim quadrata ordinatarum ad axem minorem sunt inter se, ut facta ex earum abscissis.

842. COROLL. II. Ordinatæ ad axem minorem ellipseos easdem omnino proprietates habent, quas ordinatæ ad axem majorem.

843. COROLL. III. Si vel super majore axe ellipseos Ss , vel super minore, tanquam diametro describatur circulus SN sQ (Fig. 81), ducanturque NP , np ordinatæ ad eam diametrum, earum quadrata sunt inter se (768) ut facta abscissarum $sP \times PS$, & $sp \times pS$. Sunt autem etiam quadrata ordinatarum MP , mp in eadem ratione; igitur quadrata ordinatarum circuli sunt ut quadrata ordinatarum correspondentium ellipseos, consequenter etiam ipsæ ordinatæ circuli sunt inter se, ut ordinatæ ellipseos, sive eæ ordinatæ sunt ut OC , sive CS , ad LC , hoc est, ut axis, super quo circulus descriptus est, ad axem alterum.

844. OBSERVA I. Ratio ordinatarum ad axem secundum hyperbolæ nequit esse eadem. Nam si æquatio ad hyperbolam $bbxx$

$yy \equiv -bb + \frac{aa}{bb}$ solvatur in analogiam, sit $xx : yy + \frac{aa}{bb} ::$

$bb :: aa : bb$, ubi terminus secundus $yy + \frac{aa}{bb}$ est summa quadratorum rectarum CH & CL (Fig. 77) non autem factum ex abscissis HL & HL , quod ob $HL = y - b$, & $HL = y + b$, foret $yy - bb$. Verum independenter ab hac analogia habetur

Qq2

formu-

formula generalis $xx = aa + \frac{aayy}{bb}$ pro ellipfi æque, ac hy-

perbola ad axem secundum relatis, & abscissis a centro computatis, posita ordinata $= x$, & abscissa $= y$.

845. II. Ad normam hujus solutionis potest etiam, inveniri æquatio abscissis a foco computatis, imo a puncto quovis in axe accepto.

846. COROLL. IV. Si ex æquationibus præsentis problematis instituaturs calculus triangulorum, quæ Problematis V, VI, VII, VIII, IX, & X adhibita sunt, reperientur sequentes formulæ;

$$\begin{aligned} \text{PN} &= \frac{bbx}{aa + ax} = \frac{px}{2a}; \text{PT} = \frac{aa + xx}{x}; \text{CT} = \frac{aa}{x}; \\ \text{ST} &= \pm \frac{aa + ax}{x}; \text{SB}^2 = \frac{+ a^4 bb + 2a^3 bbx + 2abbx^3}{a^4 - 2aaaxx + x^4} \\ &+ \frac{bbx^4}{x}, \text{ seu } \frac{+ a^5 p + 2a^4 px + 2aapx^3 + apx^4}{2a^4 - 4aaaxx + 2x^4}; \text{NM}^2 \\ &= \frac{+ a^4 bb + aa bbxx + b^4 xx}{a^4} = \frac{+ 2a^3 p + 2apxx}{+ a^3 + aax + bbx} = \frac{+ 2aa + 2ax}{+ ppx}; \text{SN} = \frac{aa}{a^6 - 2a^4 xx + aax^4 + aabbxx + bbx^4} \\ &+ px; \text{MT}^2 = \frac{aaaxx}{2a^5 - 4a^3 xx + 2ax^4 + aapxx + px^4}; \\ \text{vel MT}^2 &= \frac{2a^5 - 4a^3 xx + 2ax^4 + aapxx + px^4}{2aaxx} \end{aligned}$$

847. COROLL. V. Quia c in nulla formula præcedentium problematum reperitur, sequitur, quod eadem formulæ æque applicari possint axi secundo ellipseos, & hyperbolæ, atque proprietates inde pendentes exprimant, modo mutationes debite in literis observentur.

848. COROLL. VI. Cum magnitudo axis secundi Ll hyperbolarum oppositarum MSm , Oso (Fig. 74) determinetur translata CF , vel Cf ex puncto S in L & l ; & asymptotorum situs (833), si fiant SB , $S\beta$ æquales rectis CL , vel Cl , consequens est, ut sumptis $C\Phi$, $C\phi$ æqualibus rectis LS , ls , ductæ

$b\beta$, $B\epsilon$ transeant per L & l , sintque Lb , $L\beta$; item lB , $l\epsilon$ æquales rectæ Cs vel CS . Unde punctis Φ , ϕ tanquam focis; & axe principali Ll , describi possunt hyperbolæ oppositæ dL , $D, N/n$, quarum axis secundus sit Ss , asymptoti vero eadem Bb , $\beta\epsilon$. Hæ duæ hyperbolæ dicuntur *conjugatæ ad priores* MSm , Oso , & vicissim MSm , Oso sunt illarum conjugatæ.

849. Manifestum est omnes æquationes, formulas, & proprietates hyperbolarum MSm , Oso , competere etiam hyperbolis conjugatis, mutatis nempe necessæ denominationibus; uti Ll sumpta pro axe principali, & Ss pro secundo, &c.

850. Pariter liquet, octo ramos quatuor hyperbolarum conjugatarum, sese illic alterum alteri jungere, quin se secent, ubi asymptoti eosdem tangunt; atque hac ratione efformari figuram ad quatuor concursuum puncta terminatam, quæ a centro infinite distat. Est hæc figura polygonum symmetricum constans angulis gibbis infinitis, & infinite parum excedentibus duos rectos; quatuor vero angulis procurentibus infinite acutis; ita, ut spatium intra quatuor hascæ hyperbolas comprehensum eum in modum spectari possit, quo consideratur area elliptica. Ac propterea deinceps ita loquemur de hoc spatio, ac si unica curva terminaretur.

Proprietates Sectionum Conicarum ad diametros relatarum.

851. *Diameter sectionis conicæ est quævis recta per centrum transiens; ostendemus enim, omnibus diametris commune esse, quod duplas suas ordinatas secent bifariam.*

852. Magnitudo diametri determinatur a duobus punctis, in quibus utrinque sectioni occurrit, dicunturque *origo* diametri. Sic OM , ND (Fig. 74 & 75) sunt binæ diametri determinatæ punctis O , M ; & N , D , in quibus est earum origo.

853. Hinc *diameter parabolæ est recta indefinita ex quovis ejus puncto, in quo diametri origo sumitur, ad axem parabolæ*. Centrum enim parabolæ a vertice infinite distat. Talis diameter est Mf (Fig. 78).

854. *Diameter conjugata alterius diametri est, quæ est parallela ordinatis alterius, vel tangenti per alterius originem ductæ. V.g. ND (Fig. 74 & 75) est diameter conjugata ad diamet-*

diametrum MO, quia ND est parallela tangenti per M transeunti. Vicissim est MO diameter conjugata ad diametrum ND.

855. Sequitur itaque, in parabola non esse diametros conjugatas.

856. THEOREMA I. Quævis diameter ND (Fig. 74 & 75) in centro C bifariam dividitur.

DEMONSTRATIO. Ducatur per N ad alterutrum axem ordinata NQ, & facta CE = CQ, erigatur ad eundem axem perpendicularis ED; dico, hanc perpendicularem occurrere diametro ND, in puncto D, quod sit in sectione. Nam ex constructione trianguula CQN, CED æqualia sunt, adeoque CD = CN, & DE = NQ. Atqui (793) ordinatæ æquidistantes a centro sunt æquales; cum igitur NQ sit ordinata, etiam ei æqualis DE erit ordinata; adeoque D est in sectione.

857. THEOREMA II. Si ex extremis M, N duarum diametrorum conjugatarum ducantur MP, NQ ordinatæ ad axem principalem Ss, erit quadratum CQ^2 , abscissæ interceptæ a centro C, & una ordinata, æquale facto ex abscissis respondentibus alteri ordinatæ.

DEMONSTRATIO. Servatis denominationibus, ut in Problemate XI, & posita præterea $CQ = u$, habetur (Fig. 75) $SQ = a - u$, & $sQ = a + u$. In ellipsi est (820) $sP \times PS (aa - xx) : SQ \times QS (aa - uu) :: PM^2 : NQ^2$; & in hyperbola (844) $sP \times PS (-aa + xx) : CS^2 + CQ^2 (aa + uu) :: PM^2 : NQ^2$. Igitur $\frac{+aa + xx}{aa + uu} :: PM^2 : NQ^2$. Porro ob trianguula TPM, CNQ similia, est quoque $PM^2 : NQ^2 :: TP^2 \left(\frac{(+aa + xx)^2}{xx} - \right) : CQ^2 (uu)$; unde facile

deducetur $uu = \frac{+aa + xx}{+aa + uu}$, sive $CQ^2 = sP \times PS$.

858. COROLL. I. In ellipsi nulla ordinata cadere potest ultra verticem respectu centri; itaque semper est CE^2 , vel $CQ^2 = sP \times PS$; & $CP^2 = sQ \times QS$. Verum hæc postrema æqualitas non habet locum in hyperbola, in qua $CP^2 = CS^2 + CQ^2$, ob $xx = aa + uu$.

859. COROLL. II. In ellipsi est $aa : bb :: sQ \times QS (vel CP^2) (xx) : NQ^2 = \frac{aa}{bbxx}$. Dein in trianguulis CPM, CNQ, habetur $CM^2 = CP^2 + PM^2$; igitur $CM^2 = xx + \frac{bb}{bbxx}$

$$\frac{bbxx}{aa}; \text{ \& } CN^2 = CQ^2 + NQ^2; \text{ adeoque } CN^2 = aa - xx$$

$$+ \frac{bbxx}{aa}; \text{ quare } CM^2 + CN^2 = bb + aa; \text{ hoc est, summa}$$

quadratorum duarum diametrorum conjugatarum quarumvis, æqualis est summæ quadratorum duorum axium, consequenter etiam summæ quadratorum aliarum quarumlibet diametrorum conjugatarum; sive, quod idem est, in ellipsi summa quadratorum duarum diametrorum conjugatarum quorumcunque est constans.

$$860. \text{ COROLL. III. In hyperbola habetur } aa:bb::CS^2 + \\ CQ^2 \text{ (five } CP^2) (xx):NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}; \text{ \& } CN^2 = CP^2 + \\ PM^2; \text{ quare } CM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa}; \text{ \& } CN^2 = CQ^2 + \\ NQ^2. \text{ Unde } CN^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}; \text{ \& } CM^2 =$$

$CM^2 = bb - aa$. Hoc est, differentia quadratorum duarum diametrorum conjugatarum in hyperbola est constans.

861. THEOREMA III. Quadratum ordinatæ IH^2 intra sectionem ad diametrum quamvis MO , est ad factum ex abscissis correspondentibus $MH \times HO$, ut est quadratum semidiametri conjugatæ CN^2 , ad quadratum semidiametri alterius CM^2 , ad quam HI ordinatur; sive $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$.

DEMONSTRATIO. Ducta ad axem Ss ordinata IG , & ex H perpendicularibus HR , HK , fiat GK , five $HR = r$, $CK = t$, $CM = d$; erit $GS = r + a + t$, & $sG = a + r + t$. Jam quia triangu-
la CPM , CHK similia sunt, est imprimis CP

$$(x):CM(d)::CK(t):CH = \frac{dt}{x}; \text{ igitur } MH = \frac{+d}{+} \frac{dt}{x}; \text{ \& } HO = d + \frac{dt}{x}; \text{ adeoque } MH \times HO = \frac{+dd+}{+}$$

$$\frac{ddt}{xx}. \text{ Deinde est } CP(x):PM(y)::CK(t):KH \text{ (vel } RG)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ty}{x}. \text{ Et ob triangulorum TPM, HIR similitudinem, pari-} \\
 &\text{ter habetur TP } \left(\frac{\pm aa \mp xx}{x} \right) : PM(y) :: HR(r) : RI = \\
 &\frac{rxy}{\pm aa \mp x}. \text{ Ergo IG}^2 = (IR + RG)^2 = \frac{rrxxyy}{(\pm aa \mp xx)^2} + \\
 &\frac{2rtyy}{\pm aa \mp xx} + \frac{ttyy}{xx}. \text{ Est autem (840) } sP \\
 &\times PS(\pm aa \mp xx) : sG \times GS(2rt \pm aa \mp rr \mp tt) :: PM^2 \\
 &(yy) : IG^2; \text{ si ex hac analogia repertus valor quadrati IG}^2 \text{ com-} \\
 &\text{paretur cum valore ejusdem superius invento; habetur æquatio} \\
 &\frac{2rtyy \pm aayy \mp rryy \mp ttyy}{\pm aa \mp xx} = \frac{rrxxyy}{(\pm aa \mp xx)^2} + \\
 &\frac{2rtyy}{\pm aa \mp xx} + \frac{ttyy}{xx}, \text{ ex qua deducetur HR}^2, \text{ five } rr = aa \\
 &- xx + tt - \frac{aatt}{xx}. \text{ Hoc posito, dico esse MH} \times \text{HO} \\
 &\left(\frac{\pm dd \mp \frac{ddtt}{xx}}{aatt} \right) : CM^2(dd) :: HR^2 \left(\frac{aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx}}{xx} \right) : CQ^2(\pm aa \mp xx); \text{ nam facta extremorum, \&}
 \end{aligned}$$

mediorum sunt æqualia. Denique in triangulis similibus HIR, CNQ, habetur $HR^2 : CQ^2 :: IH^2 : CN^2$; hinc $MH \times HO : CM^2 :: IH^2 : CN^2$, vel $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$.

862. COROLL. Quoniam ordinatæ ad quamvis diametrum ellipseos nequeunt cadere extra sectionem, hoc theorema de quacunque diametro ellipseos verum est. Et universim apparet, proprietates axium omnium sectionum conicarum non pendentes a focus convenire etiam diametris conjugatis. Illud solum est discriminis, quod ordinatæ ad axes sint iisdem perpendiculares, ordinatæ autem ad diametros sint obliquæ ad easdem. Itaque ducta ex I ordinata Ih ad diametrum DN, prorsus (841) ut superius, ostendetur, esse in ellipsi $Ih^2 : Dh \times hN :: CM^2 : CD^2$, & in hyperbola (844) $Ih^2 : Ch^2 + CD^2 :: CM^2 : CD^2$, adeo, ut eædem æquationes adhiberi possint pro diametris, quæ adhi-

adhibentur pro axibus conjugatis, eruntque earum parametri tertie proportionales ad easdem, prorsus ut N. 817. Verum parameter alicujus diametri parabolæ, v.g. Mf (Fig. 78) semper est quadruplum distantie Mm , originis diametri M , a directrice Am , vel a foco parabolæ. Nam $(839) MT^2 = 4AS \times SP + 4SP^2$; quod si jam per verticem S ducatur SO ordinata ad diametrum Mf , erit $SO = MT$, & ejus abscissa $MO = ST = SP$ (828). Sed quoniam ordinarum ad diametros sunt eadem proprietates, ac ordinarum ad axem, est $SO^2 = MO \times p$ (810). Porro $4AS \times SP + 4SP^2 = SP \times p$, seu omnibus per SP divis, $4AS + 4SP = p$; & $4AS + 4SP = 4AP = 4Mm = 4MF$; igitur $p = 4Mm = 4MF$.

863. THEOREMA IV. Si ab extremo M diametri cujusvis CM (Fig. 79. & 80) demittatur ad ejus conjugatam perpendicularis MR , est $MR:CL::CS:CD$.

DEMONSTRATIO. Per NN. 839. & 860 est $CD^2 \pm CM^2$

$$= bb \pm aa. \text{ Est vero } CM^2 = xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}; \text{ ergo}$$

$$CD^2 = \frac{bbxx \mp aaxx \pm a^4}{aa}. \text{ Demittatur e centro } C \text{ per-}$$

pendicularis ad tangentem Cl , & producat CL , donec tangenti occurrat in X ; triangula similia CLX , MNP suppetant hanc analogiam Cl (vel MR): $CX::MP$ (vel CV): NM : & hinc $MR \times NM = CX \times CV$. Atqui (830. & 847) $CX \times CV = CL^2$: ergo etiam $MR \times NM = CL^2$; consequenter NM^2

$$\left(\frac{b^4xx \pm a^4bb \mp aabbxx}{a^4} \right): CL^2 (bb):: CL^2 (bb):$$

$$MR^2 = \frac{a^4bb}{bbxx \pm a^4 \mp aaxx}. \text{ Quare } MR^2 \times CD^2 = aa'b$$

$$= CS^2 \times CL^2, \text{ atque ideo } MR^2:CL^2::CS^2:CD^2, \text{ & } M$$

$$R:CL::CS:CD.$$

864. COROLL. Area parallelogrammi super semidiametris conjugatis CM , CD descripti æqualis est rectangulo super semiaxibus conjugatis CS , CL ; illius enim mensura est $CD \times MR$; & hujus $CS \times CL$. Idem est de diametris & axibus conjugatis integris. Igitur area parallelogrammi super Diametris conjugatis quibuscunque constructi, æqualis est area rectanguli,

Re

cujus

cujus latera sint axes, adeoque etiam æqualis alterius parallelogrammi area, cujus latera sint aliæ quævis diametri conjugatæ.

Proprietates hyperbolæ ad asymptotos relatæ.

865. Dum asymptotos $\epsilon \beta$, $b B$, determinavimus (Fig. 74) sumpsimus SB , $S\beta$ æquales semiaxi secundo CL (833): hinc autem sequitur, angulum asymptotorum βCB debere esse acutum, rectum, vel obtusum, ut semiaxis primus CS fuerit major, æqualis, vel minor, quam semiaxis conjugatus CL . Nam angulus SCB , illius dimidius, est minor, æqualis, vel major 45° , prout SB est minor, æqualis, vel major, quam CS .

866. Cum diagonales SL , $C\beta$ rectanguli $CL\beta S$, cujus latera sunt semiaxes, sint inter se æquales, atque se mutuo in Y bifecent. est $SY = CY$, & CY^2 vel $SY^2 = \frac{1}{4} CS^2 + \frac{1}{4} CL^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2$.

867. Si angulus asymptotorum sit rectus, hyperbola dicitur æquilatera. Unde patet 1mo, parametrum hyperbolæ æquilateræ esse æqualem utriusque axi, qui tum inter se æquantur. 2do, in eadem hypothesi abscissis a vertice computatis, æquationem hyperbolæ ad axem relatæ $xy = 2ax - xx$, & æquilateræ esse $yy = 2ax + xx$; & abscissis a centro computatis, $yy = -aa + xx$, ob $a = b$, & $p = 2a = 2b$, qui valores nempe substituendi sunt in æquationibus hyperbolæ ad axes relatæ. 3tio, cum æquationes ad circulum sint $yy = 2ax - xx$, & $yy = aa - xx$, prout abscissæ vel a vertice, vel a centro computantur, circulum esse id respectu hyperbolæ æquilateræ, quod est ellipsis respectu alterius hyperbolæ axium inæqualium.

868. THEOREMA V. Si ordinata ad axem principalem quævis PM producat utrinque, donec occurrat asymptotis in A & a , erit $AM \times Ma = CL^2$, sive $AM:CL::CL:Ma$.

DEMONSTRATIO. Ex æquatione $yy = \frac{bbxx}{aa} - b^2$

(840) habetur bb , sive $CL^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = \left(\frac{bx}{a} - y \right) \times \left(\frac{bx}{a} + y \right)$. Quia autem triangula CSL , CAP similia sunt, est $CS:CL::CP:PA = \frac{bx}{a}$; igitur $AM = \frac{bx}{a} - y$, & $Ma = \frac{bx}{a} + y$.

$Ma = - + y$; adeoque $AM \times Ma = CL^2$.

869. COROLL. Eodem modo est $IV \times Iu = CL^2 = A$
 $M \times Ma = am \times mA = iu \times iV$.

870. THEOREMA VI. Si ex puncto quovis hyperbolæ M ducatur usque ad asymptotum proximam CA recta MR parallela asymptoto alteri CB, erit $MR \times RC = CY^2 = SY^2$; sive $MR : SY :: SY : RC$.

DEMONSTRATIO. Ducatur MX ad AC parallela, ut sit $MX = RC$. Ob triangula MAR, S β Y similia, est $MR : SY :: MA : S \beta$ (vel CL). Est autem (868) $MA : CL :: CL : Ma$; & quia triangula S β Y, Ma X similia sunt, $S \beta : Ma :: \beta Y$ (vel SY) : MX (vel RC); igitur etiam $MR : SY :: SY : RC$.

871. COROLL. I. Quævis recta, velut MR e puncto quolibet hyperbolæ ad asymptotum CA ducta, & parallela alteri asymptoto, considerari potest instar ordinatæ, cujus abscissa sit pars asymptoti CA. Cum enim asymptotus CB sit tangens hyperbolæ, ejus positio determinat situm ordinarum (772), & origo abscissarum erit C, velut CR est abscissa ordinatæ MR. Quod si itaque ponatur $CR = x$, $MR = y$, CY vel $SY = d$. habebitur $xy = dd$, vel $xy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$, æquatio hyperbolæ ad asymptotos relatæ.

872. COROLL. II. Si producat MR usque ad hyperbolam conjugatam d LD, fiet $DR = RM$. Nam $DR \times CR = CY^2 = MR \times CR$.

873. THEOREMA VII. Si ducatur recta quævis FE per hyperbolam (Fig. 85), partes EG, FI inter asymptotos & curvam interceptæ, sunt inter se æquales.

DEMONSTRATIO. Per puncta G & I ducantur ad axem perpendiculares DT, BQ; erit (869) $DR \times RT$, seu $GT \times G D = BI \times IQ$; igitur $IQ : GT :: GD : BI$, & quia DT, BQ sunt parallelæ, triangula GTE, BIQ sunt similia, uti etiam FBI, FGD; quare habetur $GD : BI :: GF : IF$. Et $IQ : TG :: IE : GE$. Ergo $GF : IF :: IE : GE$; & $GF - IF : IF :: IE - EG : GE$; hoc est $IG : IF :: IG : GE$, consequenter $IF = GE$.

874. COROLL. I. Deducitur hinc methodus describendi hyperbolam intra duas asymptotos datas, quæ transeat per punctum datum I. Etenim si per hoc punctum I ducantur quotcunque

que rectæ AP, BQ, FE &c. fiantque $PH = AI$, $QK = BY$, $GE = FI$ &c. erant puncta H, K, G &c. in hyperbola. Quod si dein unum ex his inventis assumatur loco dati I, ejus ope alia methodo eadem reperiri possunt. *

875. COROLL. II. Si sumatur aliquod punctum I extra, vel intra hyperbolam jam descriptam RSH, poterit describi alia intra easdem asymptotos, quæ cum priore RSH non nisi in distantia infinita concurrat.

876. COROLL. III. *Tangens hyperbolæ se utrinque ad asymptotos terminata in puncto contactus e bisariam dividitur.* Etenim si recta FE secet hyperbolam in punctis infinite propinquis, puncta G & I congruent cum puncto contactus, ideoque non minus erit $FI = GE$.

877. COROLL. IV. *Tangens hyperbolæ e g ad asymptotos terminata (Fig. 74) æqualis est diametro DN conjugatæ diametri MO per punctum contactus M transeuntis, quod nempe in parallelogrammo DM g C sit $Mg = DC = Me$.* Etenim ducta ex M recta MD, asymptoto CB parallela, erit (872) $MR = RD$; & ob triangula eMR, eCg similia, est $eR = RC$. Triangula ergo eRM, DRC inter se æqualia sunt (508); & hinc DC, & eM æquales & parallele. Igitur extremitas D rectæ MD cadit in hyperbolæ DLD punctum illud, per quod diameter DN, conjugata diametri MO, transit.

878. THEOREMA VIII. *Si e duobus punctis quibuscunque hyperbolæ I & R (Fig. 85) ducantur parallele IA, RX, & IE, RY, binæ binis, quarum priores terminentur ad asymptotum vicinam, posteriores ad alteram; erit $IA \times IE = RX \times RY$.*

DE.

* Quod si non detur punctum perimetri, sed focus hyperbolæ F (qui necessario est in recta angulum asymptotorum bisecante), describatur e centro C hyperbolæ (seu asymptotorum intersectione), radio æquali distantia foci ab eodem centro, arcus occurrens asymptoto in G (Fig. 98); e puncto occurfus demittatur in axem jam positionis datum perpendicularum GS, quod verticem principalem determinabit (813, & 833). Habito vertice (puncto nempe perimetri) cetera fiant methodo præscripta.

DEMONSTRATIO. Ductis per I & R perpendicularibus ad axem, & utrinque ad asymptotos terminatis BQ, DT, habentur triangula similia BIA, DRX; item IQE, TRY: quare est IB:IA::DR:RX; & IQ:IE::RT:RY; & hinc compositis rationibus IB×IQ:IA×IE::DR×RT:RX×RY. Est vero BI×IQ=DR×RT (869); ergo etiam IA×IE=RX×RY.

879. COROLL. I. Ductis per hyperbolam duabus parallelis quibuscunque FE, ZY, utrinque ad asymptotos terminatis, semper habetur FI×IE=ZR×RY.

880. COROLL. II. Si altera e parallelis hyperbolam tangat in t, fiet $ft^2 = FI \times IE$. &c.

Varia Problemata de Sectionibus Conicis.

881. PROBLEMA I. *Data portionis sectionis conicæ determinare speciem, & positionem axium.*

RESOLUTIO. Ducantur binæ quævis parallelæ, terminatæ utrinque ad sectionem, & per utriusque punctum bisectionis ducatur recta, quæ erit una e diametris. Tum ducantur rursus aliæ duæ parallelæ ad priores obliquæ, & per puncta bisectionis nova diameter. Si hæc ad priorem diametrum fuerit parallelæ, sectio est parabola; si eam secuerit extra curvam, vel ex parte convexitatis, sectio est hyperbola; si tandem diametri sibi occurrant intra curvam, vel ex parte cavitatis, sectio est ellipsis; & punctum intersectionis diametrorum semper est centrum. Quare si e centro hunc in modum reperto describatur circulus, qui in duobus punctis occurrat portioni datæ sectionis, recta ex centro per punctum medium inter illa, in quibus circulus sectioni conicæ occurrit, ducta, erit axis. Si sectio sit parabola, ducatur ad diametrum quamlibet perpendicularis, & utrinque ad curvam terminata; bisecetur, & ad punctum bisectionis ducta perpendicularis. erit axis parabolæ. *

882.

* Hæc resolutio supponit tantam sectionis portionem dari, ut vel circulus, qui describitur reperto centro, vel perpendicularis ad diametrum, si sectio sit parabola, possit eidem occurrere ex altera axis inveniendi parte, adeoque supponit in ramo dato conti-

882. PROBLEMA II. *Per data tria puncta M, m, & u non in directum jacentia, circa focum datum F (Fig. 73) describere sectionem conicam, ejusque speciem & axes determinare.*

RESOLUTIO. Dactis Mm, mμ, fiat FM: Fm:: ME: mE; & Fm: Fμ:: mH: μH; five, quod idem est, accipiat mE

$$\frac{Fm \times Mm}{Fm - FM}, \text{ \& } mH = \frac{Fm \times m\mu}{F\mu - Fm}, \text{ \& per puncta E \& H}$$

hoc modo determinata agatur recta indefinita EH, quæ erit sectionis directrix. Nam demissis ad eam perpendicularibus MG, mg,

contineri verticem axis. Quod si non sit, in parabola quidem habita semel ordinata diametri, & abscissa, facile reperiri potest parameter diametri (862), adeoque ejusdem diametri verticis distantia a directrice, ipsaque directrix. Et cum distantia foci ab origine diametri repertæ æquetur distantia eidem, axis principalis facile innotescit ducta tangente ad verticem diametri, & ope anguli, quem hæc facit cum diametro, recta usque ad focum (806). At si sectio sit ellipsis, habitis ordinata, & abscissa, nec non diametro quavis, ejus quoque conjugata reperitur (861). Hinc demisso ad conjugatam ex vertice alterius diametri perpendiculo, datur parallelogrammum super semidiametris conjugatis, æquale rectangulo ex semiaxibus (864): præterea cum summa quadratorum duarum semidiametrorum conjugatarum sit æqualis summæ quadratorum semiaxium (859), ex his inveniri potest semiaxis major, calculo admodum facili. V. g. supponamus (Fig. 80) diametros conjugatas esse MO, ND; MR perpendicularem ad ND. Sit CS = x, CL = y; erit RM × CD = xy & CM² + CD² = x² + y². Hinc 2 CD × RM = 2 xy. Porro (163) x² + y² = (x + y)² - 2 xy; adeoque CM² + CD² = (x + y)² - 2 RM × CD, five CM² + CD² + 2 RM × CD = (x + y)², & √ CM² + CD² + 2 RM × CD = x + y. Datur ergo summa semiaxium, & præterea summa eorum quadratorum, five etiam √ (x² + y²), hoc est, in triangulo quopiam rectangulo summa cathetorum una cum hypotenusa, quibus datis invenitur quævis cathetus: igitur habebitur x, si-
ve semiaxis major. Quod

$mg, \mu\gamma$, ob triangula gmE, GME similia, habetur $MG:mg::ME:mE::FM:Fm$. Similiter erit $mg:\mu\gamma::mH:\mu H::Fm:F\mu$. Sunt igitur hæ perpendicularares inter se, ut rectæ $MF, mF, \mu F$. Quare (780) recta EH est directrix sectionis conicæ transeuntis per puncta $M, m, \& \mu$, cujus species pendet a ratione FM ad GM . Unde si per F ducatur perpendicularis FA ad directricem, ea erit axis sectionis; & si præterea fiat $MG:FM::AS:SF::As:sF$; seu si sumatur $SF = \frac{FA \times FM}{FM + GM}$; & $Fs = \frac{FA \times FM}{GM - FM}$, habebuntur quoque vertices S, s axeos.

883. PROBLEMA III. *Datis duabus diametris conjugatis MO, DN hyperbolæ (Fig. 74) invenire ejus asymptotos.*

I.

Quod si jam centro reperto, radio æquali semiaxi majori fiant in tangente (quæ parallela ad diametrum conjugatam per verticem alterius duci potest) duæ intersectiones, & inde ad centrum ducantur rectæ, iisque ex puncto contactus parallelæ, quæ occurrant perpendicularibus ex punctis intersectionum in tangente erectis, erunt puncta concursus foci ellipseos, quibus cum centro conjunctis habetur etiam situs axis. Constructionis demonstratio expedita est. Per $N. 805$ (Fig. 99) est tam FQ , quam fR æqualis axi Ss ; & FNM , item $fPM = 90^\circ$, nec non $FN = NR$, $fP = PQ$, $CF = Cf$; hinc $RF:Nf = fF:CF = 2:1 = Rf:NC$; igitur $NC = \frac{1}{2} Rf = CS$. Idem est de PC . Quare si fuerint NC, PC æquales semiaxi SC , perpendiculara NF, Pf ad tangentem concurrunt in focus F & f cum MF, mF , quarum illa ad PC , hæc ad NC parallela.

In hyperbola reperta diametro conjugata alterius (862) ad assumptas ordinatas parallela, ex sequentibus (883. 884) prompta solutio datur, nempe repertis asymptotis, recta earum angulum bisecans situm axis præbet. Tum ducta tangente per diametri extremum, habetur ejus concursus cum axe, nec non ad axem demisso perpendiculari ex eodem puncto contactus, seu ordinata ad axem, habetur distantia ordinatæ a centro, sive (in Fig. 77.) habentur CT, Cp , inter quas cum CS sit media continuo proportionalis (830), invenitur etiam vertex, & magnitudo semiaxis transversi CS .

I. RESOLUTIO. Per extremum punctum M diametri primæ MO ducatur parallela eg ad ejus conjugatam ND. fiatque $Mg = Me = CD$ vel CN; erunt puncta g & e in asymptotis.

884. II. RESOLUTIO. Recta DM extrema diametrorum jungens bifecetur in K; erit recta per centrum C & R ducta una ex asymptotis; altera habebitur, si ex centro agatur ad D M parallela.

885. SCHOLIUM. E converso datis asymptotis, & puncto hyperbolæ M, reperiuntur binæ diametri conjugatæ, si ducatur recta indefinita MD, asymptoto CB parallela, & fiat $DR = MR$, nam MD, DC erunt semidiametri conjugatæ. Vel vero si per M ducatur tangens eg ad asymptotos terminata, & per C agatur CD parallela & æqualis rectæ Me vel M g.

886. PROBLEMA IV. Invenire radium curvaturæ sectionis conicæ in quovis puncto M (Fig. 79 & 80.)

RESOLUTIO. Ductis per punctum M datum diametro MO, item ejus conjugata DN, nec non axibus Ss, Ll, supponatur punctum K acceptum in MO, esse in circumferentia circuli per tria puncta sectionis infinite propinqua m, M, u transeuntis; erit 566) $uH \times Hm = MH \times HK$, vel $mH^2 = MH \times HK$. Est autem (820) $mH^2 : MH \times HO :: CD^2 : CM^2$; igitur $MH \times HK : MH \times HO :: CD^2 : CM^2$; five $HK : HO :: CD^2 : CM^2$; & quoniam MH est infinite parva etiam respectu mH, habetur MK : MO (seu $2 CM$) :: $CD^2 : CM^2$; ergo $MK = \frac{CD^2}{CM}$.

$= \frac{CD^2}{CM}$. Ponatur jam diameter circuli osculatoris curvæ in m,

M, u esse MA, & ducatur chorda AK, erit triangulum AKM rectangulum ad K, & simile triangulo MCR rectangulo ad R, cum M A sit normalis ad arcum m u, velejus tangentem MX, consequenter etiam normalis ad diametrum conjugat m ND. Est itaq; MR:

$$MC : MK \left(\text{vel } \frac{2 CD^2}{CM} \right) : MA = \frac{2 CD^2}{MR}; \text{ \& hinc } \frac{1}{2} MA$$

$= \frac{CD^2}{MR}$ hoc est 1^o radius curvaturæ sectionis conicæ in quo-

vis puncto dato M est æqualis quadrato semidiametri conjugatæ ad illam, quæ per punctum datum transit, diviso per perpendicularem e puncto dato ad diametrum conjugatam demissam. Sed quo-

Quoniam (863) $MR = \frac{CL \times CS}{CD}$, erit $\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{CL \times CS}$, hoc est

II^o radius curvaturæ sectionis conicæ in quovis puncto dato M est æqualis cubo semidiametri conjugatæ ad eam, quæ per punctum datum transit, diviso per factum ex semiaxibus.

887. Demissis e foco F, & centro C perpendicularis CI FG ad tangentem sectionis in M, habetur (863) $MR^2 : CS^2 = CS^2 \times MN$

$\therefore CL^2$ (vel $MR \times MN$) : $CD^2 = \frac{MR}{CS^2 \times MN}$. Jam vero quia

$\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR}$; erit etiam $\frac{1}{2} MA = \frac{CS^2 \times MN}{MR^2}$. Est autem

tem parameter p axis Ss, æqualis $\frac{2 CL^2}{CS}$, & $\frac{1}{2} p = \frac{CL^2}{CS}$; igitur

$\frac{1}{2} p \times CS = CL^2 = MR \times MN$, consequenter $MR = \frac{p \times CS}{p p \times CS^2}$; & $MR^2 = \frac{2 MN}{4 MN^3}$, Unde facta substitutione

fiet $\frac{1}{2} MA = \frac{4 MN^3}{\frac{1}{4} pp}$; hoc est, III^o radius curvaturæ sectionis conicæ in quovis puncto dato M est æqualis cubo normalis diviso per quartam partem quadrati parametri axis principalis.

($4px + pp$)

In parabola formula ad radium curvaturæ est $\sqrt{(4px + pp)}$

. Nam (835) $NM^2 = px + \frac{1}{4} pp$, hinc

$4NM^2 = 4px + pp$, & $4NM^3 = (4px + pp) \sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)}$ Quod si jam quantitas sub signo radicali $\sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)}$ ducatur in 4, quin mutetur valor (195), habebitur $\sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)} = \frac{1}{2} \sqrt{(4px + pp)}$: consequenter $4NM^3 = \frac{4NM^3}{(4px + pp)}$

$(4px + pp) \frac{1}{2} \sqrt{(4px + pp)}$; & $\frac{4NM^3}{pp}$

. In aliis sectionibus formulæ obveniunt mul-

to pp

to magis complicatæ.

Ss

388.

888. PROBLEMA V. *Sectiones Conicas quadrare.*

RESOLUTIO pro parabola. Detur quadrandum spatium S
nMP (Fig. 78), origine abscissarum statuta in vertice S. Ha-
betur $PM = y = \sqrt{px}$. Ponatur $p = 1$, erit $y = \sqrt{x}$, si-
ve $y = x^{\frac{1}{2}}$. Quare ut habeatur summa ordinarum inter S &
PM, alia re opus non est, quam ut summetur series $1^{\frac{1}{2}}. 2^{\frac{1}{2}}. 3^{\frac{1}{2}}.$
 $4^{\frac{1}{2}} \dots x^{\frac{1}{2}}$; hujus autem summa est $(384) \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = (194) \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, seu, ob $y = \sqrt{x}$, $= \frac{2}{3} xy$. Ergo spatium parabolicum SMP est æquale duabus tertiis
facti ex abscissa in ordinatam, sive areæ parallelogrammi SPML.

889. COROLL. I. Si ducatur recta SM, segmentum parab-
olicum SMn est $= \frac{1}{3} xy$. Etenim ejus area æquatur areæ SPM
minus area trianguli rectanguli SPM, hoc est $= \frac{2}{3} xy - \frac{1}{2} xy = \frac{1}{6} xy$.

890. COROLL. II. Area segmenti SMn æqualis est dimi-
diæ areæ trilinei MnSL. Nam hoc spatium externum æquale
est $\frac{1}{3} xy$.

891. COROLL. III. Si punctum P cadat in focus, erit x
 $= \frac{1}{4} p$, & $y = \frac{1}{2} p$, quare tunc $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} p \times \frac{1}{2} p = \frac{1}{12} pp$.
Hoc est, area parabolica erit $\frac{1}{12}$ quadrati parametri.

892. RESOLUTIO pro ellipsi. Abscissis a centro computa-

tis æquatio ad ellipsin est $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$, sive $yy =$
 $\frac{aa}{b} \times (aa - xx)$; hinc $y = \frac{a}{b} \times \sqrt{aa - xx}$. Quare quæ-
vis ordinata, quæ inter CL & PM (Fig. 81) duci potest, erit
 $(779) \frac{a}{b} \times a - \frac{a}{b} \times \frac{xx}{2a} - \frac{a}{b} \times \frac{x^4}{8a^3} - \frac{a}{b} \times \frac{x^6}{16a^5} - \frac{a}{b} \times \frac{x^8}{5bx^8} \dots$
 $\frac{5x^8}{128a^7}$, &c; seu $b \frac{aa^7}{2aa} - \frac{8a^4}{8a^4} - \frac{16a^6}{16a^6} - \frac{128a^8}{128a^8} \dots$, &c.

Unde si hæc series toties summetur, quot inter C & P esse pos-
sunt abscissæ, habebitur summa omnium ordinarum, seu area
CLMP. Quod si itaque pro omnibus abscissis sumatur series
infinita 1. 2. 3. 4. 5. ... x, liquet imo, summam omnium ter-
mino-

minorum primorum serie b — bxx — bx^2 — &c. toties sum-
 ptæ, quot sunt abscissæ, haberi, si accipiatur $b \times x$, sive bx .
 2do, Summam omnium terminorum secundorum — esse
 $\frac{2aa}{b}$ æqualem — ducto in summam omnium quadratorum termi-
 norum seriei infinitæ 1. 2. 3. 4. 5. x , quæ est (383) = —;
 hinc summa terminorum secundorum fiet — $\frac{2aa}{bx^3}$. 3tio, sum-
 mam omnium terminorum tertiorum — æquari facto ex —
 $\frac{8a^4}{b}$ in summam omnium potentiarum quattarum terminorum
 seriei 1. 2. 3. 4. 5. x , quæ est (383) = —; igitur summa ter-
 minorum tertiorum = — $\frac{5}{40a^4}$. Eodem modo invenitur sum-
 ma omnium terminorum quattorum — æqualis — $\frac{b}{16a^5}$.
 $\times \frac{1}{7} = \frac{bx^7}{112a^6}$; summa terminorum quattorum = —
 $\frac{5bx^9}{1152a^8}$, &c; ut adeo spatium CLMP habetur per seriem
 infinitam bx — bx^3 — bx^5 — bx^7 — $5bx^9$ — $7bx^{11}$ —
 $21bx^{13}$ — $6aa$ — $40a^4$ — $112a^6$ — $1152a^8$ — $2816a^{10}$ —
 $13312a^{12}$, &c, cujus summatio in terminis finitis adhuc
 reperiri non potuit; unde quadratura absoluta ellipseos est in-
 ter incognita.

893. COROLL. I. Si fiat $x = a$, facta substitutione habe-
 tur ab — $\frac{1}{6}ab$ — $\frac{1}{40}ab$ — $\frac{1}{112}ab$, &c pro spatio quadrantis
 ellipseos CLMS. Et si a & b supponantur axes integri, eadem
 series exhibet totam aream ellipseos.

894. COROLL. II. Si ponatur $a = b$, ellipsis abit in circu-
 lum, & series prior in sequentem aa — $\frac{1}{6}aa$ — $\frac{1}{40}aa$ — $\frac{1}{112}aa$,
 &c, quæ propterea dat spatium quadrantis circuli, aut etiam cir-
 culi

culi integri, si supponatur tota diameter $= a$.

895. COROLL. III. Hinc patet, aream ellipticam esse ad aream circuli descripti super axe majore, ut $ab - \frac{1}{2} ab - \frac{1}{40} ab$ &c ad $aa - \frac{1}{2} aa - \frac{1}{40} aa$ &c, hoc est, ut ab ad aa , seu ut b : a , vel ut axis minor ad axem majorem. Et si circulus describatur super axe minore, erit ejus area ad aream ellipticam, ut axis minor ad majorem.

896. Eodem modo portio CPNO circuli est ad portionem CPML ellipseos, ut axis major ad minorem, sive ut a ad b . Et-

enim illa exhibetur per seriem $ax - \frac{ax^3}{bx^2} - \frac{ax^5}{bx^4} - \frac{ax^7}{6aa} - \frac{ax^9}{40a^4}$ &c; hæc per $hx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{6aa} - \frac{bx^9}{40a^4}$ &c. Idem est de areis PNS, PMS

Hæc omnia satis manifesta sunt, cum id genus areæ circulares nil aliud sint, quam summæ ordinarum, quarum singulæ (844) sunt ad singulas correspondentes in ellipsi (& quarum summæ sunt itidem areæ ellipticæ), ut est axis major ad minorem.

897. COROLL. IV. Si e puncto quovis A accepto in axe ellipseos circulo inscriptæ, vel circumscriptæ ducantur ad extrema ordinatæ communis PN rectæ AM, AN, area sectoris circularis SAN est ad aream sectoris elliptici SAM, ut axis, super quo descriptus est circulus, ad axem alterum. Nam area circularis SPN est ad aream ellipticam SMP in dicta ratione, ut ostensum est; & area trianguli PAN est ad aream trianguli PAM, ejusdem basis PA, ut PN ad PM (595), vel (843) ut CO ad CL, hoc est, ut axis, qui est diameter circuli, ad axem alterum; quare (309) etiam areæ totæ SAN, SAM sunt in ratione eadem.

898. COROLL. V. Area ellipsis æqualis est areæ circuli, cujus diameter est media proportionalis inter axes ellipseos. Vocetur diameter circuli d ; erit $dd = ab$ (316). Jam area circuli est (894) $dd - \frac{1}{2} dd - \frac{1}{40} dd$, &c, & area ellipseos $ab - \frac{1}{2} ab - \frac{1}{40} ab$, &c, ergo æquales inter se.

899. COROLL. VI. Areæ duarum ellipsium sunt inter se, ut rectangula axium. Sint enim axes unius a & b ; alterius c & d ; erunt area illius $ab - \frac{1}{2} ab - \frac{1}{40} ab$, &c, hujus $cd - \frac{1}{2} cd - \frac{1}{40} cd$ &c, quarum ratio manifeste eadem est, ac factorum ab ad cd .

RESOL: pro Hyperbola. Dicatur semiaxis transversus SC $= b$ (Fig. 77) & CL $= a$, abscissa CH $= x$, ordinata MH $= y$, erit (840)

$(840) yy = \frac{aabb + bbxx}{aa}$ five $yy = \frac{bb}{aa} \times aa + xx$; & hinc $y = \sqrt{aa + \frac{bb}{aa}xx}$. Quare ordinata quaelibet inter CS, & HM est
 $= b + \frac{bxx}{2aa} + \frac{bx^4}{8a^4} + \frac{bx^6}{16a^6} + \frac{5bx^8}{128a^8} + \&c.$ Et quoniam
 hæc series ab illa ad ordinatas ellipseos non differt, nisi signo
 terminorum parium, eadem ratiocinandi methodo reperietur
 imo, spatium areæ hyperbolicæ haberi per seriem $bx + \frac{6aa}{bx^5} + \frac{bx^7}{5bx^9} + \&c.$ 2do, Subtracto spatio
 rectanguli SCHI $= \frac{bx}{bx^3} - \frac{bx}{bx^5} + \frac{1152a^8}{bx^7} - \&c.$ 3tio. Si in hyperbo-
 la æquilatera, in qua $b = a$, ponatur $a = x$, haberi $aa + \frac{1}{2}aa$
 $- \frac{1}{4}aa + \frac{1}{12}aa - \&c.$ Hinc analogia inter hyperbolam
 æquilateram, & aliam, cujus axes inæquales, eodem modo ul-
 terius extendi potest, ut superius cum circulo & ellipsi factum
 est.

900. Pro hyperbola intra asymptotos. Sit quadrandum
 spatium ARMZ (Fig 74) binis ordinatis AZ, & RM compre-
 hensum. Statuta abscissarum origine in R sit $CY = a$, $CR =$
 b , $RA = x$, $AZ = y$; habetur (870) $CA \times AZ = CY^2$, seu
 $ay + xy = aa$; ideoque $y = \frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aaxx}{b^3}$
 $- \frac{aa^3}{b^4} + \frac{aa^5}{b^5} - \&c$ (370). Et summa terminorum quo-
 rumlibet hujus seriei toties acceptæ, quot sunt termini in serie
 infinita 1. 2. 3. 4. x , dabit seriem infinitam $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb}$
 $+ \frac{aa^3}{3b^3} - \frac{aa^5}{4b^4} + \&c$ æqualem areæ ARMZ. Et eo citius
 hæc series converget, quo fuerit x minor, quam b .

901. COROLL. Si ponatur $b = a$, hoc est, si origo abscis-
 sarum

farum statuatur in Y, erit spatium SYAZ $= ax - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$ &c, & sumpto $a = 1$, fiet $= x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$ &c.

902. SCHOLIUM I. Sit CY $= 1$, & abscissæ CR, CA, Ct, in progressionē Geometricā; CA $= f$, At $= z$ erit $f = b + x$, & Ct $= f + z$ ideoque $b : b + x :: f : f + z$; consequenter $\frac{x}{b} = \frac{z}{f}$. Unde manifestum est, aream RMZA æqualem

seriei $\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} - \frac{x^4}{4b^4} + \dots$ &c, esse etiam æqualem a-

reæ AZkt, pro qua est series $\frac{z}{f} - \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{3f^3} - \frac{z^4}{4f^4} + \dots$ &c.

Igitur areæ hyperbolicæ, quarum bases sunt differentiæ abscissarum in progressionē Geometricā sumptarum, sunt inter se æquales. Hinc porro apparet, quod si CY, CR, CA, Ct sint abscissæ ejusmodi, ut repræsentent seriem quantitatum progressionis Geometricæ $\div q^0. q^1. q^2. q^3$, cum areæ super basibus YR, YA, At sint æquales; areæ super basibus YR, YA, Vt, sint inter se, ut numeri 1. 2. 3. Sunt igitur areæ istæ ut exponentes quantitatum CR, CA, Ct, consequenter (337) ut logarithmi earundem. Quare logarithmi opè arearum hyperbolicarum inveniri possunt, & vicissim.

903. SCHOLIUM II. Si desideretur area comprehensa asymptoto CB, & parte asymptoti alterius CR, ordinata MR, & ramo infinito MSi, ob $aa = xy$ (871), si ponatur a (seu CY)

$= 1$, erit $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (168). Est autem (384) summa omnium x^{-1} æqualis $\frac{x^{-1} - x^{-2}}{-1 + 1} = \frac{x^0 - x^0}{0} = \frac{1 - 1}{0}$. Cum igitur quo-

tiens ex 1 divisa per 0 sit infinitus, etiam spatium illud infinitum est. Superest jam, ut videamus, quomodo curvæ, quas adhuc consideravimus, e sectione conicæ oriuntur, seu sint reipsa sectiones conicæ.

904. Conus rectus non nisi quatuor sequentibus modis per planum aliquod in duas partes secari potest.

1^o. Vel planum secans erit basi conⁱ parallelum; & tunc manifestum est, curvam, quæ terminat planum utriusque partis sectæ, fore circulum, quippe cum sit illud planum elementum conⁱ.

905. II^o. Vel planum Sp (Fig. 82.) erit parallelum alicui lateri conⁱ AB , hoc est, faciet cum plano BC baseos angulum S pC , illi æqualem, quem facit latus conⁱ; & tunc curva indefinita $mMSM$ sectionem terminans (cono enim in infinitum producto, planum eodem semper modo illum secaret) est *parabola*.

906. III^o. Vel planum Sp (Fig. 83) nec basi, nec lateri conⁱ parallelum, erit magis inclinatum ad planum baseos CB , quam conⁱ latera; & tunc patet, utrinque conⁱ latera per hoc planum secari, sectionemque terminari curva finita, in seipsam redeunte, quæ erit *ellipsis*.

907. IV^o. Vel denique planum secans Sp (Fig. 84) erit minus inclinatum ad basin conⁱ, quam ejus latera; & tunc manifestum est, ab eo non posse omnia utrinque latera conⁱ secari; ideoque curva sectionem terminans $mMSM$ erit indefinita. Si porro ad verticem conⁱ A constituatur alter conus similis, planumque secans producat, etiam hunc conum ad s eodem modo secabit. Hæc sectio erit *hyperbola*, & si utraque sumatur, habebuntur *hyperbolæ oppositæ*.

908. Illud autem per se liquet, quod si planum secans sit ad basin conⁱ perpendiculare, sectiones futuræ sint hyperbolæ; at si transiret simul per verticem, & axem conⁱ, sectiones hyperbolicæ abire deberent in triangula rectilinea isoscelia, & similia.

909. DEMONSTRATIO pro Parabola. Sit (Fig. 82) aliquod planum basi parallelum; ejus sectio erit circulus EMD , cum sit unum ex elementis conⁱ. Jam vero cum circuli EMD , BmC a curva secantur in MM , & mm , & præterea a plano triangulari ABC (quod ad basin perpendiculare per axem conⁱ transire concipitur) in ED , & BC ; evidens est, MM , mm esse inter se parallelas, uti & diametrum ED ad diametrum BC ; & quia per hypothesin planum ABC est perpendiculare ad planum secans, erit mm perpendicularis ad BC , ideoque etiam MM ad ED . Præterea cum diametri ED , BC ab axe sectionis Sp intersecantur in P & p , hic axis (623) debet esse in plano eodem cum diametri, vel in plano trianguli ABC . Sunt igitur MM , mm etiam ad Sp perpendiculares; & hinc pm , PM sunt ordinatæ communes tam circulorum BmC , EMD , quam

quam curvæ mSm . Est autem (562) $pm^2 = Bp \times pC$; & $P M^2 = EP \times PD$; ergo $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$. Sed quoniam AB & Sp sunt parallelæ, est $EP = Bp$; igitur etiam (296) $pm^2 : PM^2 :: pC : PD$; & ob triangula SPD , SpC similia, habetur $pC : PD :: Sp : SP$; ergo $pm^2 : PM^2 :: Sp : SP$. Unde patet, curvam mSm esse ejusmodi, ut sint quadrata ordinatarum inter se, ut earum abscissæ; quare (821) est parabola.

910. DEMONSTRATIO pro ellipsi. (Fig. 83). Ductis duobus planis ad basin coni parallelis, habentur duo circuli EmF , GMH , qui planum curvæ secant, & eodem modo, ac superius, ostendetur, mp , MP esse ordinatas communes circuli ac curvæ sectionis, atque ex natura circulorum haberi $mp^2 : MP^2 :: Ep \times pF : GP \times PH$. Et quoniam trianguli SPH , SpF ; & Ep , sGP similia sunt, erit etiam $pF : PH :: Sp : SP$; & $Ep : GP :: sp : sP$. Quare (307) $Ep \times pF : GP \times PH :: sp \times Sp : sP \times SP$; & consequenter $pm^2 : PM^2 :: sp \times Sp : sP \times SP$. Est ergo sectio sMS ejus naturæ, ut quadrata ordinatarum sint inter se, ut facta abscissarum, id est, (820) ellipsis. Eadem foret demonstratio, si solidum ABC esset cylindrus rectus.

911. DEMONSTRATIO pro hyperbola. (Fig. 84). Quia in circulis EMD , BmC habetur $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$; & in triangulis DPS , CpS ; item psB , PsE similibus, est $pC : PD :: pS : PS$, & $pB : PE :: ps : sP$, consequenter etiam compositis rationibus $pC \times pB : PD \times PE :: ps \times ps : PS \times sP$; erit quoque $pm^2 : PM^2 :: ps \times ps : PS \times sP$, quæ est proprietas hyperbolæ (820).

912. COROLL. Evidens est, quod si ducatur per verticem coni planum parallelum ad planum sectionis, hoc planum, dum sectio est parabola, conum tangat; dum vero sectio est ellipsis, totum sit extra conum; & denique dum sectio est hyperbola, etiam ipsum transeat per conum. Quod si præterea sint duo plana utrinque conum tangentia in rectis, per quas transit planum per verticem coni ad planum hyperbolæ parallele ductum, erunt intersectiones horum planorum cum plano hyperbolæ productæ, asymptoti hyperbolæ. Nam quia ab his planis omnia elementa coni tanguntur in punctis existentibus in plano parallelo ad planum hyperbolæ, ea nequeunt in ullo alio puncto ab hisdem planis contingi; adeoque neque ea plana possunt uspiam occurrere hyperbolæ, cujus omnia puncta sunt in plano parallelo ad illud, in quo sunt puncta, in quibus conus a duobus planis contingitur.

PRINCIPIA CALCULI INFINITESIMALIS.

913. **Q**uævis magnitudo spectari potest, velut perducta ad eum statum, in quo est, per continua incrementa, atque licet etiam semper concipere aliquam quantitatem generatricem illorum incrementorum, quæ agat per gradus infinite parvos, & æquales, atque constante aliqua lege determinatos. Gradus isti *differentiæ* dicuntur, seu *differentialia* illius magnitudinis, & calculus vocatur *infinitesimalis*, in quo ejusmodi gradus infinite parvi adhibentur, seu ad inveniendas, seu demonstrandas proprietates magnitudinis.

914. Quantitas *constans* appellatur quælibet, quæ ad statum aliquem fixum pervenisse concipitur; *variabilis* illa est, quæ ut actualis incrementi vel decrementi mutationi subiecta consideratur. Sic in circulo dato diameter est quantitas constans, chorda variabilis. Quantitates constantes plerumque prioribus Alphabeti literis denotantur, variabiles posterioribus.

915. Differentiale quantitatis variabilis litera *d* indicari solet, sic *ada* exprimit factum quantitatis constantis *a* in incrementum infinite parvum variabilis *x*, ut proinde hæc litera *d* munere quantitatis algebraicæ non fungatur; sed tantummodo nota sit quantitatis infinite parvæ, cui præfigitur.

916. Dum in calculo infinitesimali solummodo expressiones incrementi infinite parvi unius, pluriumve variabilium adhibentur, calculus *differentialis* appellatur; at dum per hujusmodi infinite parvorum expressiones, ac proprietates quantitatum iis affectarum, quæritur valor finitus variabilium, seu, quod idem est, dum incrementum finitum ex omnibus gradibus infinite parvis ortum quæritur, calculus dicitur *integralis*. Unde æquationem, sive formulam aliquam *differentiare*, est quærere expressionem algebraicam quantitatum, quæ gradum infinite parvum incrementi variabilium constituunt, quæ in æquatione, seu formula data, occurrunt; *integrare* autem æquationem, sive formulam *differentialem*, est quærere, quænam ea formula fuerit ante differentiationem; seu quænam sit summa omnium incrementorum, quorum in formula differentiali pro singulis variabilibus tantum unicus gradus infinite parvus exhibetur.

917. Hinc autem consequitur, quod si detur lex, juxta quam quantitas aliqua generatur, facile sit omnium variabilium, quæ eam ingrediuntur, differentialia reperire, ideoque calculus differentialis omni difficultate caret; At ex opposito datis solis differentialibus non æque pronum est reperire legem, juxta quam quantitas producitur: unde in calculo integrali non exiguæ occurrunt difficultates.

918. Quod isthic de incrementis dictum est, æque de decrementis intelligi debet, cum utrorumque expressiones algebraicæ solis signis + & — differant.

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

Formulae differentiales.

TOta ars differentiandi quantitates algebraicas in eo versatur, ut si qua proponatur, ei rite una sequentium formularum applicetur.

919. I. *Differentiare* $a x$. Formula, $a dx$.

DEMONSTRATIO. Evidens est (Fig. 86), si parallelogrammi lateris variabilis AD incrementum sit DF, alterum vero latus BD maneat constans, incrementum parallelogrammi CD = $a x$, fore parallelogrammum ED = $a \times dx$.

920. COROLL. Differentiale igitur quantitatis $a x + b y - c z$ est $a dx + b dy - c dz$. Et si differentietur $a b + b b - c y$, fiet $-c dy$. Pariter differentiale quantitatis $a a - b c z$ obtinetur $-b c dz$.

921. II. *Differentiare* $x y$. Formula, $x dy + y dx$.

DEMONSTRATIO. In (Fig. 87.) apparet, per incrementa laterum dx & dy , rectangulum CD augeri tribus rectangulis infinite parvis, nempe $x dy$, $y dx$, & $dx dy$. Postremum ex his negligendum est, cum sit (361) quantitas infinite parva secundi ordinis. Igitur incrementum infinite parvum rectanguli $x y$, est $x dy + y dx$.

922. OBSERVA. Si crescente altera, altera variabilium decrescat (vide Fig. 88) differentiale decrescantis sit negativum. Sic habetur hic $y dx - x dy$.

923. COROLL. I. Differentiale de $x y z$, si supponantur omnes

omnes variables crescere, est $yzdx + xzdy + xydz$. Sit enim $xy = p$, consequenter $xyz = pz$, & $dp = ydx + xdy$. Est autem differentiale de pz (911) $= pdz + zdp$; & substituto xy pro p , ac $x dy + y dx$ pro dp , habetur $xyz + yzdx + xzdy$. Eodem modo differentiale quantitatis uxy est $xyzdu + yzdx + uxzdy + uxydz$.

924. COROLL. II. Differentiale de axy est $axdy + aydx$. Ponatur enim $ax = p$, ideoque $axy = py$; & $dp = adx$. Jam vero differentiale de py est $pd y + ydp$; igitur facta substitutione habetur $axdy + aydx$.

925. COROLL. III. Differentiale quantitatis xx est $x dx + x dx = 2x dx$. Differentiale cubi $x^3 = 3x^2 dx$; potentiae quartae $x^4 = 4x^3 dx$; & universim differentiale de $x^m = m$

$x^{m-1} dx$. Sic pariter differentiale de $\sqrt{x^m}$, five $x^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n}$

$x^{\frac{m}{n}-1} dx$. De $\frac{1}{x^m}$ seu x^{-m} est $-mx^{-m-1} dx$. Si differentietur $\sqrt{(xy + yy)}$, fiet $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{(xy + yy)}}$; si $\frac{1}{\sqrt{x^m}}$ five

$x^{-\frac{m}{n}}$, obtinetur $\frac{-m dx}{n\sqrt{x^m + n}}$; fit enim imprimis $\frac{m}{n}$

$x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$. Est autem $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m dx}{n\sqrt{x^m + n}}$ (168); igitur $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{x^m + n}} \times dx = \frac{m dx}{n\sqrt{x^m + n}}$.

Si differentietur x^{m+1} , habebitur $ax^m dx$. &c.

926. III. Differentiare $\frac{y}{a}$. Formula, $\frac{dy}{a}$.

DEMONSTRATIO. Nam in Fig. 91 manifestum est, esse dy :

$$d\left(\frac{y}{a}\right) :: a : 1.$$

927. IV. Differentiare $\frac{ay}{x}$. Formula, $\frac{axdy - aydx}{xx}$.

DEMONSTRATIO. In Fig. 92 est $x + dx : y + dy :: a :$
 $\frac{ay}{x} + d\left(\frac{ay}{x}\right)$. Si multiplicatis mediis & extremis fiat
 æquatio $\frac{axy}{x} + \frac{aydx}{x} + xd\left(\frac{ay}{x}\right) + dx d\left(\frac{ay}{x}\right)$
 $= ay + ady$, facta reductione, & omisso infinitesimali secun-
 di ordinis, habetur $\frac{aydx}{x} + xd\left(\frac{ay}{x}\right) = ady$, five xd
 $\left(\frac{ay}{x}\right) = ady - \frac{aydx}{x}$; hinc $d\left(\frac{ay}{x}\right) = \frac{ady - aydx}{x}$
 $\frac{aydx}{xx} = \frac{axy - aydx}{xx}$.

928. COROLL. I. Differentiale de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$.

929. COROLL. II. Differentiale de $\frac{a}{x}$ est $-\frac{adx}{xx}$.

930. OBSERVA I. Quoniam infinitorum sunt diversi ordines sese in progressionem Geometricam excipientes (359); eadem sufficiunt formulæ ad eorum calculos, modo diversi ordines infinite parvorum designentur per exponentes notæ infinitesimalis d . Exempli causa ddx , sit quantitas infinite parva secundi

ordinis, seu $\frac{x}{cc^2}$. Infinitesimalia altiorum, quam secundi or-

dinis, raro adhibentur. Quæ sunt primi ordinis, dicuntur *differentiæ primæ*; quæ secundi, *differentiæ secundæ* &c; sunt nempe *differentialia differentialium*.

931. Itaque differentia secunda quantitatis ax , est $addx$;
 $dd(xy) = xddy + yddx + 2dx dy$; $dd(xx) = 2dxx$
 $+ 2xdx$ (observandum hic, dx^2 vel dx^2 idem esse, ac
 $dx dx$; $dd(x^m) = (mm - m)x^{m-2} dx^2 + mx^{m-1} ddx$.
 Sit

Sit enim $x^{m-1} = y$, erit $dy = (m-1) x^{m-2} dx$ (925)
 Sit porro $dx = z$. His positis erit differentia prima de x^m
 (quam invenimus $mx^{m-1} dx = myz$. Est autem differen-
 tiale de $m y z = m z dy + m y dz$, five substituendo valores
 repertos, $m \times dx \times (m-1) x^{m-2} dx + m \times x^{m-1} \times ddx$.

Differentia secunda de $\frac{y}{x}$ est $\frac{2ady^2 - ayddy}{y^3}$, &c.

932. OBSERVA II. Dum differentiatur aliquod differen-
 tiale, plerumque fit, ut differentia prima alicujus variabilis sit
 constans, vel saltem instar constantis consideretur. In exemplo,
 si facta differentiatione æquationis ad aliquam curvam quæra-
 tur per differentias secundas incrementum inæquale ordinarum,
 supponi debet, differentias primas abscissarum, seu dx , esse con-
 stantes, hoc est, quærendum est incrementum inæquale ordina-
 tarum respondens incremento æquali abscissarum. Sic differen-
 tia secunda de $\frac{y dy}{dx}$, posita dx constante, est $\frac{dyy + yddy}{dx}$.

Eodem modo differentia de $mx^{m-1} dx = dy$, sumpta dy pro
 constante, est $(mm-m)x^{m-2} dx^2 + mx^{m-1} ddx = 0$.

De Usu Calculi Differentialis.

933. Calculus differentialis fere omnibus curvarum sym-
 ptomatis investigandis sufficit; sed ut problemata Physico-Ma-
 thematica accuratius solvantur, calculus integralis adhibetur.
 Nobis satis est in præsens asserre exempla pauca usus calculi
 differentialis in curvarum theoria, adhibitis regulis maxime ge-
 neralibus, quæ, quantum ad lineas primi, & secundi ordinis,
 neque ulli exceptioni sunt obnoxie, neque difficultati in ap-
 plicatione subjectæ. Nihil speciatim asseremus de cautelis ne-
 cessariis, dum ad curvas aliorum generum transferuntur. Hæc
 enim si exequi liberet, integer de calculo differentiali Tractatus
 formandus esset.

*Usus Calculi Differentialis in tangentium, subtangentium,
 normalium, & subnormalium investigatione.*

934. Ut ad punctum curvæ datum ducatur tangens, ne-
 cesse

cesse est, ut in axe, diametro, aliave recta positione data, determinetur præterea aliquod punctum, per quod tangens tranfire debet, ut ex utroque eo puncto situs tangentis habeatur; aut vero reperiendum est aliud quoddam punctum, per quod transeat normalis ad curvam in puncto dato, ut dein ad ipsam normalem in puncto dato erigatur perpendicularis.

Sit (Fig. 93 & 94) SR tangens curvæ in ipso axis vel diametri vertice, sit MP ordinata ad datum punctum M; pm altera ordinata infinite propinqua, & ad tangentem terminata. Ducatur per M ad diametrum vel axem parallela Rr, uti etiam MN ad curvam, vel tangentem perpendicularis; ex triangulo infinitesimali rMm , in quo $rM = dx$, $rm = dy$, habebuntur sequentes formulæ.

$$935. PT = \frac{y dx}{dy}. \text{ Nam } rm : rM :: MP : PT.$$

$$936. ST = \frac{y dy - x dy}{x dy}. \text{ Etenim } ST = PT - PS : \& \\ PS = x = \frac{dy}{dy}.$$

$$937. SB = \frac{y dx - x dy}{dx}. \text{ Nempe } PT : TS :: PM : SB;$$

vel $Mr : mr :: TS : SB$.

Sed quas his subijcimus, ex non competunt nisi punctis curvarum ad axes relatis (Fig. 94).

$$938. Mm = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}; \text{ five si dicatur } Mm = ds, ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

$$939. PN = \frac{y dy}{dx}. \text{ Quippe } rM : mr :: PM : PN.$$

$$940. TM = \frac{y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dy} = \frac{y ds}{dy}. \text{ Etenim } rm :$$

$Mm :: PM : TM$.

$$941. TB = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)} (y dx - x dy)}{dx dy}. \text{ Cum}$$

sit $rm : Mm :: SB : TB$.

MB. 942. $MB = \frac{x\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}$. Quia $Mr : Mm :: SP :$

943. $MN = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}$. Ex analogia $Mr : Mm :: PM : MN$.

944. $TN = \frac{y(dy^2 + dx^2)}{dydx}$. Est namque $TN = TP + PN$.

945. Usus harum formularum generalium in eo consistit, ut sumptis æquationis ad curvam aliquam differentialis ita inter se combinentur dx & dy , ut obtineatur æquatio, cujus alterum membrum sit una e formulis præcedentibus, alterum contineat tantum quantitates finitas.

Detur exempli causa æquatio ad parabolam $yy = x$ (posita parametro $= 1$). Æquatio differentialis est $2ydy = dx$,

ideoque $2y = \frac{dx}{dy}$; & $2yy = \frac{ydx}{dy}$, five ob $x = yy$, $2x = \frac{ydx}{dy}$.

Hujus æquationis membrum secundum est formula sub-

tangentis PT ; est ergo in parabola $PT = 2x$, ut supra (826) repertum est. Similiter ob $2ydy = dx$, habetur $ydy =$

$\frac{1}{2}dx$, & $\frac{1}{2} = \frac{ydy}{dx} = PN$. Unde in parabola subnormalis æqua-

tur semiparametro, prorsus ut supra (823).

946. Sit æquatio ad ellipsin $aayy = 2abbx - b^2xx$ (810); si differentietur, fiet $2aaydy = 2bbdx - 2bbxdx$; & si omnia dividantur per 2, ac ducantur in y , obtinetur aa

$yydy = abbydx - bbxydx$; & hinc $\frac{aayy}{aabb - bbx} = \frac{ydx}{dy}$

$= PT$. Substituatur pro $aayy$ ejus valor ex prima æquatione, & reducatur, habebitur $PT = \frac{2ax - xx}{a - x}$, ut N. 825.

Eadem ratione inveniatur $ST = \frac{ydx}{a - x}$, uti N. 828; nempe si in æquatione $\frac{2ax - xx}{a - x} = \frac{ydx}{dy}$, e membro priore subtrahatur

hatur x , e posteriore $\frac{xdy}{dy}$; est enim formula ad ST $= \frac{y dx - x dy}{dy}$ (936).

Eadem methodus adhibenda in reliquis linearum ad punctum contactus relatarum valoribus determinandis, non modo in sectionibus conicis, sed etiam aliis curvis.

Ejusdem calculi usus in radio curvaturæ inveniend.

E pluribus methodis hanc in rem aptis, sequentem exempli loco adferemus.

947. Sit (Fig. 95) curva quævis SMK. cujus axis SN; quæretur ejus curvatura in M, five in arcu infinite parvo Mm. Concipiatur circulus centro C descriptus per tria arcus M puncta transire; erit MC vel mC radius curvaturæ quæsitus. Ducantur ordinatæ MP, mp, & normalis ad M, MN, ac sub normalis PN. His positis, est Mm, vel $ds = \sqrt{dy^2 + yds}$, MN $= \frac{ydy}{dx}$ & PN $= \frac{ydy}{dx}$, ut superius vidimus. Qua-

re SN $= x + \frac{ydy}{dx}$. Est autem Nn differentiale rectæ SN, quare differentianda est $x + \frac{ydy}{dx}$, ut acquiratur Nn. Unde habita dx pro constante, fit $Nn = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx^2 + dy^2}$. Ducatur MB axi parallela, & Nt

ad mC perpendicularis, habebitur ex triangulis rectangulis MmB, Ntn similibus, Mm : MB :: Nn : Nt: five $ds : dx :: \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx^2 + dy^2} : Nt = ds + \frac{yddy}{dx}$. Ducatur item ex N recta NI

ad Cm parallela, fiet Im $= Nt$, ideoque IM $= Mm - Im = ds - ds - \frac{yddy}{dx} = -\frac{yddy}{dx}$. Denique ob triangula rectangula IMN, MmC similia habetur IM : MN $= Mm : MC$, hoc est

$$\text{est } \frac{y d d y}{d s} : \frac{y d s}{d x} :: d s : M C = \frac{d s^3 d s}{- d x d d y}, \text{ \& substituto}$$

$$d y^2 + d x^2 \text{ pro } d s^2, \text{ formula generalis radii curvaturæ pro o-}$$

$$\text{mnibus curvis ad axem relatis, est } M C = \frac{(d y^2 + d x^2) \sqrt{(d y^2 + d x^2)}}{- d x d d y}$$

948. Dum hæc formula applicanda est ad curvas datas, ex earum æquatione inveniendus est imprimis valor de $d x$, $d x^2$, $d y^2$, $- d d y$, ita ut in ejus expressione non alia sit quantitas præter constantes, & y . Factis debitis substitutionibus, formula generalis reducetur ad quantitates finitas.

Exemplum. In parabola, cujus æquatio $y y = p x$, habetur $2 y d y = p d x$, consequenter $d x = \frac{2 y d y}{p}$, & $d x^2 = \frac{4 y^2 d y^2}{p p}$. Si $d x = \frac{p}{2 y d y}$ differentietur, ponaturque $d x$ constans, quod etiam in constructione formulæ generalis fuit observatum, obtinetur $0 = \frac{p}{2 d y^2 + 2 y d d y}$. Jam quia primum æquationis membrum est 0, fractio tollitur, eritque $0 = 2 d y^2 + 2 y d d y$; hinc $- 2 y d d y = 2 d y^2$, & $- d d y = \frac{d y^2}{y}$. His itaque substitutis jam habetur denominator formulæ $- d x d d y = \frac{4 y^2 d y^2}{2 d y^3} = \frac{4 y^2 d y^2}{p p} + d y^2 = \frac{4 y^2 d y^2 + p^2 d y^2}{p p} = \frac{d y^2}{p p} (4 y y + p p)$; denique $\sqrt{(d x^2 + d y^2)} = \frac{p p}{d y} \sqrt{(4 y y + p p)}$. Unde formula generalis abit in hanc

$$\frac{\frac{d y^2 (4 y y + p p)}{p p} \frac{d y \sqrt{(4 y y + p p)}}{p}}{\frac{2 d y^3 : p}{\sqrt{v}}} = \frac{(4 y y + p p)}{2 p p} \sqrt{v}$$

V ($4yy + pp$), quæ exhibet radium curvaturæ in quovis puncto parabolæ.

Si loco $4yy$ adhibeatur $4px$, obtinetur formula N. 887.

*Usus Calculi differentialis in reperiendis
Maximis & Minimis.*

949. Si ea sit lex, juxta quam quantitas aliqua producitur, ut exigat, quantitatem illam, vel ejusdem functionem quampi-
am, usque ad certum terminum crescere, dein rursus decrescere;
quæri potest, quis ejus sit valor, cum maxima fuerit; vel quis
sit ille terminus, ad quem cum pertingit, maxima evadit? Vel
vero si lex productionis postulet, ut quantitas usque ad certum
terminum decrescat, sed ultra eum rursus crescat; itidem quæ-
stio esse potest, quis fuerit valor, dum erat minima, vel ubinam
sit terminus, in quo minima fuerat? Atque hæc dum fiunt, di-
cuntur *maxima*, vel *minima* quæri; methodus autem, qua tum
utimur, appellatur *methodus de Maximis & Minimis*.

950. Illud imprimis manifestum est, quod in eo termino, in
quo quantitas evasit maxima, ejus incrementum fuerit nullum;
uti & quod illic, ubi facta est minima, decrementum ejus nullum
fuerit. Hinc sequitur, quod facta differentiatione quantitatis, de
qua agitur, ejus variabilis differentiale ponendum sit $= 0$, quæ
usque ad certum limitem crescit, dein decrescit, vel ex opposito.
Quod si hac methodo æquatio differentialis reducat ad termi-
nos finitos, *maximum*, vel *minimum* exhibebit, quod quærebatur.

951. Exemplum. In ellipsi ordinatæ ad axem majorem
crescunt, tum iterum decrescunt. Si itaque desideretur punctum
axis, in quo ordinata sit maxima, differentietur æquatio ad el-
lipsin (810) $aayy = 2abbx - bbbx$, quæ erit $2aaydy =$
 $2abbdx - 2bbxdx$; posita $dy = 0$, primum æquationis
membrum evanescit, & manet $0 = 2abbdx - 2bbxdx$, vel
vero $2bbxdx = 2abbdx$, quæ æquatio reducetur ad $a = x$.
Ex quo patet, punctum axis, in quo ordinata est maxima, esse
centrum ellipseos. Ut autem ipse maximæ ordinatæ valor re-
periatur, in æquatione ad ellipsin substituatur a pro x ; eruetur
 $y = b$. Itaque ordinata maxima est semiaxis minor.

952. Quoniam methodus de maximis & minimis perma-
gni momenti est, ejus conceptus, quantum fieri potest, distin-
ctus formari debet, maxime si non aliqua æquatio proponatur,
sed

sed formula alia quævis quantitatis variabilis. Id ut assequamur, assumemus curvam quampiam, quæ omnes possibiles valores quantitatis variabilis x repræsentet, quæ quantitas mutetur lege per formulam algebraicam expressa. Sit igitur ea lex $0,1125x^4 - 0,725x^3 + 0,9375xx + 0,875x$, secundum quam x variat, & supponamus, hanc legem esse primum membrum æquationis ad aliquam curvam Geometricam, ejus alterum membrum sit y ; erit itaq; $0,1125x^4 - 0,725x^3 + 0,9375xx + 0,875x = y$.

Ut jam curva describi possit, ponatur successive $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$, &c, atque his valoribus in æquatione substitutis, inventientur etiam valores correspondentes y , quemadmodum in tabella adjuncta videre licet.

x seu abscissæ	y seu ordinatæ
0 - - - - -	0
1 - - - - -	1, 2
2 - - - - -	1, 5
3 - - - - -	0, 6
4 - - - - -	0, 9
5 - - - - -	7, 5
6 - - - - -	28, 2
7 - - - - -	73, 5
&c.	&c.

Ducatur recta indefinita PE (Fig. 97). quæ sumatur pro linea abscissarum; & puncto S ad arbitrium pro origine abscissarum statuto accipiantur inde partes æquales ad A, B, D, E &c. Ex his erigantur perpendiculares Aa, Bb, Cc, Dd &c, quæ fiant ordine æquales ordinatis descriptis in tabella, scilicet Aa = 1, 2; Bb = 1, 5; Cc = 0, 6, &c. Deniq; ducatur curva per omnia puncta hoc modo determinata S, a, b, c, &c. His ita peractis . . .

Ex ipso curvæ intuitu patet, ordinatas ab initio crescere usque ad r ; dein decrescere usque ad t , tum vero versus e citissime augeri. Illud præterea manifestum est, curvam illic, ubi ordinata est maxima, axi obvertere cavitatem; ubi vero *minimum* datur, convexitatem. Quæri igitur potest imprimis punctum R, cui respondet *maximum* Rr, tum ipso valor *maximi*, Rr; dein de punctum T, cui convenit *minimum* Tt, ac ipsa hujus *mini* quantitas.

953. In hunc finem differentietur æquatio ad curvam, quæ fiet $0,45x^3 dx - 2,175x^2 dx + 1,875x dx + 0,875 dx = dy$; facta $dy = 0$, ceterisque terminis per dx divis, est $0,45x^3 - 2,175x^2 + 1,875x + 0,875 = 0$, cujus æquationis tres radices sunt $x = 1,6925$; $x = 3,472$; $x = -3$,

891. Si hi valores successively in æquatione prima substituantur pro x , reperietur $y = 1$, 578; $y = 0$, 342; & $y = 0$, 675. Quare si accipiat $SR = 1$, 6925, & $Rr = 1$, 578, habetur & locus, & magnitudo *maximi* quæsit. Et si postea fiat $ST = 3$, 472, ac $Tt = 0$, 342, determinabit prior locum, posterior valorem *minimi*.

954. Quod ad radicem negativam $x = -3$, 891, ac correspondentem ordinatam 0, 675, res ita sumenda est, ut intelligatur $SP = 37$, 891 accipi ex parte sinistra puncti S , illicque erigi $Pp = 0$, 675; pertinebit p ad curvæ portionem versus sinistram sitam, quæ descripta fuisset, factis abscissis $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ &c. Est itaque p locus *maximi*, vel *minimi*, in ea curvæ portione.

955. Si æquatio ad *Maximum* vel *Minimum* habeat omnes radices imaginarias, id indicio est, nullum dari in quantitate proposita *maximum*, nullum *minimum*.

956. OBSERVA I. Quoniam differentiæ dx sumuntur in eadem recta, correspondentes dy non possunt terminari ad curvam, & simul esse in eadem constante ratione cum dx . Id enim si esset, ipsæ ordinatæ, utpote sumæ antecedentium, forent ad abscissas, tanquam sumas consequentium, in eadem ratione constante (310), neque ad aliam, quam ad rectam terminari possent, qualis esset hypotenusæ trianguli rectanguli (vide Fig. 96). E quo deducitur, in curva rationem dy ad dx semper variari debere; & quia dx sumuntur in eadem recta, res ipsa suadet, ut supponantur constantes, quo facilius cum dy , perpetuo variabilibus, conferri possint.

957. OBSERVA II. Ex natura *maximi* vel *minimi* in curva Geometrica exhibiti, tangentes in punctis r , t debent fieri cum linea SD parallelæ, cum in hisce punctis punctum curvam describens ejusmodi habeat directionem, ut neque ab axe discedat, neque ad eum accedat. Quare illic subtangentes fiunt infinitæ, normales æquales ordinatis rR , tT , & subnormales $= 0$. Hinc maxima & minima reperiri possunt per formulas differentiales ad tangentes. Apparet item, in ipso transitu per maximum vel minimum subtangentem, & subnormalem acquirere situm oppositum illi, quem ante eum transitum habebant: quin ex hac ipsa mutatione decidi potest, utrum valor ex applicatione regulæ generalis pro *maximis*, & *minimis* obtentus pertineat ad *maximum* vel ad *minimum*. Ex ipso enim figuræ

97 intuitu patet, quod si expressio subtangentis evadat negativa ex positiva, valor calculo repertus contineat *maximum*. Quod si subtangens e negativa debeat transire in positivam, valor inventus exhibet *minimum*.

958. OBSERVA III. Contingere potest, ut dy , dum ex crescente incipit decrescere, in ipso hoc transitu fiat respectu dx infinitum. Ut enim non aliunde, quam e sectionibus Conicis exemplum adducamus, si consideretur motus puncti quatuor hyperbolas conjugatas describentis (quæ (850) in se unam verius curvam, spatium undique claudentem, constituunt) manifestum est, hoc punctum per totam rami longitudinem moveri in extremo ordinatæ y , ab ipso vertice initium ducendo, cujus ordinatæ differentiæ dy perpetuo crescunt, usque dum hic ramus in infinita distantia conjungitur alteri conjugatæ hyperbolæ; atque dum punctum a ramo priore transit in novum, necesse est, ut dy sit infinitum respectu dx ; verum in regressu per novum hunc ramum usque ad verticem, iterum decrescit, ac sic deinceps.

Insertur autem etiam hinc, non semper ponendum esse $dy = 0$, ut habeatur *Maximum* vel *Minimum*. Atque si posito $dy = 0$, nihil ex æquatione seu pro maximo, seu pro minimo elici possit, id ipsum obtineri, si fiat $dy = \infty$.

De Regulis, & usu Calculi Integralis.

Cum calculus integralis majoribus implicetur difficultatibus, quam ut accurate isthic exponi possit, ea solum, quæ & prima, & facilia sunt, delibabimus, unoque ac altero exemplo minus intricato ejus quandam imaginem primis solummodo ductibus delineabimus.

959. Litera $\int$ (prima scilicet vocis *summæ*) integrationis nota adhibetur; v.g. $\int a dx$ indicat, quantitatem $a dx$ debere integrari.

960. Et quoniam calculi integralis operationes inversæ sunt earum, quæ adhibentur in differentiali; formularum integralium vices agere poterunt omnes eæ quantitates, quas superius (a N. 919 usque ad 933) differentiandas proposuimus. Sic $\int a dx = ax$; $\int (x dy + y dx) = xy$, &c. At enim quia, dum quantitatum algebraicarum e terminis variabilibus & constantibus complexarum differentiæ accipiuntur, termini constantes

evanescent, iidem in integratione rursus restitui debent; unde fieri potest, ut $\int dx$ vel sit $= x$ tantum, vel $= x$ addita, aut subtracta una, pluribusve constantibus, atque a solis problematis conditionibus pendet, quandonam, & quas constantes in integratione variabilibus adjungere oporteat. Exemplum hujus rei inferius occurret (970).

961. Si in expressione differentiali unica habeatur variabilis, aut si ejus generis expressio unico constet termino, difficile non est e formula N. 925 quantitatem integram reperire,

in qua habetur nempe $\int a x^m dx = \frac{a x^{m+1}}{m+1}$, cujus enuncia-

tio sequentem suppeditat regulam: *deleatur differentiale; augeatur exponens variabilis unitate; dividatur totum per exponentem ita auctum.*

962. Totum vero artificium calculi integralis in eo versatur, ut regula hic exposita differentialibus datis applicetur, atque ut ejusmodi quantitates ita præparentur, ac disponantur, ut ope hujus regulæ integrari possint. Dum autem contingit, ut quantitas aliqua nulla arte eo reduci queat, ut perfecte integretur, illud agendum est, ut transformetur in aliam, cujus integrale idem sit cum integrali propositæ, vel cum integrali alterius, per quod rectificatio, vel quadratura alicujus sectionis conicæ, imo etiam alicujus curvæ ordinis superioris; aut logarithmus numeri cujuscumque, vel sinus &c habetur. Jam vero cum quadratura, & rectificatio in paucissimis curvis geometricæ datur, plurimique etiam sinus sint incommensurabiles cum sinu toto; sequitur, in plurimis casibus ejusmodi integrationes non nisi incompletas esse, neque eas numeris, nisi prope veris, exhiberi posse. Denique ceteris omnibus deficientibus, ad series infinitas, tanquam ad sacram anchoram confugitur, quarum nempe summa integrali quæsito sit æqualis. Atque ex his, quæ diximus, satis intelligitur, calculum integram esse artem non modo admodum imperfectam, sed etiam maximis difficultatibus implexam; quæ sæpe non nisi in quandam approximationem exeat. Unde nobis satis fuerit pauca exempla usus hujus calculi in Geometria asserre, atque hæc ipsa e planiore ejus parte deprompta, qua nempe de seriebus agit, eum maxime in finem, ut consensus earum, quas ope hujus calculi deducemus, cum illis, quas Analysis communis suppeditat, ut Tract. de sect. Conic. vidimus, eluceat.

963. Usus porro calculi integralis in Geometria pura est maximus in quadrandis superficiebus planis, & curvis, in cubandis solidis, five reperienda soliditate corporum: in rectificandis curvis, hoc est, in invenienda longitudine arcuum curvarum datarum, si in directum extenderentur; in investiganda natura, vel æquatione curvarum, quarum tangentes, subtangentes, normales, subnormales &c. analytica expressione dantur. At nulla fere est scientia Physico-Mathematica, quæ ut penitus exhauriatur, non hujus calculi ope continua egeat.

Usus calculi Integralis in quadratura superficierum planarum & curvarum.

964. Extra dubium est, quadraturam spatii CPML (Fig. 67) haberi per summam omnium parallelogrammorum $p q m$, quorum expressio differentialis est $y dx$. Igitur formula quadraturæ spatii inter binas ordinatas, arcum curvæ, & portionem axis comprehensi est $\int y dx$.

965. In parabola est $px = yy$, ideoque $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, & $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; consequenter $y dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, quod si integretur juxta regulam generalem (961), habebitur $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} = p^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}}$, ac substituto $\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$ pro $p^{\frac{1}{2}}$, fit $\frac{2yx^{\frac{3}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} yx$. Atque hæc est exacta parabolæ quadratura (888).

966. Ex æquatione ad ellipsin superius (892) jam invenimus $y = \frac{b}{a} \sqrt{aa - xx}$; & quia $\sqrt{aa - xx}$ est quantitas incommensurabilis; sublato signo radicali, reduci potest ad seriem infinitam, ut jam vidimus (371). Habebitur itaque $y = \frac{b}{a} \left(a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \&c. \right)$
 $= b - \frac{bx^2}{2a^2} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8} - \&c.$ Si hæc series du-

ducatur in dx , obtinetur $ydx = bdx - \frac{bx^2 dx}{2a^2} - \frac{bx^4 dx}{8a^4} - \frac{bx^6 dx}{16a^6} - \frac{5bx^8 dx}{128a^8}$, &c. Et si porro integretur, spatium el-

lipticum erit $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{6bx^9}{1152a^8}$, &c,
prorsus, ut superius N. 890.

967. Circuli, & hyperbolæ quadratura eodem calculo reperiuntur.

968. Quod ad quadraturas superficierum curvarum solidorum, quæ rotatione curvæ circa axem suum generantur, facile est, eas sequente methodo reperire. Evidens est, a quovis latere infinite parvo curvæ generatricis rotatione fieri conum rectum truncatum infinite parvæ altitudinis, qui sit elementum solidi inde geniti. Est autem superficies coni truncati (696) æqualis factæ ex longitudine hujus lateris $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ducta in circumferentiam, quam describit punctum medium ejusdem lateris, hoc est, in circumferentiam descriptam ab extremo puncto ordinatæ y . Si igitur fiat ut radius quivis r est ad

suam circumferentiam c , ita ordinata y est ad $\frac{cy}{r}$, circumferentiam ab extremo ordinatæ descriptam, erit superficies elementi unius solidi $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \times \frac{cy}{r}$, & $\int \frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ erit formula integrationis, ex qua tota superficie curva solidi habebitur.

969. Si exempli causa, parabola circa axem suum agatur, habetur $adx = 2ydy$; hinc $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$, & $\frac{cy}{r} \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{cy}{r} \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4yydy^2}{aa}\right)} = \frac{cy}{r} \sqrt{\left(\frac{aady^2}{aa} + 4yydy^2\right)} = \frac{cydy \sqrt{(aa + 4yy)}}{ar}$. Ut jam hæc expref-

fito reducatur ad aliam, cui regula integrationis applicari possit, ponatur $\sqrt{(aa + 4yy)} = z$; hinc $aa + 4yy = z^2$; &

$8y dy = 2z dz$; denique $y dy = \frac{z dz}{4}$. His substitutis ob-

tinetur $\frac{cy dy \sqrt{(aa + 4yy)}}{cx^2 z} = \frac{cx^2 dz}{4 ar}$, $\frac{cz^3}{12 ar}$, cujus integrale est $\frac{cz^3}{12 ar}$, & rursus restituendo valorem de z , tandem est

$$\frac{c(aa + 4yy) \sqrt{(aa + 4yy)}}{12 ar}$$

970. Ut autem sciatur, utrum valori reperto aliqua constans addenda, vel demenda sit, videndum est, an posita $y = 0$, tota formula fiat $= 0$. Etenim solum verticis punctum est, ubi solidum superficiem finitam non habet. Facta igitur $y = 0$, ma-

net $\frac{aac}{12 ar}$; igitur hæc quantitas constans subtrahenda est, ut verus valor quæsitus sit $\frac{c(aa + 4yy) \sqrt{(aa + 4yy)}}{12 ar} - \frac{aac}{12 ar}$

$$\frac{c(aa + 4yy) \sqrt{(aa + 4yy)} - a^3 c}{12 ar}$$

Usus Calculi integralis in rectificatione curvarum.

971. Rectificatio curvarum, dum ad axem referuntur, fit integratione formulæ $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. Neque necesse est, ut in hanc rem exempla congerere, cum paucæ admodum sint curvæ ex illis, quarum major est usus, quæ perfecte rectificari possint.

972. Superius vidimus (948), in parabola esse $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy \sqrt{(1 + \frac{p}{y^2})}$ (posita $p = 1$), $dy \sqrt{(1 + 4yy)}$.

Si quantitas radicalis $\sqrt{(1 + 4yy)}$ resolvatur in seriem (371), habetur $1 + 2y^2 - 2y^4 + 4y^6 - 10y^8$, &c: unde $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy + 2y^2 dy - 2y^4 dy + 4y^6 dy - 10y^8 dy$, &c. cujus integrale ex regula generali est $y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{7}y^7 - \frac{10}{9}y^9$ &c, quod dat longi-

longitudinem rectæ, inde a vertice usque ad ordinatam y parabolæ complicatæ.

973. Si radius circuli ponatur $= 1$, ejus æquatio est $yy = 2x - xx$; consequenter $2ydy = 2dx - 2xdx$, hinc $\frac{dx}{ydy} = \frac{1 - x}{y^2 dy^2}$, & $dx^2 = \frac{1 - 2x + xx}{y^2 dy^2}$, five (ob $yy = 2x - xx$, vel $yy = -2x + xx$), $dx^2 = \frac{1 - yy}{y^2 dy^2}$, & proinde $dx^2 + dy^2 = \frac{1 - yy}{y^2 dy^2} + dy^2$, seu facta reductione ad eundem denominatorem, $= \frac{y^2 dy^2 + dy^2 - y^2 dy^2}{1 - yy} = \frac{dy^2}{1 - yy}$;

quare erit $\sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{\sqrt{1 - yy}}{dy} = dy \sqrt{1 - yy}^{-\frac{1}{2}}$. Atqui ope formulæ N. 964 $(1 - yy)^{-\frac{1}{2}}$ reducitur ad seriem $1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \frac{35}{128}y^8$, &c.; igitur $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy + \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{3}{8}y^4 dy + \frac{5}{16}y^6 dy + \frac{35}{128}y^8 dy$, &c; Et si integretur, erit $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{7}{1152}y^7 + \frac{7}{1152}y^9$ &c, quæ series etiam hac forma concinniore exhiberi potest $y + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}y^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}y^7 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}y^9$, &c.

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9$$

974. Ordinata circuli est sinus arcus inter originem abscissarum, & ipsam ordinatam intercepti. Quare ope hujus seriei inveniri potest longitudo arcus, cujus sinus datur, eoque citius series converget, quo fuerit pauciorum graduum arcus, cui sinus datus competit. Hoc modo expedite calculari potest arcus 30 graduum, cujus sinus $= 0,5$; & si is multiplicetur per 6, habebitur tota circumferentia, adeoque ratio diametri ad peripheriam. Exempli causa, fiet series $0,5 + 0,020833 + 0,002344 + 0,000349 + 0,000059$; cujus summa est $0,523585$; & factum per 6 $= 3,14151$, fere ut supra (615). Accuratio erit, si summentur plures termini, atque fractiones decimales accipiantur plurium notarum,

Ufus Calculi Integralis in cubandis solidis.

975 Solidum cubatur, five corporis soliditas habetur, dum expressio differentialis alicujus elementi, e quibus corpus constat, integratur. Exempli causa, dum solidum rotatione alicujus curvæ circa axem suum generatur, quodvis elementum est conus rectus truncatus, cujus soliditas æquatur facto ex ejus axe dx in superficiem circuli, quem describit ordinata y transiens per medium punctum lateris infinite parvi, quo superficies illius coni generatur. Jam vero (968) circumferentia

circuli ab ordinata y descripti est $\frac{cy}{r}$, ejusque area (602) $\frac{cy}{2r} \times y$, five $\frac{cy^2}{2r}$. Unde formula generalis cubationis elementi alicujus solidi revolutione geniti est $\frac{cy^2 dx}{2r}$, & formula integra-

tionis, quæ præbet ipsum solidum, $\int \frac{cy^2 dx}{2r}$, in qua valor de y^2 substituendus est, erutus ex æquatione ad curvam.

976. Hoc modo, si radius circuli genitoris sphaeræ sit $= r$, ejus æquatio est $yy = 2rx - xx$; hoc valore in formula adhibito obtinetur $cxxdx = \frac{cx^3}{3}$, cujus integrale, $\frac{1}{2} cxx = \frac{cx^3}{6r}$

exhibet soliditatem segmenti sphaeræ radii r , cujus, altitudo est x . Et si porro fiat $x = 2r$, soliditas sphaeræ integræ obtinetur

$$= 2crr = \frac{4crr}{3} = \frac{6crr - 4crr}{3} = \frac{2}{3} crr = \frac{2}{3} \times 2r \times \frac{1}{2}$$

cr ; id est, soliditas sphaeræ æquatur duabus tertiis facti ex area circuli maximi in axem.

Ufus Calculi Integralis in Methodo inversa Tangentium.

977. *Methodus inversa tangentium* appellatur ea, qua ex data formula analytica tangentis, subtangentis, normalis, vel subnormalis quæritur natura, & æquatio curvæ. Pariter dicuntur ad methodum inversam tangentium pertinere illa problema-

ta, in quibus ex rectificatione, vel quadratura analytica expressa æquatio ad curvam quæritur, &c.

Quando igitur datur expressio algebraica alicujus lineæ, quæ ad tangentem refertur, ea fieri debet membrum æquationis cum formula differentiali lineæ ejusdem nominis e N. 935. & seqq. Et si quidem æquatio integrari possit, habebitur æquatio quesita ad curvam.

978. Exemplum. Quæritur, quæ sit curva, cujus subtangens $\frac{yy}{a}$? Est igitur (935) $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, seu $aydx = yydy$, vel $adx = ydy$; facta integration habetur $ax = \frac{1}{2}yy$, seu $2ax = yy$, æquatio ad parabolam, cujus parameter $2a$.

979. Quæritur, quæ sit curva, cujus subnormalis est a $\frac{ydy}{dx}$? Per N. 939 habetur $\frac{ydy}{dx} = a - x$, sive $ydy = adx - xdx$. Et integrando $\frac{1}{2}yy = ax - \frac{1}{2}xx$, vel $yy = 2ax - xx$, quæ est æquatio ad circulum.

980. Quæritur curva, cujus subnormalis est constans, sive $\frac{ydy}{dx} = 1$? Erit $\frac{ydy}{dx} = 1$; vel $ydy = dx$; aut $\frac{1}{2}yy = x$, seu $yy = 2x$, quæ æquatio pertinet ad parabolam, cujus parameter $= 2$.

981. OBSERVA. In Geometria calculus differentialis & integralis etiam applicatur ad quantitates algebraicas tractandas, quæ habent exponentes variabiles, velut a^x , x^y &c, uti etiam ad æquationes curvarum ejusmodi terminos involventes, quorum exponentes sint mutabiles. Id genus curvæ *exponentiales* appellantur, atque ipse calculus, quo tractantur, *calculus exponentialis*. Verum isthæc omnia singillatim si exponere vellemus, longe ultra limites huic operi fixos nos proveli necesse foret.



I N D E X

T I T U L O R U M.

	<i>Pag.</i>
Notio generalis Matheſeos , & præcipuorum terminorum definitiones.	1.
Axiomata præcipua.	3.

P A R S P R I M A A R I T H M E T I C A.

De natura numerorum; de eorundem formatione & valore.	4.
<i>De operationibus Arithmeticæ.</i>	6.
De regulis additionis.	7.
De regulis subtractionis.	9.
De multiplicatione.	11.
De diſiſione.	15.
<i>De fractionibus.</i> De fractionum natura; de earum valore, & comparatione.	22.
De operationibus Arithmeticis univerſim, quæ in fractionibus inſtitui poſſunt.	25.
De reductione fractionum.	25.
De Additione fractionum.	29.
De ſubtractione.	30.
De multiplicatione.	30.
De diſiſione.	32.
<i>De Fractionibus Decimalibus.</i>	33.
De operationibus in fractionibus decimalibus.	38.

)1(

De

I N D E X.

	<i>Pag.</i>
De aliis fractionum speciebus.	41.
<i>Elementa Algebrae</i> . Definitiones quorundam terminorum in Algebra usitatorum.	46.
De operationibus Algebraicis.	48.
De compositione, & resolutione quantitatum.	58.
Qua ratione omnes quantitatis datæ divisores reperiantur.	60.
Quomodo quantitates ad potentiam datam eleventur.	61.
Variae potentiarum, & radicum expressiones.	63.
De extractione radicum.	66.
De præcipuis proprietatibus potentiarum in numeris.	72.
De extractione radicis cubicæ.	74.
Methodus extrahendi radicem ex potentiis altioribus quadrato.	78.
Calculus incommensurabilium.	82.
Calculus potentiarum per earum exponentes.	82.
De calculo radicalium.	83.
<i>De æquationibus sive de Analysis</i> .	88.
De transpositione.	91.
De divisione.	92.
De multiplicatione.	93.
De extractione radicum ex æquationibus secundæ gradus.	93.
De substitutione.	96.
De resolutione analytica Problematum.	98.

De

I N D E X.

Pag.

De natura & proprietatibus generalibus æquationum diversorum graduum.	108.
De æquationibus habentibus radices imaginarias.	111.
De reductione & transformatione æquationum.	113.
Quomodo æquationes compositæ in numeris solvendæ.	114.
<i>De comparatione magnitudinum, seu tractatus de rationibus & proportionibus.</i>	118.
Proprietates rationum, proportionum, & progressionum Arithmeticarum.	121.
De rationibus, proportionibus, & progressionibus Geometricis.	127.
Proprietates proportionum Geometricarum.	131.
Proportiones progressionum Geometricarum.	135.
Varia problemata de proportionibus, & progressionibus geometricis.	139.
<i>De Logarithmis: de eorum natura & usu.</i>	147.
Usus Logarithmorum in fractionibus.	151.
De proprietatibus magnitudinis, si spectetur ut infinita.	155.
Notiones nonnullæ de seriebus. De natura & formatione serierum.	159.
De serierum summatione.	165.
De rationibus finitis, quas habent summæ infinitæ serierum infinitarum.	171.

P A R S

I N D E X.

Pag.

P A R S S E C U N D A. E L E M E N T A G E O M E T R I Æ.

<i>Señtio Prima. De Lineis. Genesis & proprietates linearum.</i>	174.
<i>Proprietates linearum reftarum ex pofitione unius refpectu alterius.</i>	175.
<i>Proprietates linearum reftarum ex pofitione unius refpectu duarum, plurimve aliarum fpatium non claudentium.</i>	181.
<i>De nonnullis proprietatibus linearum reftarum refpectu circuli.</i>	188.
<i>Proprietates linearum reftarum, dum fpatium claudunt.</i>	197.
<i>De triangulis. De diverfis speciebus, & de proprietatibus triangulorum.</i>	198.
<i>De comparatione triangulorum.</i>	202.
<i>De Polygonis aliis.</i>	204.
<i>Proprietates polygonorum generatim.</i>	205.
<i>Proprietates polygonorum fymmetricorum, tame eorum, quorum omnes anguli procurrunt, quàm quorum perimenter facit angulos introrfum gibbos.</i>	207.
<i>Proprietates polygonorum regularium.</i>	209.
<i>Proprietates circuli.</i>	213.
<i>De lineis proportionalibus.</i>	218.
<i>De comparatione figurarum.</i>	225.
<i>Señtio feconda. De fuperficiebus, De perimetro fu-</i>	

	Pag.
superficierum, & earum comparatione.	229.
De mensuris aptis determinandæ magnitudi- ni superficierum.	230.
Methodus generalis metiendi superficies.	231.
Nonnullæ observationes de quadratura cir- culi.	238.
Proprietates planorum.	241.
<i>Sectio tertia. De Solidis.</i>	245.
Genesis & proprietates solidorum, quæ fiunt motu rectilineo.	247.
Genesis & proprietates solidorum, quæ fiunt motu circulari.	250.
De polyedris, eorumque comparatione.	253.
De comparatione solidorum.	257.
De mensura superficierum solidorum cujusvis speciei.	260.
De comparatione superficierum solidorum.	264.
De mensura soliditatis solidorum cujusvis spe- ciei.	265.
De comparatione soliditatum in solidis.	269.
<i>De Trigonometria.</i>	271.
Principia constructionis tabularum Sinuum.	275.
Principia theoriæ calculi trigonometrici.	277.
Usus theoriæ præcedentis in calculis trigo- nometricis.	280.
Calculus triangulorum rectangulorum.	281.
Calculus triangulorum obliquangulorum.	283.

I N D E X.

Pag.

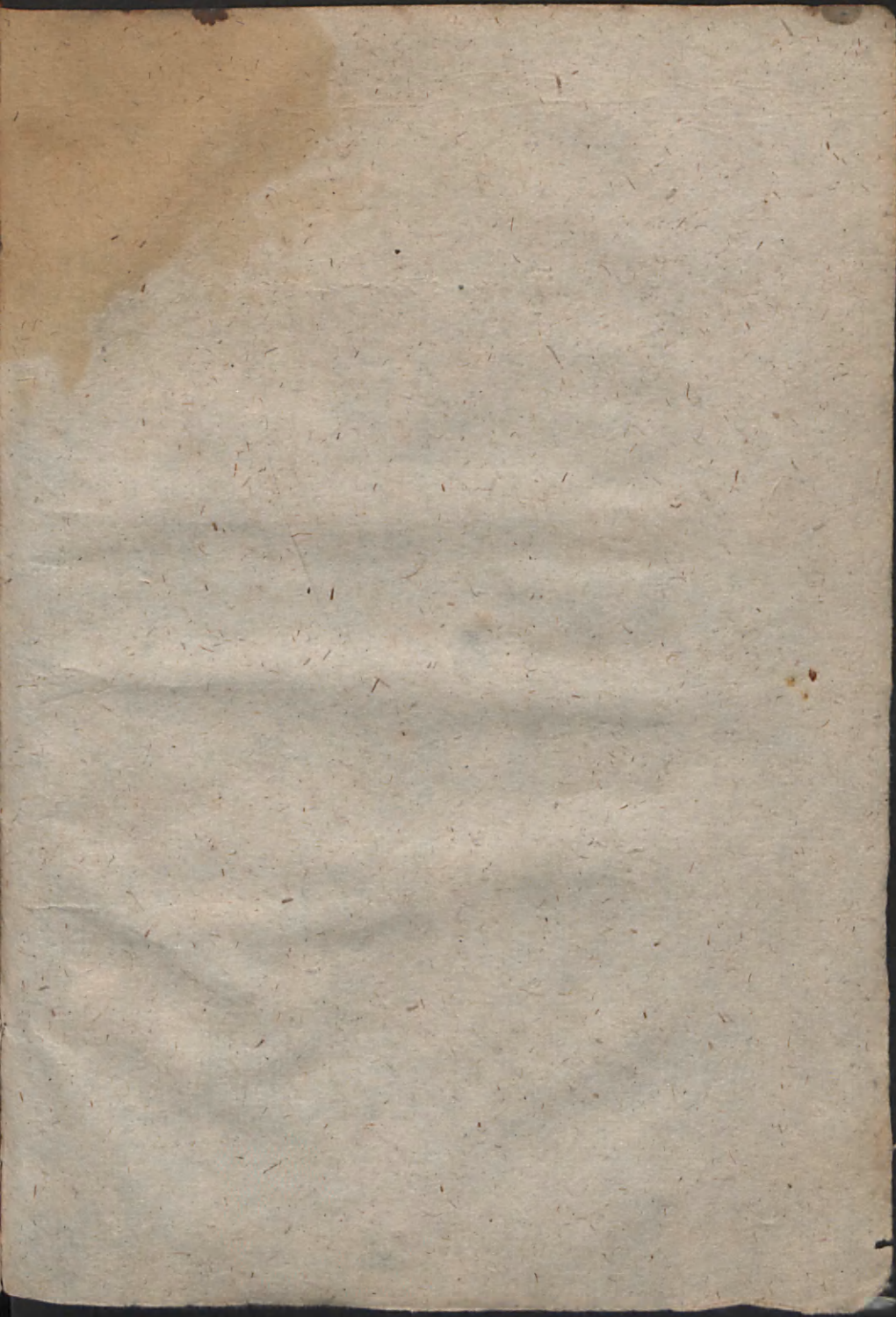
TRACTATUS ANALYTICUS DE SECTIONIBUS CONICIS.

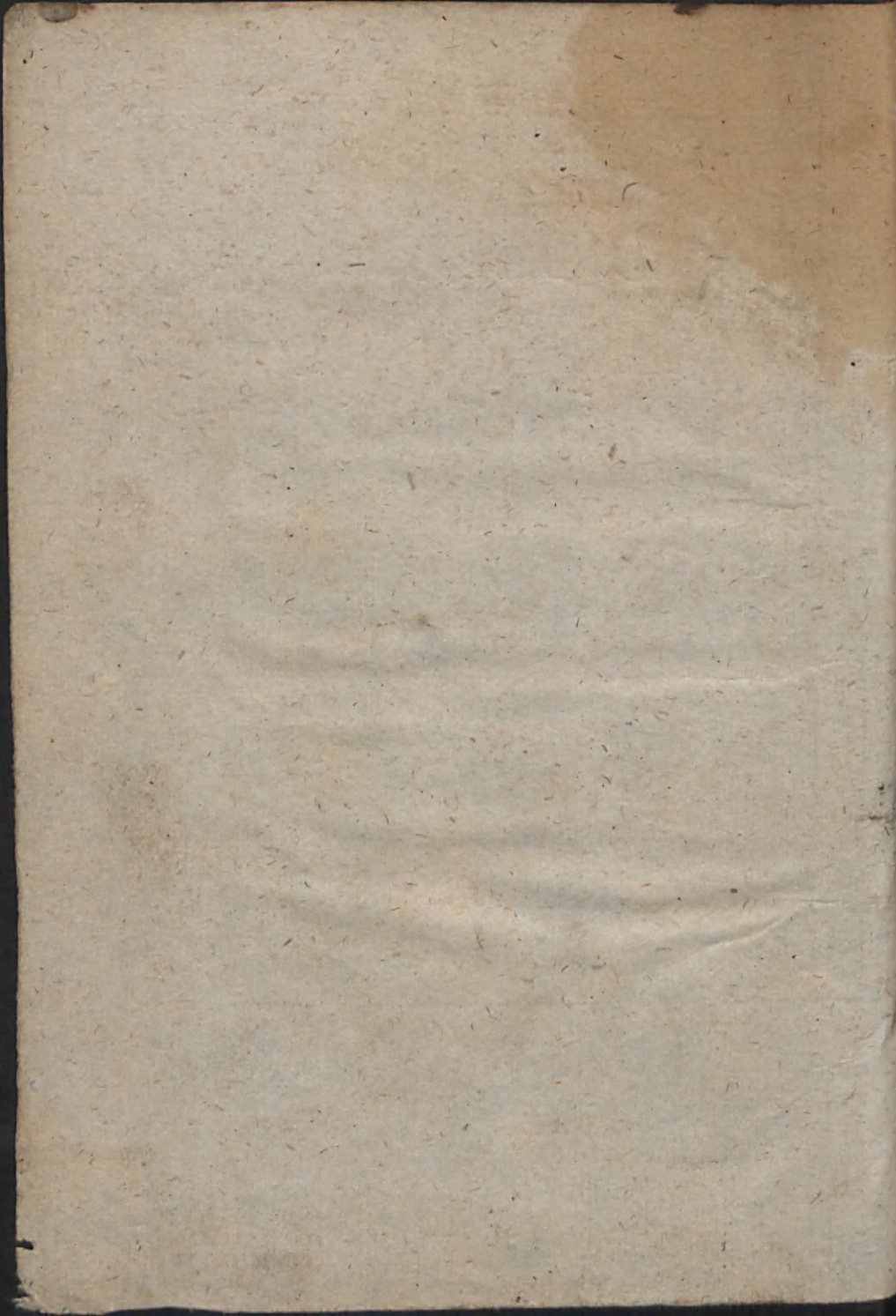
Notiones prævivæ de curvis in genere, & methodo exprimendi Analytice præcipuas proprietates.	286.
De natura, & proprietatibus præcipuis sectionum conicarum in plano descriptarum, atque ad axes relatarum.	293.
Proprietates sectionum conicarum relatarum ad diametros.	309.
Proprietates hyperbolæ ad asymptotos relatæ.	314.
Varia problemata de sectionibus conicis.	317.

Principia Calculi infinitesimalis. DE CALCULO DIFFERENTIALI.

Formulæ differentiales.	330.
Usus calculi differentialis.	333.
Usus in inveniendis tangentibus, subtangentibus, normalibus & subnormalibus.	333.
Usus in reperiendo radio curvaturæ in lineis curvis.	336.
Usus in maximis & minimis.	338.
Regulæ & usus calculi integralis.	341.
Usus in quadrandis superficiebus planis & curvis.	343.
Usus in rectificatione curvarum.	345.
Usus in cubandis solidis.	347.
Usus in methodo inversa tangentium.	347.







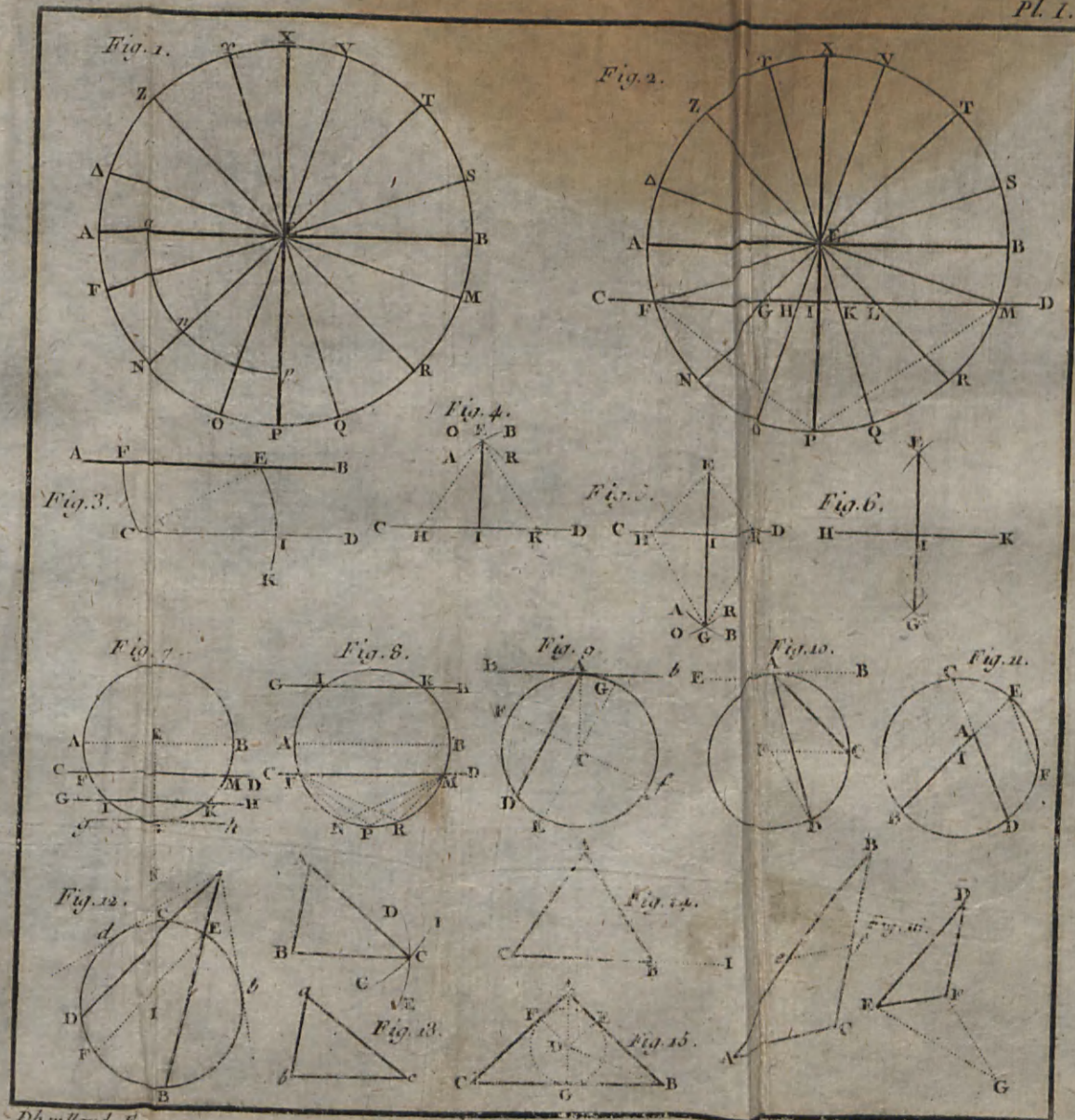




Fig. 17.

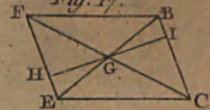


Fig. 18.

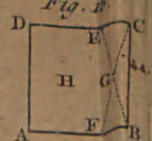


Fig. 19.

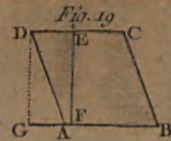


Fig. 20.



Fig. 21.

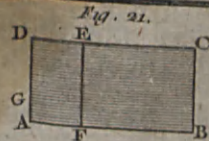


Fig. 25.



Fig. 24.

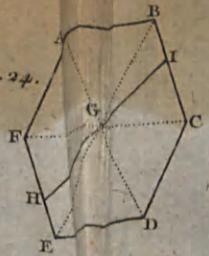


Fig. 23.



Fig. 22.

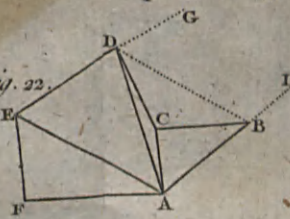


Fig. 26.

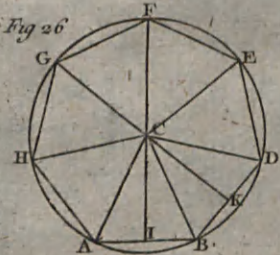


Fig. 27.

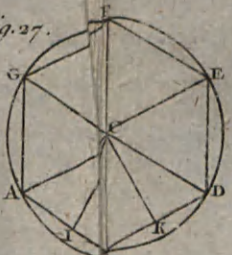


Fig. 28.

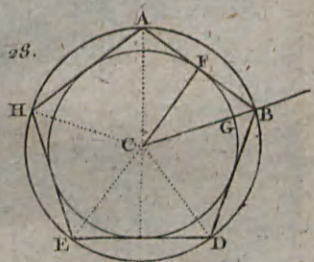


Fig. 31.

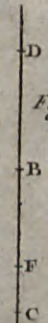


Fig. 29.

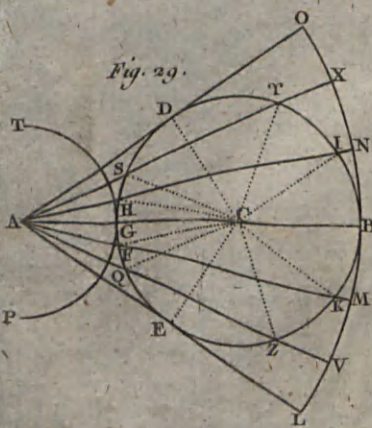


Fig. 30.

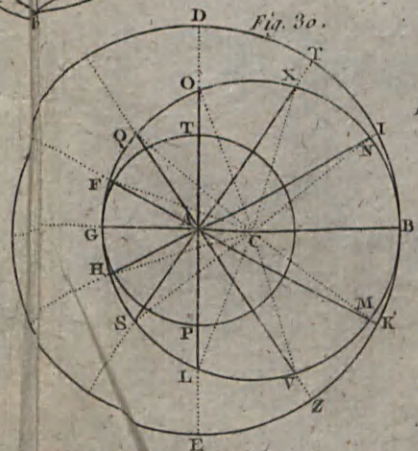
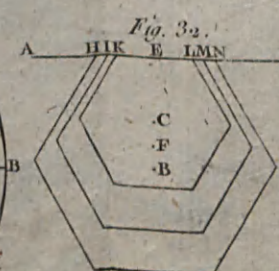
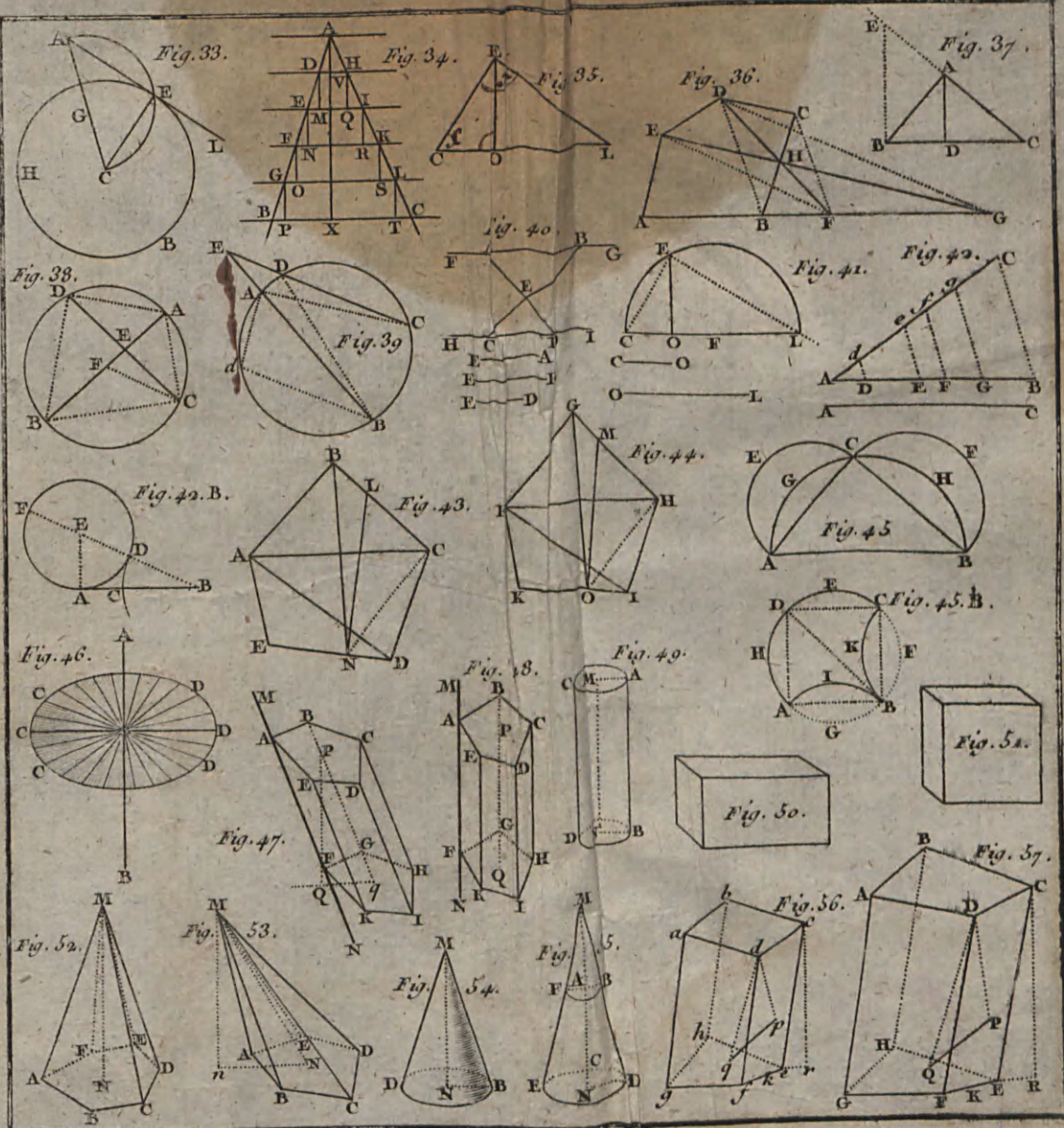


Fig. 32.

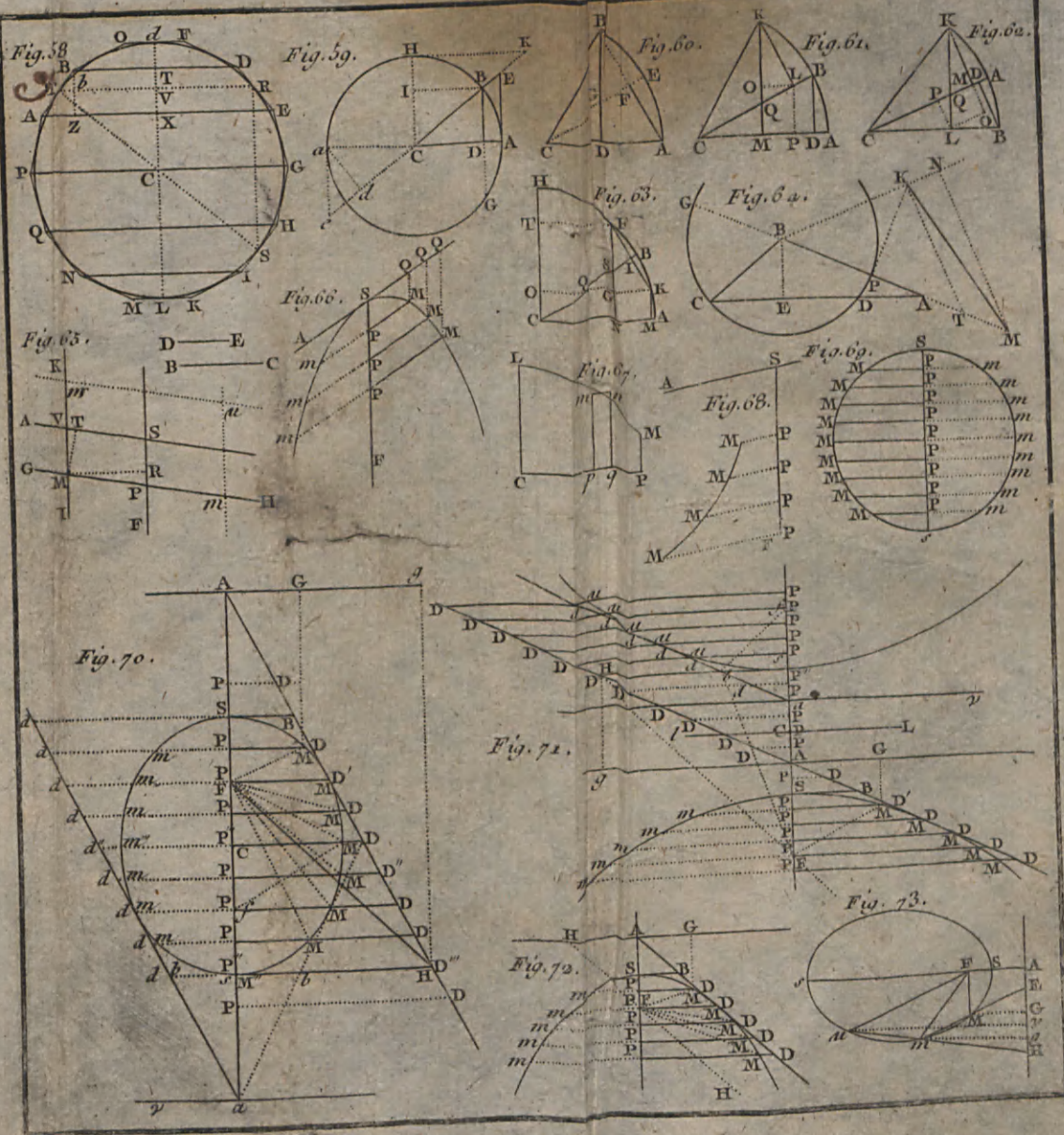








115-y.



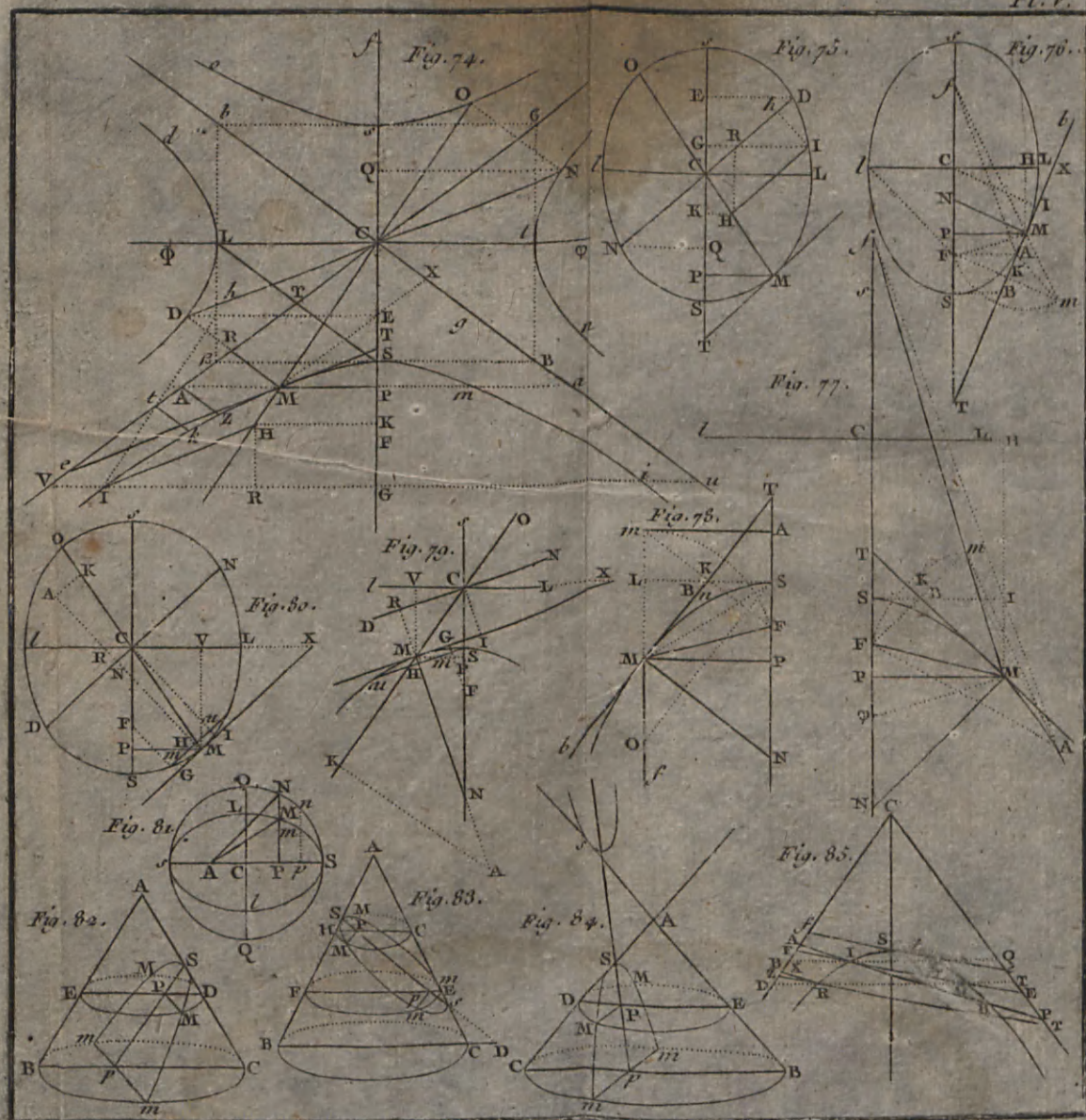


$\gamma = 0.1$

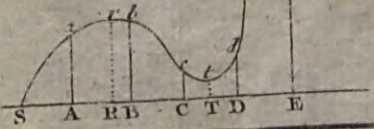
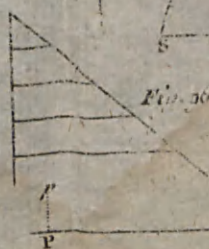
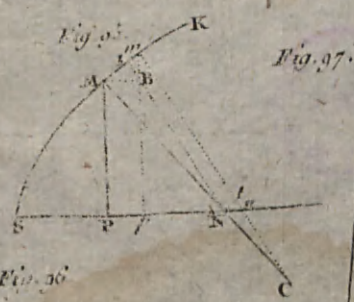
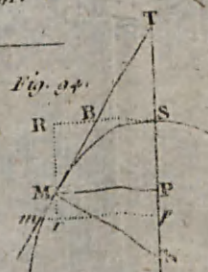
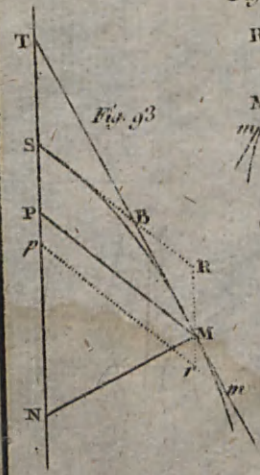
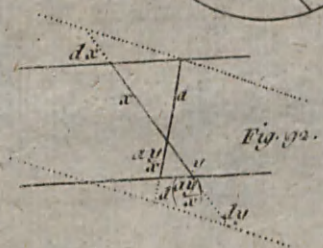
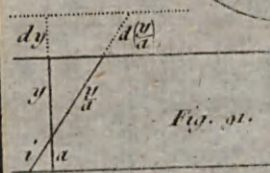
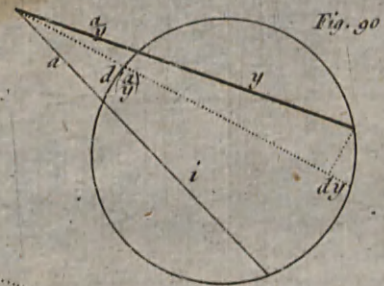
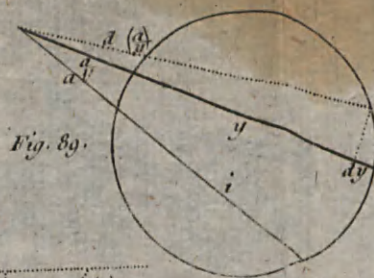
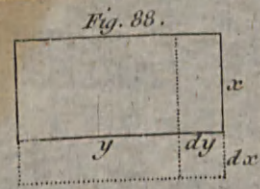
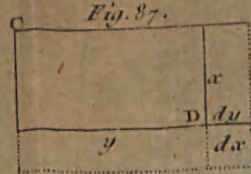
Aquale
Aquale
Aquale
Jo

Urino





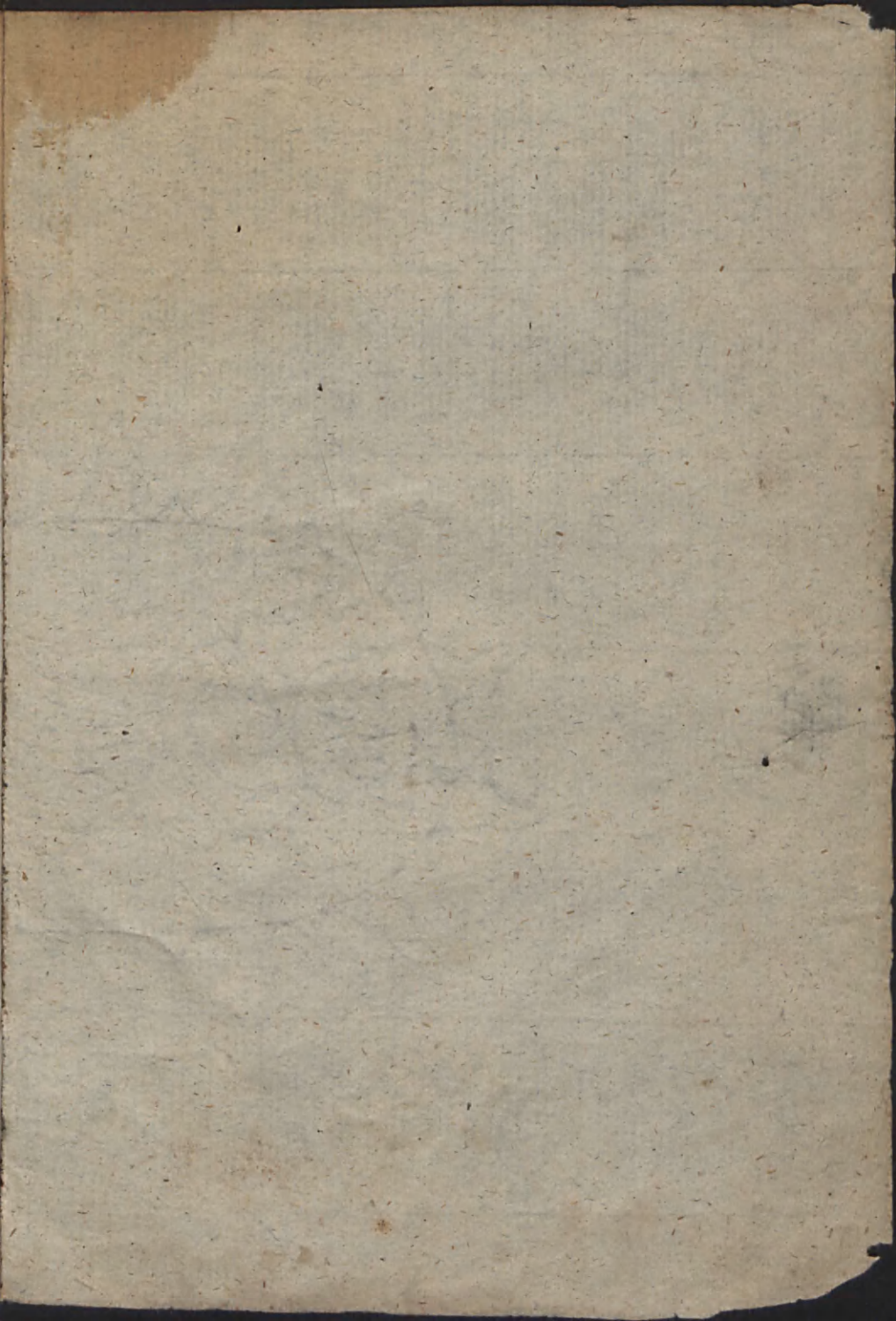






KSIEGOZBIÓR
MARCINA ZAMOYSKIEGO

4499 -KZ



4512-K2

linguam sive a lingua

